18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

KÖN. PR. REGIERUNG ZU POTSDAM

Zweiter Band,

In 4 Heften,

Mit 5 Kupfertafeln.

Berlin,

bei G. Reimer.

1827.

Inhaltsverzeichnifs
des zweiten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

Nr. der Abhandlung	1. Analysis.	Heft	Seite
1.	Ueber den Ausdruck der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale. Von Herrn Dr. *J. D. G. Jacobi*, Professor der Mathematik zu Königsberg.	I.	1
3.	Ueber einige bestimmte Integrale. Von Herrn *N. H. Abel* zu Christiania in Norwegen.	I	22
4.	Remarques sur les séries infinies et leur convergence. Par M. *Louis Olivier*.	I	31
7.	De residuis cubicis commentatio numerosa. Auct. Dr. *J. D. G. Jacobi* Regiom.	I	66
10.	Einiges über die Integration der Differentialgleichung der zweiten Ordnung (Pfaffschen) $x^2(a+bx^n)d^2y^1+x(c+ex^n)dy^1dx+(f+gx^n)y^1\partial x^2=M\partial x^2$. Vom Herrn *C. G. Sauer*.	I	93
12.	Recherches sur les fonctions elliptiques. Par M. *N. H. Abel*. . .	II	101
16.	Ueber Interpolations-Formeln, desgleichen über Anwendung derselben auf die Auflösung algebraischer Gleichungen von beliebigen Graden. Von Herrn *Louis Olivier*.	III	197
18.	Ueber eine besondere Gattung algebraischer Functionen, die aus der Entwicklung der Function $(1-2xz+z^2)^{\frac{1}{2}}$ entstehen. Von Herrn Dr. *J. D. G. Jacobi*, Professor der Mathematik zu Königsberg.	III	223
20.	De singulari quadam duplicis Integralis transformatione. Auct. Dr. *J. D. G. Jacobi*, Regiom.	III	234
21.	Bemerkungen über eine Art von Functionen, welche ähnliche Eigenschaften haben, wie die Cosinus und Sinus. Von Herrn *Louis Olivier*.	III	243
22.	Ueber die Berechnung von Tafeln gegebener Functionen, z. B. der Logarithmen, der Kreisgröfsen etc. Von Herrn *Louis Olivier*. . . .	III	252
29.	Casum irreducibilem solvendi conatus. Auct. Dr. *C. J. D. Hill*, Holm.	IV	304
31.	Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Von Herrn Dr. *J. G. D. Jacobi*, Professor der Mathematik zu Königsberg.	IV	317
33.	Beweis des Harriotischen Satzes. Von Herrn Dr. *J. A. Grunert* zu Torgau.	IV	335
35.	Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren. Vom Herrn Dr. *J. G. D. Jacobi*, Prof. der Math. zu Königsberg.	IV	347
36.	Summirung der Reihe: $1+\frac{x}{z}+\frac{x(x-1)}{z(z-1)}+\frac{x(x-1)(x-2)}{z(z-1)(z-2)}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{z(z-1)(z-2)(z-3)}+\ldots.$ Von Herrn Dr. *J. A. Grunert* zu Torgau.	IV	358
41.	Ueber die Functionen, welche der Gleichung $\varphi x+\varphi y=\psi(xfy+yfx)$ genugthun. Von Herrn *N. H. Abel*.	IV	386

2. Geometrie.

2.	Sphärische Polygonometrie. Vom Herrn *L. Raabe* zu Wien. . .	I	9
5.	Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren durch Construction. Von Herrn *J. Steiner* zu Berlin.	I	45

Abhandlung		Heft	Seite
6.	Auflösung einer geometrischen Aufgabe. (*Tom. XVII. p.* 284. der *Annales de mathém.* von Gergonne.) Von Herrn *J. Steiner.*	I	64
8.	Von den Keradoïden oder Spirallinien doppelter Krümmung. Vom Herrn *W. Horn* zu Berlin.	I	70
13.	Gleichungen der zweiten Ordnung in der Geometrie. Von Herrn *J. L. Raabe* zu Wien.	II	182
14.	Euleri formulae de transformatione coordinatarum. Auct. Dr. *J. G. Jacobi*, Regiom.	II	188
19.	Ueber die Hauptaxen der Flächen der zweiten Ordnung. Von Herrn Dr. *J. D. G. Jacobi*, Prof. der Math. zu Königsberg.	III	227
23.	Zwei polygonometrische Sätze. Von Herrn *J. Steiner* zu Berlin. . .	III	263
24.	Auflösung einer Aufgabe aus den Annalen der Mathematik von Herrn Gergonne. Von Herrn *J. Steiner.*	III	268
32.	Untersuchung über die Directrixen der Curven. Von Hrn. *L. Raabe* zu Wien.	IV	330
37.	Quadratur des Mantels des senkrechten, schief abgeschnittenen Kegels. Von Herrn *W. Horn* zu Berlin.	IV	364
38.	Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler gefundenen Sätze von Figuren-Netzen und Polyëdern. Von Herrn Dr. *J. A. Grunert* zu Torgau.	IV	367
39.	Eigenschaften der Curven, die sich auf bestimmten Oberflächen befinden. Von Herrn *J. Raabe* zu Wien.	IV	368
40.	Ueber den Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte. Von Herrn *Strehlke*, Professor zu Danzig.	IV	380

3. Mechanik.

17.	Drei mechanische und hydrodynamische Aufgaben nebst Auflösung. Von Herrn Dr. *Lehmus*, Prof. der Mathem. zu Berlin.	III	217

II. Angewandte Mathematik.

9.	Ueber den Stillstand der Planeten. Vom Herrn *L. Raabe* zu Wien.	I	85
25.	Ueber die Construction schief liegender Räderwerke. Vom Herrn *M. H. Jacobi*, zu Potsdam.	III	276
27.	Frottement des vis et des écroux. Par Mr. *J. V. Poncelet* à Metz.	IV	293
28.	Méthode abrégée pour le tracé des engrenages des roues d'angle. Par Mr. *J. V. Poncelet.*	IV	301
30.	Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Schalles in den Ebenen Süd-Amerika's, angestellt von Espinosa und Bauza. Mitgetheilt von Herrn Prof. Dr. *Oltmanns* zu Berlin.	IV	307
34.	Ueber die Bestimmung der Rectascension und Declination eines Sterns aus den gemessenen Distanzen desselben von zwei bekannten Sternen. Von Herrn Dr. *D. G. J. Jacobi*, Prof. der Mathem. zu Königsberg, .	IV	345

Aufgaben und Lehrsätze.

11.	Geometrische Aufgaben und Lehrsätze von Herrn *J. Steiner.* . .	I	96
	Aufgaben von Anderen.	I	99
15.	Geometrische Lehrsätze von Herrn *J. Steiner.*	II	190
	Aufgaben von Anderen.	II	193
26.	Aufgaben und Lehrsätze.		
	1. Von Herrn *N. H. Abel.*	III	286
	2. Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.	III	286
	3. Von Herrn *J. Steiner.*	III	287
	4. Von Anderen.	III	292
42.	Aufgaben und Lehrsätze.	IV	395

43.	Nachrichten von Büchern.	IV	399

Vorrede.

Der erste Band dieses Journals für die reine und angewandte Mathematik, dessen Fortsetzung hier beginnt, hat sich in allem Betracht eines unerwartet guten Erfolgs zu erfreuen gehabt. Von den Anerkennungen und Aufmunterungen, die dem Journal zu Theil geworden, ist vor allen diejenige zu nennen, womit dasselbe von Höchsten Behörden des Hocherleuchteten Königlich-Preufsischen Gouvernements beehrt worden. Diese, die Wissenschaften mit so ausgezeichneter Munificenz und thätigem Eifer beschützenden und befördernden Höchsten Behörden haben eine namhafte Zahl von Exemplaren für verschiedene Unterrichts-Anstalten und Bibliotheken ankaufen zu lassen und dadurch die Fortdauer des Journals kräftig zu unterstützen beschlossen. Der Herausgeber, und gewifs jeder Freund der Wissenschaften, sagt Ihnen dafür den aufrichtigsten Dank. Eine solche thätige Beförderung mufs nothwendig den Eifer, das Unternehmen möglichst zu vervollkommnen, kräftig verstärken.

Sodann haben die Gelehrten in mehreren Ländern, und vorzüglich in Frankreich, die Zeitschrift nicht allein mit Beifall aufgenommen, sondern auch durch eigene Theilnahme unterstützt.

Endlich hat das mathematische Publicum sich für das Journal auf eine so erfreuliche Weise interessirt, dafs Hoff-

nung vorhanden ist, die Zeitschrift werde noch immer mehr Theilnahme finden, und immer weiter gedeihen, je mehr sie bekannt wird, und je mehr sie sich selbst, für die Zwecke die sie sich vorgesetzt hat, entwickelt.

Der Herausgeber beginnt also die gegenwärtige Fortsetzung mit Vertrauen und Hoffnung auf einen ferneren guten und immer besseren Erfolg.

Der Plan und der Zweck der Fortsetzung bleibt im Ganzen der nemliche, wie er in der Vorrede zum ersten Bande angedeutet ist. Nur hat es den Gelehrten und Kennern, die den Herausgeber mit ihrem Rathe beehrten, so wie ihm selbst, nicht unzweckmäfsig geschienen, diejenigen Aufsätze, welche ein weiter verbreitetes Interesse, besonders für den eigentlichen Gelehrten haben, um sie allgemeiner lesbar zu machen, in lateinischer oder französischer Sprache zu geben, welche Sprachen Denen, die in einer Wissenschaft weiter eindringen, fast in allen Ländern eben so verständlich sind, als die Muttersprache. Dieses wird also hinfort geschehen. Eine Aufforderung zu dieser Abänderung lag auch schon beim ersten Bande gewissermafsen darin, dafs ein sehr grofser Theil seines Inhalts dem Herausgeber nicht in deutscher Sprache mitgetheilt worden ist, sondern von ihm erst hat übersetzt werden müssen; desgleichen darin, dafs er, wiederum einen grofsen Theil der Abhandlungen von aufserhalb Deutschland, namentlich aus Frankreich, den Niederlanden, Dänemark, Schweden etc. erhielt, wodurch sich gleichsam die Tendenz des Journals, eine allgemeine Zeitschrift zu werden, nicht undeutlich aussprach, welcher Tendenz er dann auch, da die Allgemeinheit der Mittheilung ohne Zweifel am allerkräftigsten zur Erreichung des Zweckes des Unternehmens wirken wird, mit Vergnügen nachgiebt.

Sodann finden es die Freunde des Herausgebers, mit ihm, nützlich, Aufgaben aus der Mathematik aufzustellen, und sie durch das Journal beantworten zu lassen, wie es schon bei dem ersten Bande im Voraus angedeutet worden ist, und wie von der vortrefflichen, von Herrn Gergonne zu Montpellier redigirten mathematischen Zeitschrift, seit vielen Jahren, mit so bedeutendem Erfolge geschiehet. Das Journal wird also fortan dergleichen Aufgaben, oder auch zu beweisende Lehrsätze enthalten, und die Mathematiker werden hierdurch zum Beantworten der ersteren und zum Beweisen der letzteren eingeladen.

Endlich finden die Kenner es nützlich und angemessen, dafs Jedermann, der durch mathematische Forschungen zu Resultaten gelangt ist, die neu zu sein scheinen, sie mögen in Lehrsätzen oder in Erläuterungen schwieriger Gegenstände, oder in Betrachtungen, oder auch selbst in Aufgaben bestehen, durch das Journal Gelegenheit finden möge, dieselben bekannt zu machen. Der Herausgeber ladet demnach hierdurch zur Mittheilung solcher Resultate ein. Auch wird er Anzeigen von mathematischen Schriften, die im Werke sind, und Beurtheilungen erschienener Schriften, wobei aber, wie bei dem ganzen übrigen Inhalte des Journals, Alles was irgend Jemand verletzen könnte, unbedingt und strenge ausgeschlossen bleibt, gern aufnehmen. Nur mufs bei diesen Mittheilungen und denjenigen der Auflösungen von Aufgaben und der Beweise ausgestellter Lehrsätze die natürliche Bedingung Statt finden, dafs Dasjenige was etwa nicht zur Bekanntmachung durch das Journal vom Herausgeber geeignet gefunden werden möchte, zurückgegeben werden dürfe.

Diejenigen Zuschickungen für das Journal, welche nicht von den besonders eingeladenen Mitarbeitern kommen, mufs sich aber der Herausgeber portofrei erbitten.

Die oben erwähnte erfreuliche Aufnahme des ersten Bandes dieser Zeitschrift kann den Herausgeber, dessen ganzes Streben seiner Wissenschaft gewidmet ist, und der kaum eine andere Freude kennt, als für dieselbe zu wirken, nicht anders, als mit dem lebhaftesten Eifer beseelen und ihn ermuntern, alle seine Kräfte anzuwenden, auch hier auf diesem Wege Alles, was in seinem Vermögen ist, zu dem vorgesetzten Zwecke zu thun. Er wird keine Mühe und keine Aufopferung bei diesem Bestreben scheuen, und wünscht für sich nichts weiter, als dafs es ihm damit auch fernerhin und noch immer mehr gelingen möge. Der Herr Verleger der gegenwärtigen Fortsetzung, dessen Eifer, wissenschaftliche Werke seinerseits fördern zu helfen, rühmlichst bekannt ist, und dem der Herausgeber schon bei seinen eigenen, in dem nemlichen Verlage erschienenen mathematischen Schriften, so manche denselben nützlich gewesene Gefälligkeiten schuldig ist, wird gewifs auch seinerseits Alles thun, was zur Förderung des Unternehmens gereichen kann.

Es ist nur noch übrig, das Publicum und Jeden der sich für die Mathematik, diese für so unzählige Verhältnisse des Lebens und für die Verbreitung und weitere Entwicklung der allgemeinen Intelligenz, jener wahren Quelle des Wohlseins, wichtige und nützliche Wissenschaft interessirt, wie hierdurch geschiehet, zu bitten, dem Unternehmen ferner und immer mehr seine Aufmerksamkeit zu schenken, und dasselbe durch Verbreitung und Theilnahme unterstützen und fördern zu wollen.

Der Herausgeber.

1.

Ueber den Ausdruck der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale.

(Vom Herrn Prof. *Jacobi*.)

1.

Im 1sten Bande der *Mémoires des savans étrangers* vom J. 1806 hat Parseval die Lagrangesche Reihe, welche die Wurzel einer gegebenen Gleichung ausdrückt, durch Hülfe bestimmter Integrale zu summiren, und die von ihm so gefundene Formel auf directem Wege zu beweisen versucht. Später hat Bessel in den Abhandlungen der Berliner Academie vom J. 1816 — 17 eine berühmte Anwendung der bestimmten Integrale auf das Keplersche Problem gemacht. Da neuerdings die merkwürdigen Formeln, welche Cauchy im 19ten Hefte des polytechnischen Journals gegeben hat, wieder die Aufmerksamkeit der Analysten auf diese Art, die verschiedenen Wurzeln einer Gleichung zu bestimmen, gelenkt haben, so sei es mir vergönnt, die von Parseval angefangenen Untersuchungen wieder aufzunehmen und zu vervollständigen.

2.

Es sei eine Function $f(x)$ in eine convergirende Reihe entwickelt, von der Form:

$$A + A'\cos x + A''\cos 2x + A'''\cos 3x + \text{etc.}$$
$$+ B'\sin x + B''\sin 2x + B'''\sin 3x + \text{etc.},$$

so hat man bekanntlich, wenn man sich der von Fourrier eingeführten Bezeichnung der bestimmten Integrale bedient:

$$A^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\partial x,$$

$$B^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\partial x.$$

Diese Formeln folgen sogleich aus der Betrachtung, dafs

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,\sin nx\,\partial x = 0,$$

dafs ferner, wenn m und n ungleich sind, auch

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, \partial x = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, \partial x = 0,$$

hingegen, wenn $m = n$, beide Integrale $= \pi$ werden. Der Fall $m = n = 0$ macht eine Ausnahme, indem man dann 2π statt π erhält, daher auch

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \partial x.$$

Diese Methode der Coefficientenbestimmung in der Entwicklung der Function $f(x)$ findet sich zuerst in einer Abhandlung von Euler, vom J. 1777, die aber erst im J. 1798, im 11ten Bande der *Nova Acta* bekannt gemacht wurde, und deren sich seitdem mehrere Analysten zu jener Coefficientenbestimmung bedient haben. Umgekehrt sieht man, dafs, so oft eine Function $f(x)$ auf andrem Wege in convergirende Reihen von der angegebenen Form entwickelt werden kann, dieses zur Werthbestimmung der Integrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, \partial x, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, \partial x$$

dient. So oft aber im Allgemeinen sich eine Function $\Phi(x)$ nach den positiven oder negativen Potenzen von x, oder nach beiden zugleich, in eine convergirende Reihe entwickeln läfst, erhält man, indem man statt x den Ausdruck

$$re^{\pm x\sqrt{-1}} = r(\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})$$

setzt, für die Function $\Phi(re^{\pm x\sqrt{-1}})$ eine Reihenentwicklung, die nach den Vielfachen der Sinus und Cosinus des Winkels x fortschreitet, und die immer convergirt, wenn r sich zwischen denselben Grenzen befindet, in welchen x bei der Entwicklung der Function $\Phi(x)$ enthalten sein müfste, damit die Entwicklung eine convergirende Reihe gäbe. Jede solche convergirende Reihenentwicklung von $\Phi(x)$, nach den Potenzen von x, führt uns also zur Werthbestimmung der Integrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(re^{\pm x\sqrt{-1}}) \cos nx \, \partial x, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(re^{\pm x\sqrt{-1}}) \sin nx \, \partial x.$$

Die Combination dieser giebt die bestimmten Integrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \Phi(re^{+x\sqrt{-1}}) + \Phi(re^{-x\sqrt{-1}}) \right\} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nx \, \partial x,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \frac{\Phi(re^{+x\sqrt{-1}}) - \Phi(re^{-x\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}} \right\} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nx \, \partial x,$$

aus welchen die imaginären Gröfsen verschwunden sind.

Man wird also, wenn die Function $\Phi(x)$, je nach den verschiedenen Grenzen, innerhalb welcher sich x befindet, anders entwickelt werden mufs, damit man convergirende Reihen erhalte, für jene bestimmten Integrale, nach den verschiedenen Werthen von r, oft wesentlich verschiedene Resultate erhalten müssen.

3.

Es sei jetzt $\Phi(x)$ der Logarithme eines Polynomiums

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + x^p.$$

Es seien ferner

$$x - \alpha', \quad x - \alpha'', \quad x - \alpha''', \quad \ldots, \quad x - \alpha^{(p)}$$

die Factoren dieses Polynomiums, so ist sein Logarithme gleich der Summe der Logarithmen dieser einzelnen Factoren. Diese einzelnen Logarithmen müssen nach den verschiedenen Grenzen, in denen x enthalten ist, verschieden entwickelt werden, um convergirende Reihen zu geben. Denkt man sich nemlich, es seien die Wurzeln

$$\alpha', \quad \alpha'', \quad \alpha''', \quad \ldots, \quad \alpha^{(p)}$$

so geordnet, wie sie ihrer absoluten Gröfse nach auf einander folgen, d. h.: ohne auf das Zeichen zu sehen, und bei einem Paare imaginärer Wurzeln nur Rücksicht genommen auf die Quadratwurzel ihres Products: so müssen im Allgemeinen

1) wenn x gröfser ist als alle Wurzeln, alle Logarithmen nach absteigenden,
2) wenn x kleiner ist als alle Wurzeln, alle Logarithmen nach aufsteigenden,
3) wenn x im genannten Sinne sich zwischen den Wurzeln $\alpha^{(k)}$ und $\alpha^{(k+1)}$ befindet, die Logarithmen

$$\log(x - \alpha'), \quad \log(x - \alpha''), \quad \ldots, \quad \log(x - \alpha^{(k)})$$

nach absteigenden, die übrigen nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelt werden, damit man convergirende Reihen erhalte.

4.

Setzt man nun in

$$\Phi(x) = \log(a + bx + cx^2 + \ldots + x^p)$$

statt x den Ausdruck $re^{\pm x\sqrt{-1}}$, so erhält man

$$\Phi(re^{+x\sqrt{-1}}) + \Phi(re^{-x\sqrt{-1}}) =$$

$$\log\{(a + br\cos x + cr^2\cos 2x + \ldots + r^p\cos px)^2 + (br\sin x + cr^2\sin 2x + \ldots + r^p\sin px)^2\},$$

welchen Ausdruck wir mit $\log(U^2+V^2)$ bezeichnen wollen. Will man die unter dem Logarithmenzeichen begriffene Function entwickeln, so erhält man $U^2+V^2 =$

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 r^2 + c^2 r^4 + r^{2p} \\ &+ 2r \cos x \ (ab + bcr^2 + cdr^4 + \text{etc.}\ldots.) \\ &+ 2r^2 \cos 2x\,(ac + bdr^2 + cer^4 + \text{etc.}\ldots.) \\ &+ 2r^3 \cos 3x\,(ad + ber^2 + cfr^4 + \text{etc.}\ldots.) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aus dieser Formel erhellet im Vorbeigehen, dafs, wenn eine Reihe

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

gegeben ist, die Reihen

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 r^2 + c^2 r^4 + d^2 r^6 + \text{etc.}, \\ &ab + bcr^2 + cdr^4 + der^6 + \text{etc.}, \\ &ac + bdr^2 + cer^4 + dfr^6 + \text{etc.}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

sich ausdrücken lassen durch die bestimmten Integrale

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{+x\sqrt{-1}})f(re^{-x\sqrt{-1}})\,\partial x, \\ &\frac{1}{2\pi r}\int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{x\sqrt{-1}})f(re^{-x\sqrt{-1}})\cos x\,\partial x, \\ &\frac{1}{2\pi r^2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{x\sqrt{-1}})f(re^{-x\sqrt{-1}}\cos 2x\,\partial x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

5.

Die convergirende Reihenentwicklung von $\log(U^2+V^2)$ giebt,

1) wenn r gröfser ist als alle Wurzeln $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(p)}$:

$$p\log r^2 - 2\Sigma_1^p\left(\frac{\alpha}{r}\cos x + \frac{\alpha^2}{2r^2}\cos 2x + \frac{\alpha^3}{3r^3}\cos 3x + \frac{\alpha^4}{4r^4}\cos 4x + \text{etc.}\right);$$

2) wenn r kleiner ist als alle Wurzeln $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(p)}$:

$$\log a^2 - 2\Sigma_1^p\left(\frac{r}{\alpha}\cos x + \frac{r^2}{2\alpha^2}\cos 2x + \frac{r^3}{3\alpha^3}\cos 3x + \frac{r^4}{4\alpha^4}\cos 4x + \text{etc.}\right);$$

3) wenn $\alpha^{(k)} < r > \alpha^{(k+1)}$, in dem angegebenen Sinne:

$$\begin{aligned} &k\log r^2 - 2\Sigma_1^k\left(\frac{\alpha}{r}\cos x + \frac{\alpha^2}{2r^2}\cos 2x + \frac{\alpha^3}{3r^3}\cos 3x + \frac{\alpha^4}{4r^4}\cos 4x + \text{etc.}\right) \\ &+ 2\Sigma_{k+1}^p\left(\log a^2 - \frac{r}{\alpha}\cos x - \frac{r^2}{2\alpha^2}\cos 2x - \frac{r^3}{3\alpha^3}\cos 3x - \frac{r^4}{4\alpha^4}\cos 4x - \text{etc.}\right), \end{aligned}$$

wo man unter $\Sigma_m^n\psi(\alpha)$ die Summe der Ausdrücke versteht, die erhal-

ten werden, wenn man in $\psi(\alpha)$, statt α, nach einander, $\alpha^{(m)}$, $\alpha^{(m+1)}$, $\alpha^{(m+2)}$, ..., $\alpha^{(n)}$ setzt.

Nach diesen 3 verschiedenen Fällen erhält man

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(U^2+V^2)\,\partial x =$$

1) $p\log r^2$; 2) $\log\alpha^2$; 3) $k\log r^2+\log\alpha^{(k+1)}+\log\alpha^{(k+2)^2}+\ldots.+\log\alpha^{(p)^2}$;

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(U^2+V^2)\cos nx\,\partial x =$$

1) $\dfrac{1}{nr^n}(\alpha'^n+\alpha''^n+\alpha'''^n+\ldots.+\alpha^{(p)^n})$;

2) $\dfrac{r^n}{n}\left(\dfrac{1}{\alpha'^n}+\dfrac{1}{\alpha''^n}+\dfrac{1}{\alpha'''^n}+\ldots.+\dfrac{1}{\alpha^{(p)^n}}\right)$;

3) $\dfrac{1}{nr^n}(\alpha'^n+\alpha''^n+\alpha'''^n+\ldots.+\alpha^{(k)^n})$

$+\dfrac{r^n}{n}+\left(\dfrac{1}{\alpha^{(k+1)^n}}+\dfrac{1}{\alpha^{(k+2)^n}}+\ldots.+\dfrac{1}{\alpha^{(p)^n}}\right)$.

6.

Es ist bekanntlich

$$\frac{\log(u+v\sqrt{-1})-\log(u-v\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \text{Arc. tang.}\frac{v}{u}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\Phi(re^{x\sqrt{-1}})-\log\Phi(re^{-x\sqrt{-1}})$$
$$= \text{Arc. tang.}\frac{br\sin x+cr^2\sin 2x+\ldots.+r^p\sin px}{a+br\cos x+cr^2\cos 2x+\ldots.+r^p\cos px},$$

welches wir mit Arc. tang. $\frac{V}{U}$ bezeichnen. Man erhält so

$$\text{Arc. tang.}\frac{V}{U} = +\text{Arc. tang.}\frac{r\sin x}{r\cos x-\alpha'}+\text{Arc. tang.}\frac{r\sin x}{r\cos x-\alpha''}+\ldots.$$
$$\ldots.+\text{Arc. tang.}\frac{r\sin x}{r\cos x-\alpha^{(p)}}.$$

Die convergirenden Reihenentwickelungen für Arc. tang. $\frac{V}{U}$ geben nach den verschiedenen Fällen:

1) $px+\Sigma_1^p\left(\dfrac{\alpha}{r}\sin x+\dfrac{\alpha^2}{2r^2}\sin 2x+\dfrac{\alpha^3}{3r^3}\sin 3x+\dfrac{\alpha^4}{3r^4}\sin 4x+\text{ etc.}\right)$,

2) $-\Sigma_1^p\left(\dfrac{r}{\alpha}\sin x+\dfrac{r^2}{2\alpha^2}\sin 2x+\dfrac{r^3}{3\alpha^3}\sin 3x+\dfrac{r^4}{4\alpha^4}\sin 4x+\text{ etc.}\right)$,

3) $kx+\Sigma_1^k\left(\dfrac{\alpha}{r}\sin x+\dfrac{\alpha^2}{2r^2}\sin 2x+\dfrac{\alpha^3}{3r^3}\sin 3x+\dfrac{\alpha^4}{3r^4}\sin 4x+\text{ etc.}\right)$

$-\Sigma_{k+1}^p\left(\dfrac{r}{\alpha}\sin x+\dfrac{r^2}{2\alpha^2}\sin 2x+\dfrac{r^3}{3\alpha^3}\sin 3x+\dfrac{r^4}{4\alpha^4}\sin 4x+\text{ etc.}\right)$.

Bemerkt man ferner, dafs durch theilweise Integration:

$$\int x \sin nx\, \partial x = -\frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int \cos nx\, \partial x = -\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2},$$

also

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, \partial x = \pm\frac{2}{n},$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn n ungerade, das untere, wenn n gerade ist, so findet man:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{Arc. tang.}\frac{V}{U}\sin nx\, \partial x =$$

$$1)\ \pm\frac{2p}{n} + \frac{1}{nr^n}(\alpha'^n + \alpha''^n + \alpha'''^n + \ldots + \alpha^{(p)n});$$

$$2)\ -\frac{r^n}{n}\left(\frac{1}{\alpha'^n} + \frac{1}{\alpha''^n} + \frac{1}{\alpha'''^n} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{(p)n}}\right);$$

$$3)\ \pm\frac{2x}{n} + \frac{1}{nr^n}(\alpha'^n + \alpha''^n + \alpha'''^n + \ldots + \alpha^{(k)n})$$

$$-\frac{r^n}{n}\left(\frac{1}{\alpha^{(k+1)n}} + \frac{1}{\alpha^{(k+2)n}} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{(p)n}}\right).$$

7.

Für den 3ten Fall also, wenn der absolute Werth von r zwischen den absoluten Werthen von $\alpha^{(k)}$ und $\alpha^{(k+1)}$ fällt, findet man aus §. 5.:

$$\frac{1}{r^n}(\alpha'^n + \alpha''^n + \ldots + \alpha^{(k)n}) + r^n\left(\frac{1}{\alpha^{(k+1)n}} + \frac{1}{\alpha^{(k+2)n}} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{(p)n}}\right) =$$

$$-\frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(U^2+V^2)\cos nx\, \partial x;$$

aus §. 6.:

$$\frac{1}{r^n}(\alpha'^n + \alpha''^n + \ldots + \alpha^{(k)n}) - r^n\left(\frac{1}{\alpha^{(k+1)n}} + \frac{1}{\alpha^{(k+2)n}} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{(p)n}}\right) =$$

$$\mp 2k + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{Arc. tang.}\frac{V}{U}\sin nx\, \partial x.$$

Die Combination beider Formeln giebt

$$\alpha'^n + \alpha''^n + \alpha'''^n + \ldots + \alpha^{(k)n} =$$

$$\mp kr^n + \frac{nr^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin nx\ \text{Arc. tang.}\frac{V}{U} - \cos nx \log\sqrt{(U^2+V^2)}\right)\partial x;$$

$$\frac{1}{\alpha^{(k+1)n}} + \frac{1}{\alpha^{(k+2)n}} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{(p)n}} =$$

$$\pm\frac{k}{r^n} - \frac{n}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin nx\ \text{Arc. tang.}\frac{V}{U} + \cos nx \log\sqrt{(U^2+V^2)}\right)\partial x.$$

Nimmt man eine neue Gröfse r' so, dafs ihr absoluter Werth zwischen den absoluten Werthen von $\alpha^{(k-1)}$ und $\alpha^{(k)}$ liegt, so erhält man dadurch, dafs man in den bestimmten Integralen r' statt r setzt, die Werthe von

$$\alpha'^n + \alpha''^n + \alpha'''^n + \ldots + \alpha^{(k-1)^n},$$

$$\frac{1}{\alpha^{(k)^n}} + \frac{1}{\alpha^{(k+1)^n}} + \frac{1}{\alpha^{(k+2)^n}} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{(p)^n}}.$$

Nimmt man die Differenzen dieser Ausdrücke und der vorigen, so erhält man die Werthe von $\alpha^{(k)^n}$ und $\frac{1}{\alpha^{(k)^n}}$, als die Differenz zweier bestimmter Integrale, die blofs in einer Constante (r, r') von einander differiren. Wir haben also das merkwürdige Beispiel eines bestimmten Integrals, welches ganz verschiedene Werthe erhält, nach den Grenzen, in welchen eine Constante desselben eingeschlossen ist, und in welchem zugleich der individuelle Werth dieser Constante gänzlich verschwunden ist. Bezeichnen wir das bestimmte Integral, welches uns den Werth von

$$\alpha'^n + \alpha''^n + \alpha'''^n + \ldots + \alpha^{(k)^n}$$

giebt, mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(r)\,\partial x,$$

und das Differential von $F(r)$, nach r, mit $F'(r)$, so können wir die gefundene Formel auch so ausdrücken, dafs die $n$te Potenz der Wurzel $\alpha^{(k)}$ gleich ist dem doppelten Integral

$$\int F'(r)\,\partial x\,\partial r,$$

das Integral in Bezug auf x, zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ und in Bezug auf r, zwischen willkürlichen Grenzen genommen, die blofs der Bestimmung unterworfen sind, dafs zwischen ihnen, was ihre absolute Gröfse betrifft, nur die einzige Wurzel $\alpha^{(k)}$ liege. Im Allgemeinen wird jenes bestimmte Integral die Summe der $n$ten Potenzen aller der Wurzeln geben, welche zwischen den willkürlichen Grenzen liegen, so dafs also, wenn zwischen ihnen keine Wurzel liegt, dieses doppelte Integral immer 0 wird, zwischen den Grenzen $r = 0$ und $r = \infty$ aber, gleich der Summe der $n$ten Potenzen aller Wurzeln sein wird. Solche Integrale zwischen willkürlichen Grenzen sind in den neuesten Zeiten öfters zur Sprache gekommen, und haben durch die Arbeiten von Cauchy und

Fourrier grofses Interesse erregt. So drückt die berühmte Fourriersche Formel den Werth einer Function aus mehreren (n) Variabeln $f(x, y, z, \ldots.)$ aus, durch das vielfache Integral

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cos\alpha(x-\mu).\cos\beta(y-\nu).\cos\gamma(z-\varpi)\ldots.f(\mu,\nu,\varpi,\ldots.)\,\partial\alpha\,\partial\mu\,\partial\beta\,\partial\nu\,\partial\gamma\,\partial\varpi\ldots.,$$

wo die Integrale, in Bezug auf α, β, γ, etc., zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu nehmen sind, in Bezug auf μ, ν, ϖ, etc. aber, zwischen willkürlichen Grenzen, die nur dadurch bestimmt sind, dafs zwischen ihnen die den Gröfsen x, y, z, etc. ertheilten Werthe liegen. Ist dieses nicht der Fall, so wird das Integral immer verschwinden. Die Betrachtung solcher Integrale, die eine eigenthümliche Analysis erfordert, dürfte vielleicht aus den hier gegebenen Formeln, die eine durchweg sichere Basis gewähren, einigen Vortheil ziehen.

Ich will nur noch bemerken, dafs man aus den gegebnen Formeln sogleich auch den Werth jeder Function einer Wurzel als bestimmtes Integral erhält. Es ist ferner zu bemerken, dafs die imaginären Wurzeln nicht selbst, sondern nur die Potenzsummen eines Paars auf diesem Wege gefunden werden können, woraus man dann freilich auf mannichfache Weise diese selbst darstellen kann. Um die Grenzen dieser Abhandlung nicht auszudehnen, enthalte ich mich alles weiteren Details; behalte mir aber vor, auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

2.
Sphärische Polygonometrie.

(Vom Herrn *Joseph L. Rabe*, Verfasser der Abhandlung No. 26. im ersten Bande dieses Journals.)

1.

Es seien X_0, Y_0, Z_0 drei aufeinander senkrecht stehende Coordinatenaxen. Die Coordinaten irgend eines Punctes gegen dieses festgesetzte Coordinatensystem wollen wir durch x, y, z vorstellen.

Hat man nun ein zweites Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1; wo die Lage dieses neuen Coordinatensystems gegen das Vorhergehende dadurch bestimmt wird, dafs beide Systeme denselben Ursprung haben, und die Axe der X_1 mit der Axe der X_0 den Winkel a_0, so wie die Ebene der $X_1 Y_1$, mit der Ebene der $X_0 Y_0$, den Winkel b_0, bilden; dann hat man, wenn die Coordinaten des bereits erwähnten Punctes, auf dieses neue Coordinatensystem bezogen, durch ξ_0, υ_0, ζ_0 bezeichnet werden, durch eine Transformation der Coordinaten folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi_0 \cos a_0 - \upsilon_0 \sin a_0 \\ y &= \xi_0 \sin a_0 \cos b_0 + \upsilon_0 \cos a_0 \cos b_0 - \zeta_0 \sin b_0 \\ z &= \xi_0 \sin a_0 \sin b_0 + \upsilon_0 \cos a_0 \sin b_0 + \zeta_0 \cos b_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (a).$$

Diese Gleichungen zeigen also den Uebergang an, von dem Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 auf das Coordinatensystem X_0, Y_0, Z_0.

Denkt man sich nun noch ein drittes Coordinatensystem X_2, Y_2, Z_2, von der Art, dafs der Ursprung derselbe geblieben ist, und die Axen der X_2 und X_1 den Winkel a_1 bilden, und die Ebene der $X_2 Y_2$ und $X_1 Y_1$ den Winkel b_1 bilden, und sind die Coordinaten desselben Punctes, auf dieses neue Coordinatensystem bezogen, durch ξ_1, υ_1, ζ_1 vorgestellt; dann hat man durch folgende mit den Gleichungen (a) analoge Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_1 \cos a_1 - \upsilon_1 \sin a_1, \\ \upsilon_0 &= \xi_1 \sin a_1 \cos b_1 + \upsilon_1 \cos a_1 \cos b_1 - \zeta_1 \sin b_1, \\ \zeta_0 &= \xi_1 \sin a_1 \sin b_1 + \upsilon_1 \cos a_1 \sin b_1 + \zeta_1 \cos b_1, \end{aligned}$$

den Uebergang von dem Coordinatensystem X_2, Y_2, Z_2 auf das X_1, Y_1, Z_1. Will man aber den Uebergang von dem Coordinatensystem X_2, Y_2, Z_2 auf das X_0, Y_0, Z_0 haben, so substituiren wir die hier aufge-

stellten Werthe für ξ_0, υ_0, ζ_0 in den Gleichungen (a), wodurch sich folgende Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \xi_1(\cos a_0\cos a_1 - \sin a_0\sin a_1\cos b_1)\\
&\quad -\upsilon_1(\cos a_0\sin a_1 + \sin a_0\cos a_1\cos b_1)\\
&\quad +\zeta_1\sin a_0\sin b_1,\\
y &= \xi_1[(\sin a_0\cos a_1 + \cos a_0\sin a_1\cos b_1)\cos b_0 - \sin a_1\sin b_1\sin b_0]\\
&\quad -\upsilon_1[(\sin a_0\sin a_1 - \cos a_0\cos a_1\cos b_1)\cos b_0 + \cos a_1\sin b_1\sin b_0]\\
&\quad -\zeta_1[\sin b_0\cos b_1 + \sin b_1\cos b_0\cos a_0],\\
z &= \xi_1[(\sin a_0\cos a_1 + \cos a_0\sin a_1\cos b_1)\sin b_0 + \sin a_1\sin b_1\cos b_0]\\
&\quad -\upsilon_1[(\sin a_0\sin a_1 - \cos a_0\cos a_1\cos b_1)\sin b_0 - \cos a_1\sin b_1\cos b_0]\\
&\quad +\zeta_1[\cos b_0\cos b_1 - \sin b_0\sin b_1\cos a_0].
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (a').$$

Hat man nun noch ein viertes Coordinatensystem X_3, Y_3, Z_3, wo derselbe Ursprung der Coordinaten ist, als in den vorhergehenden Systemen, und wo a_2 und b_2 für die Axen der X_3, Y_3 und X_2, Y_2 dieselben Bedeutungen haben als a_1 und b_1 für die Axen X_2, Y_2 und X_1, Y_1, oder als a_0 und b_0 für die Axen X_1, Y_1 und X_0, Y_0; sind ferner, analog mit der vorhergehenden Bezeichnungsart, ξ_2, υ_2, ζ_2, die Coordinaten desselben Punctes, auf dieses neue Coordinatensystem bezogen, so hat man zuerst folgende mit (a) analoge Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_2\cos a_2 - \upsilon_2\sin a_2,\\
\upsilon_1 &= \xi_2\sin a_2\cos b_2 + \upsilon_2\cos a_2\cos b_2 - \zeta_2\sin b_2,\\
\zeta_1 &= \xi_2\sin a_2\sin b_2 + \upsilon_2\cos a_2\sin b_2 + \zeta_2\sin b_2,
\end{aligned}$$

welche den Uebergang von dem Coordinatensysteme X_3, Y_3, Z_3 auf das X_2, Y_2, Z_2 ausdrücken. Eben so drücken folgende mit (a') analoge Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \xi_2(\cos a_1\cos a_2 - \sin a_1\sin a_2\cos b_2)\\
&\quad -\upsilon_2(\cos a_1\sin a_2 + \sin a_1\cos a_2\cos b_2)\\
&\quad +\zeta_2\sin a_1\sin b_2,\\
\upsilon_0 &= \xi_2[(\sin a_1\cos a_2 + \cos a_1\sin a_2\cos b_2)\cos b_1 - \sin a_2\sin b_2\sin b_1]\\
&\quad -\upsilon_2[(\sin a_1\sin a_2 - \cos a_1\cos a_2\cos b_2)\cos b_1 + \cos a_2\sin b_2\sin b_1]\\
&\quad -\zeta_2[\sin b_1\cos b_2 + \cos b_1\sin b_2\cos a_1]\\
\zeta_0 &= \xi_2[(\sin a_1\cos a_2 + \cos a_1\sin a_2\cos b_2)\sin b_1 + \sin a_2\sin b_2\cos b_1]\\
&\quad -\upsilon_2[(\sin a_1\sin a_2 - \cos a_1\cos a_2\cos b_2)\sin b_1 - \cos a_2\sin b_2\cos b_1]\\
&\quad +\zeta_2[\cos b_1\cos b_2 - \sin b_1\sin b_2\cos a_1]
\end{aligned}$$

den Uebergang von dem Coordinatensystem X_3, Y_3, Z_3 auf das X_1, Y_1, Z_1. Eliminirt man endlich aus den letzten drei Gleichungen und den Glei-

chungen des Systems (*a*) die Gröfsen ξ_0, υ_0, ζ_0, so erhält man für den Uebergang von dem Coordinatensystem X_3, Y_3, Z_3 auf das zuerst festgesetzte Coordinatensystem X_0, Y_0, Z_0 folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
x=&\xi_2[(\cos a_1\cos a_2-\sin a_1\sin a_2\cos b_2)\cos a_0-(\sin a_1\cos a_2+\cos a_1\sin a_2\cos b_2)\cos b_1\sin a_0\\
&\qquad+\sin a_2\sin b_2\sin b_1\sin a_0]\\
&-\upsilon_2[(\cos a_1\sin a_2+\sin a_1\cos a_2\cos b_2)\cos a_0-(\sin a_1\sin a_2-\cos a_1\cos a_2\cos b_2)\cos b_1\sin a_0\\
&\qquad-\cos a_2\sin b_2\sin b_1\sin a_0]\\
&+\zeta_2[(\sin b_1\cos b_2+\cos b_1\sin b_2\cos a_1)\sin a_0+\sin a_1\sin b_2\cos a_0],\\
y=&\xi_2[(\cos a_1\cos a_2-\sin a_1\sin a_2\cos b_2)\cos b_0\sin a_0-(\sin a_1\cos a_2+\cos a_1\sin a_2\cos b_2)\\
&\times(\sin b_1\sin b_0-\cos b_1\cos b_0\cos a_0)-(\sin b_0\cos b_1+\cos b_0\sin b_1\cos a_0)\sin a_2\sin b_2]\\
&-\upsilon_2[(\cos a_1\sin a_2+\cos a_2\sin a_1\cos b_2)\cos b_0\sin a_0-(\sin a_1\sin a_2-\cos a_1\cos a_2\cos b_2)\\
&\times(\sin b_1\sin b_0-\cos b_1\cos b_0\cos a_0)+(\sin b_0\cos b_1+\cos b_0\sin b_1\cos a_2)\cos a_2\sin b_2]\\
&+\zeta_2[\sin a_0\sin a_1\sin b_2\cos b_0-(\sin b_1\cos b_2+\cos b_1\sin b_2\cos a_1)\cos b_0\cos a_0\\
&\qquad-(\cos b_1\cos b_2-\sin b_1\sin b_2\cos a_1)\sin b_0],\\
z=&\xi_2[(\cos a_1\cos a_2-\sin a_1\sin a_2\cos b_2)\sin a_0\sin b_0+(\sin a_1\cos a_2+\cos a_1\sin a_2\cos b_2)\\
&\times(\sin b_1\cos b_0+\cos b_1\sin b_0\cos a_0)+(\cos b_0\cos b_1-\sin b_0\sin b_1\cos a_0)\sin a_2\sin b_2]\\
&-\upsilon_2[(\cos a_1\sin a_2+\sin a_1\cos a_2\cos b_2)\sin a_0\sin b_0+(\sin a_1\sin a_2-\cos a_1\cos a_2\cos b_2)\\
&\times(\sin b_1\cos b_0+\cos b_1\sin b_0\cos a_0)-(\cos b_0\cos b_1-\sin b_0\sin b_1\cos a_0)\cos a_2\sin b_2]\\
&+\zeta_2[\sin a_0\sin a_1\sin b_2\sin b_0-(\sin b_1\cos b_2+\cos b_1\sin b_2\cos a_1)\cos a_0\sin b_0\\
&\qquad+(\cos b_1\cos b_2-\sin b_1\sin b_2\cos a_1\cos b_0].
\end{aligned}\right\}\ldots(a'').$$

Wir haben bisher gezeigt, wie man von einem Coordinatensystem auf eine Reihe von auf einander folgenden Coordinatensystemen, wo immer ein jedes folgende Coordinatensystem auf eine ähnliche Art von seinem nächstvorangehenden abhängt, übergehen kann; man kann übrigens die Anzahl der auf einander folgenden Coordinatensysteme nach Belieben vermehren, und so wird es nach dem bis jetzt Vorgetragenen keine Schwierigkeit haben, aus den gegebenen Coordinaten irgend eines Punctes gegen ein Coordinatensystem die Coordinaten desselben Punctes gegen was immer für ein verlangtes System zu finden.

2.

In dem Vorhergehenden legten wir ein Coordinatensystem X_0, Y_0, Z_0 zu Grunde, und bestimmten gegen dieses die Lage eines zweiten Coordinatensystems X_1, Y_1, Z_1; dieses letztere ist dadurch hervorgegangen, dafs die Ebene der X_0Y_0 um die Axe der X_0, als um eine Drehungsaxe, einen Winkel b_0 beschrieben hat, wodurch sie die Ebene der X_1Y_1 wurde; die Durchschnittslinie der Ebenen X_1Y_1 und X_0Y_0 ist die Axe der X_0, und die Axe der X_0 beschrieb in der Ebene der X_1Y_1 um den Anfangspunct der Coordinaten, als um einen Drehungspunct, einen Winkel a_0. Man sieht also, dafs während dieser Axenverschiebung ir-

gend ein Punct m in der Axe der x einen Bogen a_0 beschrieben hat, während dafs ein Punct n der Axe der z einen Bogen b_0 zurückgelegt hat.

Der Winkel der Coordinatenebenen $X_0 Z_1$ und $Y_1 Z_1$ ist gleich dem Winkel der Coordinatenebenen $Y_0 Z_1$ und $Y_1 Z_1$ und gleich a_0; die Ebenen der $Y_0 Z_0$ und $Y_0 Z_1$ fallen aber zusammen, und so bilden demnach die Ebenen der $Y_0 Z_0$ und $Y_1 Z_1$ ebenfalls den Winkel a_0.

Bei der zweiten Transformation bewegt sich die Ebene der $X_1 Y_1$ nach derselben Richtung, um die Axe der X_1 als Drehungsaxe, um einen Winkel b_1, wodurch dann die Ebene der $X_1 Y_1$ in die Lage der Ebene der $X_2 Y_2$ fällt. Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen oder die Axe der X_1 bewegt sich ebenfalls nach derselben Richtung, wie in der ersten Transformation, in der Ebene der $X_2 Y_2$ um den Ursprung der Coordinaten um einen Winkel a_1. Betrachtet man nun zugleich die Bewegungen der beiden Puncte, die wir so eben durch m und n bezeichnet haben, während dieser zweiten Transformation, so sieht man, dafs m einen Bogen a_1, und n einen Bogen b_1 beschrieben hat. Die von dem Puncte m gebildeten Bogen gröfster Kreise irgend einer Kugel schliefsen einen Winkel b_1 ein, nach der gemachten Voraussetzung; und die beiden von dem Puncte n gebildeten Bogen gröfster Kreise b_0 und b_1 irgend einer andern Kugel schliefsen einen Winkel a_0 ein; denn nach dem Vorhergehenden bilden die Ebenen $Y_0 Z_0$ und $Y_1 Z_1$, in welche die Bogen b_0 und b_1 fallen, ebenfalls den Winkel a_0. Es läfst sich eben so leicht zeigen, dafs bei einer nochmaligen Transformation der Punct m den Bogen a_2 eines gröfsten Kreises beschreiben wird, wo die Bogen a_2 und a_1 den Winkel b_2 bilden, und der Punct n einen Bogen b_2 beschreibt, so dafs b_1 und b_2 einen Winkel a_1 bilden.

Fährt man fort mit dem Verschieben der Coordinatenaxen, so sieht man, dafs die Puncte m und n (falls die Distanzen von m sowohl als von n bis zu den Ursprungs-Coordinaten, während der ganzen Bewegung der Axen, constante Gröfsen sind), zwei sphärische Polygone beschrieben werden, wo die Seiten des einen gleich sind den analogen Winkeln des andern, und umgekehrt.

Setzt man das Verschieben der Coordinaten endlich so lange fort, bis dafs das ursprüngliche Coordinatensystem hergestellt wird, dann kommen die Puncte m und n ebenfalls in ihre anfängliche Lagen; sie be-

schreiben daher geschlossene sphärische Polygone von den so eben erwähnten Eigenschaften.

Da aber die Existenz dieser zwei Polygone von der Gröfse der Distanzen der Puncte m und n von dem Ursprunge der Coordinaten unabhängig ist, so werden auch diese zwei Polygone bestehen, wenn man die Distanzen gleich grofs annehmen wird; es finden daher die obigen zwei Polygone auch bei einer Kugel Statt.

Da aber die Winkel der Polygone, welche von den Puncten m und n beschrieben werden, alle nach derselben Richtung der Seiten zu nehmen sind, so sind diese Winkel als äufsere anzusehen. Nun ergänzen sich beständig die inneren und äufseren Winkel zu 180°, daher spricht sich die obige Eigenschaft auch folgendermafsen aus: Zu einem jeden, auf einer Kugel von gröfsten Kreisen gebildeten Polygon läfst sich noch ein zweites Polygon auf derselben Kugel auffinden, dafs eine Seite des einen Polygons, mehr einen correspondirenden innern Winkel des andern Polygons, sich zu zwei rechten Winkeln ergänzen, und umgekehrt.

Dieses zweite Polygon, welches nach dem Vorhergehenden von dem Puncte n gebildet wurde, wird, da der Punct n den variablen Pol für die variable Ebene der xy abgegeben hat, vorzugsweise Polarpolygon genannt.

3.

Wir wollen nun das bisher Vorgetragene auf die Auflösung der sphärischen Polygone anwenden.

In dem Mittelpuncte einer Kugel denken wir uns den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und auf der Oberfläche dieser Kugel befinde sich ein aus gröfsten Kreisen derselben gebildetes, aber noch nicht geschlossenes Polygon; das festgesetzte Coordinatensystem sei dasselbe, welches wir in No. 1. durch X_0, Y_0, Z_0 vorgestellt haben; die Ebene der $X_0 Y_0$ gehe durch einen der gröfsten Kreise des Polygons, welchen wir durch A bezeichnen wollen; die Axe der X_0 gehe durch den Durchschnittspunct der Seite A mit einer ihr nächst folgenden Seite des Polygons und durch den Mittelpunct der Kugel. Diese nächst folgende Seite, so wie alle auf dieselbe folgenden Seite des Polygons, werden wir, der Ordnung nach, durch

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad a_5,\quad a_6,\quad a_7,\quad \text{u. s. w.}$$

vorstellen, eben so werden die Gröfsen

$$b_0,\quad b_1,\quad b_2,\quad b_3,\quad b_4,\quad b_5,\quad b_6,\quad b_7,\quad \text{u. s. w.}$$

die Winkel vorstellen, welche der Ordnung nach:

A mit a_0, a_0 mit a_1; a_1 mit a_2, a_2 mit a_3, u. s. w.

bilden; alle diese Winkel sind nach derselben Richtung der Seiten zu nehmen.

Sind nun die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Seiten a_0 und a_1 gegen das festgesetzte Coordinatensystem x_0, y_0, z_0, so hat man, wenn r der Halbmesser der Kugel ist:

$$\begin{aligned} x_0 &= r\cos a_0, \\ y &= r\sin a_0\cos b_0, \\ z &= r\sin a_0\sin b_0. \end{aligned}$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Seiten a_1 und a_2 gegen dasselbe Coordinatensystem X_0, Y_0, Z_0 seien x_1, y_1, z_1. Um diese zu erhalten, denke man sich dieselbe Transformation mit unserem festgesetzten Coordinatensystem, wie wir No. 1. thaten, nemlich man denke sich die festgesetzte Ebene der X_0Y_0 um die Axe der X_0 als Drehungsaxe einen Winkel b_0 beschrieben, und in diese Lage der Ebene der X_0Y_0 verschieben wir die Axe der X_0 um den Winkel a_0, so wird man haben, wenn ξ_0, υ_0, ζ_0 die Coordinaten des verlangten Punctes gegen das so eben durch Transformation erhaltene Coordinatensystem bezeichnen:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= r\cos a_1, \\ \upsilon_0 &= r\sin a_1\cos b_1, \\ \zeta_0 &= r\sin a_1\sin b_1. \end{aligned}$$

Geht man nun auf das ursprüngliche Coordinatensystem zurück, und zwar mittelst der Gleichungen (α) aus No. 1., so wird man haben, da die dortigen Gröfsen a_0, b_0, a_1, b_1 gleichbedeutend mit den hier unter denselben Buchstaben vorgestellten Gröfsen sind, und eben so die Coordinaten ξ_0, υ_0, ζ_0 hier und dort gleichbedeutend sind, wenn man die dortigen Coordinaten x, y, z in x_1, y_1, z_1 verwandelt:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\,[\cos a_0\cos a_1 - \sin a_0\sin a_1\cos b_1] \\ y_1 &= r\,[(\sin a_0\cos a_1 + \cos a_0\sin a_1\cos b_1)\cos b_0 - \sin a_1\sin b_1\sin b_0] \\ z_1 &= r\,[(\sin a_0\cos a_1 + \cos a_0\sin a_1\cos b_1)\sin b_0 + \sin a_1\sin b_1\cos b_0] \end{aligned}\right\} \ldots (\alpha).$$

Für den Durchschnittspunct der Seiten a_2 und a_3 seien die Coordinaten gegen das erste festgesetzte Coordinatensystem X_0, Y_0, Z_0; x_2, y_2, z_2; so wird man die Werthe dieser Gröfsen erhalten, wenn man

eine zweifache Transformation der Coordinaten vornehmen wird, wie wir die zweite Transformation in No. 1. vorgenommen haben. Sind ξ_1, υ_1, ζ_1 die Coordinaten des besagten Durchschnittspunctes gegen das durch zweifache Transformation erhaltene Coordinatensystem, so hat man ebenfalls:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= r\cos a_2, \\ \upsilon_1 &= r\sin a_2\cos b_2, \\ \zeta_1 &= r\sin a_2\sin b_2. \end{aligned}$$

Setzt man in die Gleichungen (a') aus No. 1. an die Stelle von x, y, z die ihnen gleichbedeutenden Gröfsen x_2, y_2, z_2, so hat man, da ebenfalls die Gröfsen ξ_0, υ_0, ζ_0, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, von dort mit denen von hier gleichbedeutend sind:

$$\left.\begin{aligned} x_2 = r\{&(\cos a_1\cos a_2 - \sin a_1\sin a_2\cos b_2)\cos a_0 \\ &-(\sin a_1\cos a_2 + \cos a_1\sin a_2\cos b_2)\sin a_0\cos b_1 \\ &+\sin a_0\sin b_1\sin a_2\sin b_2, \\ y_2 = r\{&(\cos a_1\cos a_2 - \sin a_1\sin a_2\cos b_2)\sin a_0\cos b_0 \\ &-(\sin a_1\cos a_2 + \cos a_1\sin a_2\cos b_2)(\sin b_0\sin b_1 - \cos b_0\cos b_1\cos a_0) \\ &-(\sin b_0\cos b_1 + \cos b_0\sin b_1\cos a_0)\sin a_2\sin b_2, \\ z_2 = r\{&(\cos a_1\cos a_2 - \sin a_1\sin a_2\cos b_2)\sin a_0\sin b_0 \\ &+(\sin a_1\cos a_2 + \cos a_1\sin a_2\cos b_2)(\cos b_0\sin b_1 + \sin b_0\cos b_1\cos a_0) \\ &+(\cos b_0\cos b_1 - \sin b_0\sin b_1\cos a_0)\sin a_2\sin b_2, \end{aligned}\right\} \ldots (a').$$

Auf demselben Wege erhält man, wenn x_3, y_3, z_3 die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Seiten a_3 und a^4 gegen das zuerst festgesetzte Coordinatensystem X_0, Y_0, Z_0 sind:

$$\left.\begin{aligned} x_3 = r\{&(\cos a_2\cos a_3 - \sin a_2\sin a_3\cos b_3)(\cos a_0\cos a_1 - \sin a_0\sin a_1\cos b_1) \\ &-(\sin a_2\cos a_3 + \cos a_2\sin a_3\cos b_3) \\ &\qquad\times[\sin a_0\sin b_1\sin b_2 - (\sin a_1\cos a_0 + \cos a_1\sin a_0\cos b_1)\cos b_2] \\ &+\sin a_3\sin b_3[\sin a_1\sin b_2\cos a_0 + (\sin b_1\cos b_2 + \cos b_1\sin b_2\cos a_1)\sin a_0], \\ y_3 = r\{&(\sin a_2\cos a_3 - \sin a_2\sin a_3\cos b_3) \\ &\qquad\times[\sin a_0\cos a_1\cos b_0 - (\sin b_0\sin b_1 - \cos b_0\cos b_1\cos a_0)\sin a_1] \\ &-(\sin a_2\cos a_3 + \cos a_2\sin a_3\cos b_3)[\sin a_0\sin a_1\cos b_0\cos b_2 + \\ &\quad(\sin b_0\cos b_1 + \cos b_0\sin b_1\cos a_0)\sin b_2 + (\sin b_1\sin b_0 - \cos b_1\cos b_0\cos a_0)\cos a_1\cos b_2] \\ &+\sin a_3\sin b_3[\sin a_0\sin a_1\cos b_0\sin b_2 - (\cos b_1\cos b_2 - \sin b_1\sin b_2\cos a_1)\sin b_0 \\ &\qquad-(\sin b_1\cos b_2 + \cos b_1\sin b_2\cos a_1)\cos a_0\cos b_0], \\ z_3 = r\{&(\cos a_2\cos a_3 - \sin a_2\sin a_3\cos b_3) \\ &\qquad\times[\sin b_0\sin a_0\cos a_1 + (\sin b_1\cos b_0 + \cos b_1\sin b_0\cos a_0)\sin a_1] \\ &-(\sin a_2\cos a_3 + \cos a_2\sin a_3\cos b_3)[\sin a_0\sin a_1\sin b_0\cos b_2 - \\ &\quad(\cos b_0\cos b_1 - \sin b_0\sin b_1\cos a_0)\sin b_2 - (\cos b_0\sin b_1 + \sin b_0\cos b_1\cos a_0)\cos a_1\cos b_2] \\ &+\sin a_3\sin b_3[\sin a_0\sin a_1\sin b_0\sin b_2 + (\cos b_1\cos b_2 - \sin b_1\sin b_2\cos a_1)\cos b_0 \\ &\qquad-(\sin b_1\cos b_2 + \cos b_1\sin b_2\cos a_1)\cos a_0\sin b_0], \end{aligned}\right\} \ldots (a'').$$

Aus dem bisher Gezeigten ersieht man, wie die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Seiten a_4 und a_5 zu bestimmen sind; überhaupt ersieht man hieraus, wie man die Coordinaten des Durchschnittes je zweier Seiten des sphärischen Polygons gegen das erste festgesetzte Coordinatensystem X_0, Y_0, Z_0 zu bestimmen habe.

4.

Läfst man die Reihe der aufeinanderfolgenden Seiten des Polygons so weit fortgehen, bis eine der Seiten a_0, a_1, a_2, a_3, u. s. w., z. B. a_{n-1}, die in vorhergehender No. durch A bezeichnete Seite des Polygons trifft, so erhält man ein $(n+1)$seitiges geschlossenes sphärisches Polygon, in welchem wir die eben erwähnte Seite A durch a_n bezeichnen wollen.

Da nun der Durchschnittspunct der Seiten a_{n-1} und a_n in der festgesetzten Ebene der $X_0 Y_0$ erfolgt, so wird man, wenn die Coordinaten dieses Durchschnittspunctes durch x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1} bezeichnet werden, haben:

$$x_{n-1} = r\cos a_n,$$
$$y_{n-1} = r\sin a_n,$$
$$z_{n-1} = 0.$$

Da erst im geschlossenen dreiseitigen Polygon oder in dem sphärischen Dreiecke Relationen zwischen Seiten und Winkel sich denken lassen, so ist die Zahl 2 der geringste Werth von n. Es ergeben sich daher folgende Gleichungen:

$$x_1 = r\cos a_2, \quad y_1 = r\sin a_2, \quad z_1 = 0,$$

für den Fall, wo $n = 2$ ist, oder für das sphärische Dreieck.

Eben so:

$$x_2 = r\cos a_3, \quad y_2 = r\sin a_3, \quad z_2 = 0,$$
$$x_3 = r\cos a_3, \quad y_3 = r\sin a_3, \quad z_3 = 0,$$
$$x_4 = r\cos a_4, \quad y_4 = r\sin a_4, \quad z_4 = 0,$$

u. s. w.

für die sphärischen Vier-, Fünf-, Sechsecke u. s. w.

Durch Gleichsetzung der hier aufgestellten Werthe für x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, u. s. w. mit den Werthen derselben Gröfsen aus der vorhergehenden No. erhält man die Bedingungsgleichungen, welche zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks, Vierecks, Fünfecks u. s. w. Statt finden müssen, oder man erhält dadurch die Auflösung der sphärischen Polygone. Da nun ein jedes sphärische Polygon nur drei Bedingungsgleichungen zwischen seinen Seiten und Winkeln zuläfst, so

lassen

lassen sich immer drei Stücke eines jeden Polygons finden, wenn die übrigen Stücke desselben gegeben sind.

Wir wollen noch das bisher Gezeigte auf das sphärische Dreieck und Viereck anwenden.

I. Sphärisches Dreieck.

Aus der Gleichsetzung der Werthe von x_1, y_1, z_1; erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\cos a_2 = \cos a_0 \cos a_1 - \sin a_0 \sin a_1 \cos b_1,$$
$$\sin a_2 = (\sin a_0 \cos a_1 + \cos a_0 \sin a_1 \cos b_1) \cos b_0 - \sin a_1 \sin b_1 \sin b_0,$$
$$0 = (\sin a_0 \cos a_1 + \cos a_0 \sin a_1 \cos b_1) \sin b_0 + \sin a_1 \sin b_1 \cos b_0.$$

Berücksichtiget man, dafs in unserer vorhergehenden Untersuchung die Winkel b_0 und b_1 als äufsere Winkel angesehen wurden, die alle nach derselben Richtung der Seiten zu liegen kamen, so wird man, damit dieselben Buchstaben in der Folge für die inneren Winkel des Dreiecks gelten sollen, $180° - b_0$ und $180° - b_1$ statt b_0 und b_1 setzen müssen.

Die letzten drei Gleichungen gehen daher in folgende über:

$$\cos a_2 = \cos a_0 \cos a_1 + \sin a_0 \sin a_1 \cos b_1,$$
$$\sin a_2 = -(\sin a_0 \cos a_1 - \cos a_0 \sin a_1 \cos b_1) \cos b_0 - \sin a_1 \sin b_1 \sin b_0,$$
$$0 = -(\sin a_0 \cos a_1 - \cos a_0 \sin a_1 \cos b_1) \sin b_0 + \sin a_1 \sin b_1 \cos b_0.$$

Führt man die üblichere Bezeichnungsart für die Seiten und Winkel der Dreiecke ein, nemlich sind A, B, C die Winkel des Dreiecks und a, b, c die Seiten desselben, welche den Winkeln A, B, C gegenüberstehen, so hat man folgende Gleichungen:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\sin a = -(\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A) \cos B - \sin b \sin A \sin B,$$
$$0 = -(\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A) \sin B + \sin b \sin A \cos B.$$

Die zwei letzten Gleichungen geben durch Elimination des Ausdruckes:

$$\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A$$

folgende Gleichung:

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A,$$

welche Gleichung zeigt, dafs sich die Sinusse der Seiten in einem sphärischen Dreiecke, wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel verhalten.

Mittelst dieser hier aufgestellten Gleichungen kann man alle bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie deduciren.

Aus zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel kann man die dritte Seite durch folgende Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

finden. Dieser Ausdruck eignet sich aber nicht für die Rechnung mit Logarithmen. Beinahe in dem meisten Theil der erschienenen Lehrbücher, die von diesem Gegenstande ausschliefslich handeln, findet man, um diese Gleichung bequem mit Logarithmen rechnen zu können, Hülfswinkel eingeführt. Herr Gaufs führt bei mehreren Gelegenheiten, wo er auf solche Gleichungen kam, ebenfalls einen Hülfswinkel ein, der vor allen übrigen darum den Vorzug verdient, weil die Art, wie er auf diesen Hülfswinkel kam, sich bei mehreren zusammengesetzten Ausdrücken ebenfalls anwenden läfst, wie wir es weiter unten bei den sphärischen Vierecken zeigen werden. Dieser Hülfswinkel wird nemlich auf folgendem Wege gefunden. Man hat:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

oder:

$$\cos a = \sin b \cos A \left(\sin c + \cos c \frac{\operatorname{cotang} b}{\cos A}\right).$$

Ist nun Φ der Hülfswinkel, wo man hat:

$$\operatorname{tang} \Phi = \frac{\operatorname{cotang} b}{\cos A} \text{ oder } \cos \Phi = \sin \Phi \operatorname{tang} b \cos A,$$

so hat man:

$$\cos a = \frac{\cos b}{\sin \varphi} \sin(\Phi + c).$$

Also man sucht zuerst den Winkel Φ und dann die Seite a.

II. Sphärisches Viereck.

Setzt man hier ebenfalls die Werthe von x_2, y_2, z_2 aus No. 3. denen aus No. 4. gleich, so ergeben sich folgende drei Bedingungsgleichungen für das sphärische Viereck:

$$\begin{aligned}
\cos a_3 = {} & (\cos a_1 \cos a_2 - \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2) \cos a_0 - (\sin a_1 \cos a_2 + \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2) \sin a_0 \cos b_1 \\
& + \sin a_0 \sin b_1 \sin a_2 \sin b_2, \\
\sin a_3 = {} & (\cos a_1 \cos a_2 - \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2) \sin a_0 \cos b_0 - (\sin a_1 \cos a_2 + \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2) \\
& \times (\sin b_0 \sin b_1 - \cos b_0 \cos b_1 \cos a_0) - (\sin b_0 \cos b_1 + \cos b_0 \sin b_1 \cos a_0) \sin a_2 \sin b_2, \\
0 = {} & (\cos a_1 \cos a_2 - \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2) \sin a_0 \sin b_0 + (\sin a_1 \cos a_2 + \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2) \\
& \times (\cos b_0 \sin b_1 + \sin b_0 \cos b_1 \cos a_0) + (\cos b_0 \cos b_1 + \sin b_0 \sin b_1 \cos a_0) \sin a_2 \sin b_2.
\end{aligned}$$

Hier bedeuten ebenfalls b_0, b_1, b_2 äufsere Winkel, oder Winkel, welche nach derselben Richtung der Seiten des Vierecks zu liegen kommen. Führt man daher die inneren Winkel ein, und bezeichnet sie mit denselben Buchstaben b_0, b_1, b_2, so darf man in den letzten drei

Gleichungen überall $180°-b_0$, $180°-b_1$, $180°-b_2$ an die Stellen von b_0, b_1, b_2 setzen, wodurch dann folgende drei Gleichungen hervorgehen.

$$\left.\begin{aligned}
\cos a_3 &= (\cos a_1 \cos a_2 + \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2)\cos a_0 + (\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2)\sin a_0 \cos b_1 \\
&\quad + \sin a_0 \sin b_1 \sin a_2 \sin b_2 , \\
\sin a_3 &= -(\cos a_1 \cos a_2 + \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2)\sin a_0 \cos b_0 - (\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2) \\
&\quad \times (\sin b_0 \sin b_1 - \cos b_0 \cos b_1 \cos a_0) + (\sin b_0 \cos b_1 + \cos b_0 \sin b_1 \cos a_0)\sin a_2 \sin b_2 , \\
0 &= (\cos a_1 \cos a_2 + \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2)\sin a_0 \sin b_0 - (\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2) \\
&\quad \times (\cos b_0 \sin b_1 + \sin b_0 \cos b_1 \cos a_0) + (\cos b_0 \cos b_1 - \sin b_0 \sin b_1 \cos a_0)\sin a_2 \sin b_2 ,
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}).$$

In No. 2. haben wir noch gezeigt, dafs jedes sphärische Polygon auch ein Polarpolygon hat; daher gelten die letzten drei Gleichungen auch für das Polarviereck.

Es ergiebt sich daher auch folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\cos b_3 &= (\cos b_1 \cos b_2 - \sin b_1 \sin b_2 \cos a_1)\cos b_0 - (\sin b_1 \cos b_2 + \cos b_1 \sin b_2 \cos a_1)\sin b_0 \cos a_0 \\
&\quad + \sin b_0 \sin a_0 \sin b_2 \sin a_1 , \\
\sin b_3 &= -(\cos b_1 \cos b_2 - \sin b_1 \sin b_2 \cos a_1)\sin b_0 \cos a_3 + (\sin b_1 \cos b_2 + \cos b_1 \sin b_2 \cos a_1) \\
&\quad \times (\sin a_3 \sin a_0 + \cos a_0 \cos a_3 \cos b_0) - (\sin a_3 \cos a_0 - \cos a_3 \sin a_0 \cos b_0)\sin b_2 \sin a_1 , \\
0 &= (\cos b_1 \cos b_2 - \sin b_1 \sin b_2 \cos a_1)\sin b_0 \sin a_3 - (\sin b_1 \cos b_2 + \cos b_1 \sin b_2 \cos a_1) \\
&\quad \times (\cos a_3 \sin a_0 - \sin a_3 \cos a_0 \cos b_0) + (\cos a_3 \cos a_0 + \sin a_3 \sin a_0 \cos b_0)\sin b_2 \sin a_1 .
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}).$$

Mittelst dieser beiden Systeme von Gleichungen kann man jedes sphärische Viereck auflösen.

Die erste der Gleichungen des Systems (I) zeigt, wie man aus drei gegebenen Seiten und zwei von ihnen eingeschlossenen Winkeln die vierte Seite des sphärischen Vierecks finden kann. Eben so zeigt die erste Gleichung des Systems (II), wie man aus drei Winkeln und zwei Seiten, welche einen dieser Winkel einschliefsen, den vierten Winkel findet.

Multiplicirt man die erste der zwei letzten Gleichungen des Systems (I) mit $\sin b_0$, und die letzte dieser Gleichungen mit $\cos b_0$, so ergiebt sich durch Subtraction folgende Gleichung:

$$\sin a_3 \sin b_0 = (\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2)\sin b_1 - \sin a_2 \sin b_2 \cos b_1 \quad . \; . \; . \quad (A)$$

Multiplicirt man dieselben zwei Gleichungen, die erste mit $\cos b_0$ und die zweite mit $\sin b_0$, und addirt sie, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\sin a_3 \cos b_0 &= (\cos a_1 \cos a_2 + \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2)\sin a_0 - (\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2)\cos a_0 \cos b_1 \\
&\quad - \cos a_0 \sin a_2 \sin b_1 \sin b_2 .
\end{aligned}$$

Diese Gleichung mit $\sin a_0$, und die erste der drei Gleichungen des Systems (I) mit $\cos a_0$ multiplicirt, giebt durch Addition derselben

$$\cos a_0 \cos a_3 + \sin a_0 \sin a_3 \cos b_0 = \cos a_1 \cos a_2 + \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2 \quad . \; . \; . \quad (B).$$

Multiplicirt man hingegen die vorletzte Gleichung mit $\cos a_0$ und die erste Gleichung des Systems (I) mit $\sin a_0$, so ergiebt sich durch

Subtraction derselben folgende Gleichung:

$$\sin a_0 \cos a_3 - \cos a_0 \sin a_3 \cos b_0 = (\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2) \cos b_1 + \sin a_2 \sin b_2 \sin b_1 \ldots (C).$$

Mit Hülfe der Gleichungen des Systems (II), oder mit Berücksichtigung des Polarvierecks, ergeben sich auch folgende Gleichungen:

$$\cos b_3 \sin a_3 = -(\sin b_1 \cos b_2 + \cos b_1 \sin b_2 \cos a_1) \sin a_0 + \sin a_1 \sin b_2 \cos a_0 \quad \ldots \quad (A')$$

$$\sin b_0 \cos b_3 - \sin b_0 \sin b_3 \cos a_3 = \cos b_1 \cos b_2 - \sin b_1 \sin b_2 \cos a_1 \quad \ldots \quad (B')$$

$$\sin b_0 \cos b_3 + \cos b_0 \sin b_3 \cos a_3 = -(\sin b_1 \cos b_2 + \cos b_1 \sin b_2 \cos a_1) \cos a_0 - \sin a_1 \sin b_2 \sin a_0 \ldots (C').$$

Analoger Gleichungen wie (A), (A'), (C), (C') giebt es für jedes Viereck acht, und wie (B) und (B') nur zwei.

Wir haben beim Dreiecke, wo es sich darum handelte, aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, die dritte Seite zu finden, einer Methode, Hülfswinkel einzuführen, erwähnt, die auch bei sehr complicirten Ausdrücken anwendbar ist. Wir wollen daher die dort erwähnte Methode auf folgende Gleichung:

$$\cos a_3 = (\cos a_1 \cos a_2 + \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2) \cos a_0 + (\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2) \cos b_1 \sin a_0 + \sin a_0 \sin b_1 \sin a_2 \sin b_2$$

anwenden, welche Gleichung die erste des Systems (I) ist.

Es ist:

$$\cos a_1 \cos a_2 + \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2 = \sin a_2 \cos b_2 \left(\sin a_1 + \cos a_1 \frac{\operatorname{cotang} a_2}{\cos b_2}\right)$$

und

$$\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2 = -\sin a_2 \cos b_2 \left(\cos a_1 - \sin a_1 \frac{\operatorname{cotang} a_2}{\cos b_2}\right).$$

Führt man den Hülfswinkel A ein, so dafs man hat:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{cotang} a_2}{\cos b_2},$$

so gehen die letzten zwei Gleichungen in folgende über:

$$\cos a_1 \cos a_2 + \sin a_1 \sin a_2 \cos b_2 = \frac{\sin a_2 \cos b_2}{\cos A} \sin (A + a_1),$$

$$\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2 \cos b_2 = -\frac{\sin a_2 \cos b_2}{\cos A} \cos (A + a_1),$$

und es ist:

$$\cos a_3 = \frac{\sin a_2 \cos b_2}{\cos A} [\sin (A + a_1) \cos a_0 - \cos (A + a_1) \sin a_0 \cos b_1] + \sin a_0 \sin b_1 \sin a_2 \sin b_2.$$

Nun ist:

$$\sin (A + a_1) \cos a_0 - \cos (A + a_1) \sin a_0 \cos b_1$$

$$= -\sin a_0 \cos b_1 \left[\cos (A + a_1) - \sin (A + a_1) \frac{\operatorname{cotang} a_0}{\cos b_1}\right],$$

und den zweiten Hülfswinkel A' so gewählt, dafs man hat:

$$\operatorname{tang} A' = \frac{\operatorname{cotang} a_0}{\cos b_1},$$

so ist

$$\cos a_3 = \sin a_0 \sin a_2 \left[\sin b_1 \sin b_2 - \cos b_1 \cos b_2 \frac{\cos(A+A'+a_1)}{\cos A \cos A'}\right].$$

Führt man noch einen dritten Hülfswinkel A'' ein, so dafs

$$\operatorname{tang} A'' = \frac{\operatorname{tang} b_2 \cos A \cos A'}{\cos(A+A'+a_1)},$$

so hat man endlich

$$\cos a_3 = -\frac{\sin a_0 \sin a_2 \sin b_2}{\sin A''} \cos(A''+b_1).$$

Dieser Ausdruck ist geeignet zur Rechnung mit Logarithmen. Auf ganz ähnlichem Wege kann man die Gleichungen (A), (B), (C), (A'), (B') . . . zur Rechnung mit Logarithmen einrichten. Man sieht ferner, dafs man, um aus drei gegebenen Seiten und den beiden von ihnen eingeschlossenen Winkeln die vierte Seite eines sphärischen Vierecks zu finden, drei Hülfswinkel A, A', A'' berechnen mufs, und dann läfst sich die gesuchte Seite finden; wollte man hingegen das Viereck als aus zwei Dreiecken bestehend ansehen, so ist leicht zu sehen, dafs die Anzahl der Hülfsgröfsen wenigstens vier ist, und offenbar haben die noch so kleinen Fehler, die man bei Berechnung von den Hülfsgröfsen begeht, auf das gesuchte Endresultat Einfluſs. So gewähren daher die hier aufgestellten Gleichungen für das sphärische Viereck wenigstens den Vortheil, dafs man mit der geringsten Anzahl von Hülfsgröfsen auslangt.

Wenn man die Betrachtungen von No. 3. und No. 4. fortsetzt, kann man sehr leicht auch alle Gleichungen für jedes verlangte sphärische Polygon aufstellen, und nach dem gezeigten Verfahren alle die erhaltenen Gleichungen zur Rechnung mit Logarithmen einrichten.

3.
Ueber einige bestimmte Integrale.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

Wenn ein bestimmtes Integral (*intégrale définie*) eine unbestimmte constante Gröfse enthält, so kann man öfters durch Differentiation eine Differential-Gleichung finden, durch welche sich das bestimmte Integral als Function der constanten Gröfse bestimmen läfst. Diese Differential-Gleichung ist gewöhnlich lineär; ist sie also zugleich vom ersten Grade, so läfst sie sich, wie bekannt, integriren. Dieses ist zwar nicht im Allgemeinen der Fall, wenn die Gleichung vom zweiten oder einem höheren Grade ist, allein man kann doch oft aus diesen Gleichungen mehrere interessante Relationen zwischen den bestimmten Integralen finden. Dieses zu zeigen, ist die Absicht dieses Aufsatzes.

Es sei $\frac{d^2y}{da^2} + p \cdot \frac{dy}{da} + q \cdot y = 0$ eine lineäre Differential-Gleichung des zweiten Grades zwischen y und a, wo p und q zwei Functionen von a sind. Man nehme an, dafs man zwei particulaire Integrale dieser Gleichung kennt, nemlich $y = y_1$ und $y = y_2$, so ist:

$$\frac{d^2y_1}{da^2} + p\frac{dy_1}{da} + q \cdot y_1 = 0; \quad \frac{d^2y_2}{da^2} + p \cdot \frac{dy_2}{da} + q \cdot y_2 = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man, wenn man q eliminirt,

$$y_2 \cdot \frac{d^2y_1}{da^2} - y_1 \cdot \frac{d^2y_2}{da^2} = \frac{d\left(y_2 \cdot \frac{dy_1}{da} - y_1 \cdot \frac{dy_2}{da}\right) \cdot p}{da},$$

folglich durch Integration

$$0. \quad y_2 \cdot \frac{dy_1}{da} - y_1 \cdot \frac{dy_2}{da} = e^{-\int p\, da},$$

wo e die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-Systems ist.

Gesetzt, es wären nun die beiden Functionen y_1 und y_2 als bestimmte Integrale ausgedrückt, so dafs $y_1 = \int v\, dx$, $y_2 = \int u\, dx$, wo v und u Functionen von x und a sind, so giebt diese Relation zwischen y_1 und y_2, wenn man substituirt,

$$1. \quad \int u\, dx \cdot \int \left(\frac{dv}{da}\right) dx - \int v\, dx \cdot \int \left(\frac{du}{da}\right) dx = e^{-\int p\, da}.$$

Diese Gleichung drückt, wie man sieht, eine Relation zwischen den vier Integralen $\int u\,dx$, $\int v\,dx$, $\int\left(\frac{du}{da}\right)dx$, $\int\left(\frac{dv}{da}\right)dx$ aus. Es kommt nunmehr darauf an, solche Integrale zu finden, die einer Differentialgleichung vom zweiten Grade genug thun. Diese Eigenschaft haben mehrere Integrale, die wir der Reihe nach betrachten wollen.

I. Es sei $v=\frac{(x+a)^\gamma}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$ und $y=\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma+1}.\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$,

$$\frac{dy}{da}=(\gamma+1).\int_0^1\frac{(x+a)^\gamma\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}},\quad \frac{d^2y}{da^2}=\gamma(\gamma+1).\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma-1}.\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}},$$

wo das Zeichen $\int_0^1$ andeutet, dafs das Integral von $x=0$ bis $x=1$ genommen ist. Differentiirt man die Gröfse $(x+a)^{\gamma+1}.x^\alpha.(1-x)^\beta=r$, in Beziehung auf x, so erhält man

$$dr=dx\left(x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}(x+a)^{\gamma-1}\left(\gamma x(1-x)+\alpha(x+a)(1-x)-\beta(x+a)x\right)\right).$$

Da nun

$$\gamma x(1-x)+\alpha(x+a)(1-x)-\beta(x+a)x$$
$$=-\gamma(a^2+a)+\left(a(\beta+\gamma)+(a+1)(\alpha+\gamma)(x+a)-(\alpha+\beta+\gamma)(x+a)^2\right),$$

so erhält man durch Integration, zwischen den Grenzen $x=0$, $x=1$,

$$0=-\gamma(a^2+a).\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma-1}.\,dx}{x^{1-\alpha}.(1-x)^{1-\beta}}+\left((\beta+\gamma)\alpha+(\alpha+\gamma)(a+1)\right)\int_0^1\frac{(x+a)^\gamma\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$$
$$-(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma+1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}.$$

Aus dieser Gleichung findet man, wenn man mit $\frac{a^2+a}{\gamma+1}$ dividirt, und statt der Integrale ihre Werthe in y setzt,

$$2.\quad \frac{d^2y}{da^2}-\left(\frac{\alpha+\gamma}{a}+\frac{\beta+\gamma}{1+a}\right).\frac{dy}{da}+\frac{(\gamma+1)(\alpha+\beta+\gamma)}{a(a+1)}.y=0.$$

Setzt man statt α, β, γ der Reihe nach $1-\beta$, $1-\alpha$, $\alpha+\beta+\gamma-1$, so hat man die nemliche Gleichung, folglich sind

$$3.\quad y_1=\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma+1}.\,dx}{x^{1-\alpha}.(1-x)^{1-\beta}}\text{ und }y_2=\int_0^1\frac{(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma}.\,dx}{x^\beta(1-x)^\alpha}$$

zwei particulaire Integrale dieser Gleichung.

Da nun $p=-\frac{\alpha+\gamma}{a}-\frac{\beta+\gamma}{1+a}$, und folglich $e^{-\int p dx}=C.a^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}$, so giebt die Gleichung (1.)

$$4.\quad y_2.\frac{dy_1}{da}-y_1\frac{dy_2}{da}=C.a^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}.$$

Um die constante Gröfse C zu finden, setze man $a=\alpha$, so findet man leicht

$$C=(\alpha+\beta-1).\int dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.\int dx.x^{-\beta}.(1-x)^{-\alpha},$$

das heifst

$$C = \pi\{\cot(\alpha\pi) + \cot(\beta\pi)\}.$$

Folglich giebt die Gleichung:

$$5.\quad \begin{cases} (\alpha+\beta+\gamma)\int_0^1 \frac{dx\,(x+a)^{\gamma+1}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} \cdot \int_0^1 \frac{dx\,(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}} \\ -(\gamma+1)\cdot\int_0^1 \frac{dx\,(x+a)^{\gamma}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} \cdot \int_0^1 \frac{dx\,(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma}}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}} \\ = \pi\big(\cot(\alpha\pi) + \cot(\beta\pi)\big).a^{\alpha+\gamma}.(1+a)^{\beta+\gamma}. \end{cases}$$

Der Fall, wenn $\gamma = -\alpha-\beta$, verdient bemerkt zu werden. Es ist alsdann, wie leicht zu sehen:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{a^{\alpha}(1+a)^{\beta}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}.$$

Nun aber ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \text{wo } \Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1}e^{-x}.dx,$$

folglich

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}.(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \frac{1}{a^{\alpha}(1+a)^{\beta}}.$$

Setzt man z. $\beta = 1-\alpha$, so bekommt man

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\alpha}x^{1-\alpha}(x+a)} = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{1}{a^{\alpha}(1+a)^{1-\alpha}},$$

oder weil $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\alpha).\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+a)x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \cdot \frac{1}{a^{\alpha}(1+a)^{1-\alpha}}.$$

II. Es sei $y = \int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta}.(x+a)^{\gamma}}$. Durch Differentiation bekommt man

$$\frac{dy}{da} = -\gamma\int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma+1}},$$

$$\frac{d^2y}{da^2} = \gamma(\gamma+1).\int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma+2}}.$$

Differentiirt man die Function $x^{1-\alpha}.(1+x)^{1-\beta}.(x+a)^{-\gamma-1} = r$, so bekommt man

$$dr = \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma+2}}.\big((1-\alpha)(1+x)(x+a) + (1-\beta)x(x+a) - (\gamma+1)x(1+x)\big)$$

$$= \frac{x^{-\alpha}}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma+2}}.q,$$

das heifst, weil

$$q = \gamma(1-\alpha)a - \{(\alpha+\gamma)(1-\alpha) - (\gamma+\beta)a\}(x+a) + (1-\alpha-\beta-\gamma)(x+a)^2,$$

dr

$$dr = \gamma a(1-\alpha)\cdot\frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma+2}} - \{(\alpha+\gamma)(1-\alpha)-(\beta+\gamma)a\}\frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma+1}}$$
$$+ (1-\alpha-\beta-\gamma)\cdot\frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma}}.$$

Daraus erhält man durch Integration

$$6.\quad \frac{d^2y}{da^2} + \left\{\frac{\alpha+\gamma}{a} - \frac{\beta+\gamma}{1-a}\right\}\cdot\frac{dy}{da} + \frac{\gamma(1-\alpha-\beta-\gamma)}{a(1-a)}\cdot y = 0.$$

Setzt man statt α, β, γ der Reihe nach $1-\beta$, $1-\alpha$, $\gamma+\alpha+\beta-1$, so hat man die nemliche Gleichung, und folglich sind

$$y_1 = \int_0^{\infty}\frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma}} \text{ und } y_2 = \int_0^{\infty}\frac{x^{\beta-1}.dx}{(1+x)^{1-\alpha}.(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}$$

zwei particulaire Integrale derselben.

Da nun $p = \frac{\alpha+\gamma}{a} - \frac{\beta+\gamma}{1-a}$, und folglich $e^{-\int p da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}$, so hat man, vermöge der Gleichung (0),

$$y_2\cdot\frac{dy_1}{da} - y_1\cdot\frac{dy_2}{da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}.$$

Setzt man $a = 1$, so findet man $C = 0$, und folglich

$$y_2\cdot\frac{dy_1}{da} - y_1\cdot\frac{dy_2}{da} = 0,$$

das heifst

$$y_2 = C\cdot y_1,$$

wo C eine Constante ist. Um diese zu finden, setze man $a = 1$, so hat man

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = C\int_0^{\infty}\frac{x^{\beta-1}.dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}}.$$

Nun ist

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = \frac{\Gamma(1-\alpha).\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \text{ und}$$
$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\beta-1}.dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = \frac{\Gamma(\beta).\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}, \text{ folglich}$$
$$C = \frac{\Gamma(1-\alpha).\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\beta).\Gamma(\gamma)},$$

also giebt die Gleichung $y_2 = C.y_1$,

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma}} = \frac{\Gamma(1-\alpha).\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\beta).\Gamma(\gamma)}\int_0^{\infty}\frac{x^{\beta-1}.dx}{(1+x)^{1-\alpha}(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}.$$

Setzt man in der Gleichung (6) statt a, $1-a$, und statt α und β; β und α, so ändert sie die Form nicht. Daraus folgt, dafs

$$y_3 = \int_0^{\infty}\frac{x^{-\beta}.dx}{(1+x)^{\alpha}(x+1-a)^{\gamma}}$$

auch ein particulaires Integral der nemlichen Gleichung ist; folglich

hat man

$$y_3 \cdot \frac{dy_1}{da} - y_1 \cdot \frac{dy_3}{da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}.$$

Setzt man in den Ausdrücken für y_1, xa statt x, so bekommt man:

$$y_1 = a^{-\alpha-\gamma+1} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^\gamma (1+ax)^\beta}; \quad \frac{dy_1}{da} = -\gamma a^{-\alpha-\gamma} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^\beta}.$$

Eben so ist

$$y_3 = (1-a)^{-\beta-\gamma+1} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}.dx}{(1+x)^\gamma (1+(1-a)x)^\alpha};$$

$$\frac{dy_3}{da} = \gamma.(1-a)^{-\beta-\gamma} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}.dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+(1-a)x)^\alpha}.$$

Substituirt man diese Werthe, so bekommt man, wenn man mit $a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}$ multiplicirt:

$$7. \begin{cases} C = a \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^\gamma (1+ax)^\beta} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}.dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+(1-a)x)^\alpha} \\ + (1-a) \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}.dx}{(1+x)^\gamma (1+(1-a)x)^\alpha} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^\beta}. \end{cases}$$

Um C zu finden, setze man $a = 0$, so bekommt man

$$C = \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}.dx}{(1+x)^{\gamma+\alpha}} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\gamma+1}} = \frac{\Gamma(1-\alpha).\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma+1)} \cdot \Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1).$$

Setzt man z. B. $\beta = 1-\alpha$, so erhält man, wenn man erwägt, dafs $\Gamma(1-\alpha).\Gamma(\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$, $\Gamma(\gamma+1) = \gamma.\Gamma(\gamma)$:

$$\frac{\pi}{\gamma.\sin\alpha\pi} = a \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^\gamma (1+ax)^{1-\alpha}} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}.dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+(1-a)x)^\alpha}$$

$$+ (1-a) \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}.dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^{1-\alpha}} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}.dx}{(1+x)^\gamma (1+(1-a)x)^\alpha}.$$

Und wenn $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$:

$$2\pi = a \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{[x(1+x)(1+ax)]}} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{[x(1+x)^3(1+(1-a)x)]}}$$

$$+ (1-a) \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{[x(1+x).(1+(1-a)x)]}} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{[x(1+x)^3(1+ax)]}}.$$

Die Integrale rechter Hand lassen sich alle durch elliptische Functionen ausdrücken. Setzt man nemlich $x = (\text{tang}\,\varphi)^2$, so erhält man nach einigen leichten Transformationen

$$\frac{\pi}{2} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{[1-(1-a)\sin^2\varphi]}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi.\cos^2\varphi}{\sqrt{[1-a\sin^2\varphi]}}$$

$$+ (1-a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{[1-a\sin^2\varphi]}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi.\cos^2\varphi}{\sqrt{[1-(1-a)\sin^2\varphi]}},$$

das heifst, wenn man $a = c^2$, $b^2 = 1-c^2$ macht,

$$\frac{\pi}{2} = F^1(c).E^1(b) + F^1(b).E^1(c) - F^1(c).F^1(b),$$

wo, nach Legendre's Bezeichnung:

$$F^1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}, \quad E^1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Phi.\sqrt{(1-c^2\sin^2\Phi)}.$$

Die obige Formel findet man in Legendre's *Exercices de Calcul intégral, Tom. I., pag.* 61.

In der allgemeinen Formel (7.) lassen sich die Integrale durch andere ausdrücken, deren Grenzen 0 und 1 sind. Macht man nemlich $x = \frac{\gamma}{1-\gamma}$, so bekommt man

$$8.\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(1-\alpha).\Gamma(1-\beta).\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\gamma+1)} = a\displaystyle\int_0^1 \frac{d\gamma(1-\gamma)^{\alpha+\beta+\gamma-2}}{\gamma^\alpha(1-(1-a)\gamma)^\beta}.\int_0^1 \frac{d\gamma(1-\gamma)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\gamma^\beta(1-a\gamma)^\alpha} \\ \quad + (1-a).\displaystyle\int_0^1 \frac{d\gamma\,(1-\gamma)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\gamma^\alpha(1-(1-a)\gamma)^\beta}.\int_0^1 \frac{d\gamma\,(1-\gamma)^{\alpha+\beta+\gamma-2}}{\gamma^\beta(1-a\gamma)^\alpha}. \end{cases}$$

Wir sahen oben, dafs

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}.(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\frac{1}{a^\alpha(1+a)^\beta}.$$

Es läfst sich auf folgende Weise ein allgemeinerer Ausdruck finden, von welchem der gegenwärtige nur ein besonderer Fall ist. Differentiirt man das Integral

$$y = \int_0^x \frac{dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta+1}}$$

in Beziehung auf a, so erhält man

$$\frac{dy}{da} = -(\alpha+\beta).\int_0^x \frac{dx.x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}.$$

Daraus folgt, dafs

$$\frac{dy}{da} + \left(\frac{\alpha}{1+a} + \frac{\beta}{a}\right)y = -\frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{a(1+a)(x+a)^{\alpha+\beta}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $a^\beta(1+a)^\alpha.da$, so wird die Gröfse linker Hand zu einem vollständigen Differential, nemlich gleich $d(y\,a^\beta(1+a)^\alpha)$, und folglich erhält man, wenn man integrirt,

$$y\,a^\beta(1+a)^\alpha = C - x^\alpha(1-x)^\beta\int_0^a \frac{da.a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}.$$

Um C, welches eine Function von x sein kann, zu finden, wollen wir $a = \infty$ setzen. Man hat alsdann

$$y\,a^\beta(1+a)^\alpha = \int_0^x dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \text{ und folglich}$$

$$C = \int_0^x dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} + x^\alpha(1-x)^\beta\int_0^\infty \frac{da.a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}.$$

Setzt man $a = \frac{x+xy}{y-x}$, also $y = \frac{x+ax}{a+x}$, so findet man

$$\int_0^z \frac{da\,.\,a^{\beta-1}.(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}} = -x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\int_1^x dy\,.\,y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}$$

$$= x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\left\{-\int_0^x dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} + \int_0^1 dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\right\}.$$

Substituirt man diesen Werth, so hat man

$$C = \int_0^1 dx\,.\,x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\,.\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \text{ und folglich}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = a^{\alpha}(1+a)^{\beta}\int_0^x \frac{dx\,.\,x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}} + x^{\beta}(1-x)^{\alpha}.\int_0^a \frac{da\,.\,a^{\beta-1}.(1+a)^{\alpha-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}.$$

Ist z. B. $\alpha+\beta=1$, so ist

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \frac{a^{\alpha}}{(1+a)^{\alpha-1}}.\int_0^x \frac{dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}}{x+a} + \frac{(1-x)^{\alpha}}{x^{\alpha-1}}\int_0^a \frac{da\,.\,a^{-\alpha}(1+a)^{\alpha-1}}{x+a}.$$

Ist ferner $\alpha=\frac{1}{2}$, so erhält man

$$\pi = \sqrt{(a+a^2)}\int_0^x \frac{dx}{(x+a)\sqrt{(x-x^2)}} + \sqrt{(x-x^2)}.\int_0^a \frac{da}{(a+x)\sqrt{(a+a^2)}},$$

was auch richtig ist, denn

$$\int_0^x \frac{dx}{(x+a)\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(a+a^2)}}.\text{ arc. tang.}\sqrt{\left(\frac{x+xa}{a-ax}\right)},$$

$$\int_0^a \frac{da}{(a+x)\sqrt{(a+a^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(x+x^2)}}.\text{ arc. tang.}\sqrt{\left(\frac{a-ax}{x+xa}\right)}$$

und arc. tang. (z) + arc. tang. $\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi}{2}$.

III. Es sei

$$y = \int_0^1 e^{-ax}.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.dx, \text{ wo } \alpha>0,\ \beta>0.$$

Wenn man in Beziehung auf a differentiirt, so bekommt man:

$$\frac{dy}{da} = -\int_0^1 e^{-ax}.x^{\alpha}.(1-x)^{\beta-1}.dx,$$

$$\frac{d^2y}{da^2} = -\int_0^1 e^{-ax}.x^{\alpha+1}.(1-x)^{\beta-1}.dx.$$

Differentiirt man nun die Function $r = e^{-ax}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ in Beziehung auf x, so erhält man

$$dr = \alpha.e^{-ax}x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}dx - (\alpha+\beta+a).e^{-ax}.x^{\alpha}.(1-x)^{\beta-1}.dx$$
$$+ ae^{-ax}x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}.dx,$$

also, wenn man integrirt, von $x=0$ bis $x=1$, und für die Integrale ihre Werthe in y, $\frac{dy}{da}$, $\frac{d^2y}{da^2}$ substituirt:

$$\frac{d^2y}{da^2} + \left(\frac{\alpha+\beta}{a}+1\right).\frac{dy}{da} + \frac{\alpha}{a}.y = 0.$$

Dieser Gleichung kann man auch genug thun, wenn man

$$y = y_1 = \int_1^\infty e^{-ax} . x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} . dx$$

setzt, wo a positiv sein muſs. Da nun $\rho = \frac{\alpha+\beta}{a} + 1$, und folglich $e^{-\int p da} = \frac{C}{e^a a^{\alpha+\beta}}$, so giebt die Gleichung (0):

$$y_1 \cdot \frac{dy}{da} - y \cdot \frac{dy_1}{da} = \frac{C}{e^a a^{\alpha+\beta}}.$$

Setzt man in dem Ausdruck für y_1, $x+1$ statt x, so findet man

$$y_1 = e^{-a} \int_0^\infty e^{-ax} x^{\beta-1}(1+x)^{\alpha-1} . dx,$$

$$\frac{dy_1}{da} = -e^{-a} \int_0^\infty e^{-ax} . x^{\beta-1}(1+x)^{\alpha} . dx,$$

oder auch, wenn man hier $\frac{x}{a}$ statt x setzt:

$$y_1 = e^{-a} . a^{-\alpha-\beta+1} . \int_0^\infty e^{-x} . x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha-1} . dx,$$

$$\frac{dy_1}{da} = -e^{-a} . a^{-\alpha-\beta} . \int_0^\infty e^{-x} . x^{\beta-1} . (a+x)^{\alpha} . dx.$$

Substituirt man diese Werthe für y_1, $\frac{dy_1}{da}$, so wie auch diejenigen für y, $\frac{dy}{da}$, multiplicirt mit $e^a . a^{\alpha+\beta}$, und setzt $a = 0$, so findet man

$$C = -\int_0^\infty e^{-x} dx . x^{\beta+\alpha-1} . \int_0^1 dx . x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

das heifst

$$C = -\Gamma(\alpha+\beta) . \frac{\Gamma(\alpha) . \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = -\Gamma(\alpha) . \Gamma(\beta).$$

Es ist folglich

$$\Gamma(\alpha) . \Gamma(\beta) = \int_0^1 e^{-ax} dx . x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} . \int_0^\infty e^{-x} dx . x^{\beta-1}(a+a)^{\alpha}$$
$$- \int_0^1 e^{-ax} . dx . x^{\alpha} . (1-x)^{\beta-1} . \int_0^\infty e^{-x} . dx . x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha-1}.$$

Ist $\beta = 1-\alpha$, so hat man

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \int_0^1 \frac{dx}{x} . e^{-ax} . \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} . \int_0^\infty e^{-x} . dx . \left(1+\frac{a}{x}\right)^{\alpha}$$
$$- a \int_0^1 dx . e^{-ax} . \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} . \int_0^\infty \frac{dx}{x+a} . e^{-x} . \left(1+\frac{x}{a}\right)^{\alpha}.$$

IV. Es sei

$$y = \int_0^\infty e^{ax-x^2} . x^{a-1} . dx, \quad \text{wo } \alpha > 0.$$

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{dy}{da} = \int_0^\infty e^{ax-x^2} . x^{a} . dx, \quad \frac{d^2y}{da^2} = \int_0^\infty e^{ax-x^2} . x^{a+1} . dx.$$

Nun aber ist

$$d(e^{ax-x^2}.x^\alpha) = dx.e^{ax-x^2}.x^{\alpha-1}(a+ax-2x^2),$$

folglich, wenn man von $x=0$ bis $x=\infty$ integrirt, für die Integrale ihre Werthe in y, $\frac{dy}{da}$, $\frac{d^2y}{da^2}$ setzt, und mit -2 dividirt:

$$\frac{d^2y}{da^2} - \tfrac{1}{2}a.\frac{dy}{da} - \tfrac{1}{2}a.y = 0.$$

Diese Gleichung behält dieselbe Form, wenn man $-a$ statt a setzt, und folglich ist

$$y = y_1 = \int e^{-ax-x^2}.x^{\alpha-1}.dx$$

ein particulaires Integral dieser Gleichung. Da $p = -\frac{1}{2}a$, so ist $e^{\int p da} = C.e^{\frac{a^2}{4}}$, und folglich

$$y_1.\frac{dy}{da} - y.\frac{dy_1}{da} = C.e^{\frac{a^2}{4}}.$$

Setzt man, um die constante Gröfse C zu finden, $a=0$, so hat man

$$y_1 = \int_0^\infty e^{-x^2}.x^{\alpha-1}.dx = \tfrac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\frac{dy}{da} = \int_0^\infty e^{-x^2}.x^\alpha.dx = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

$$\frac{dy_1}{da} = \int_0^\infty e^{-x^2}.x^\alpha.dx = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

und also, wenn man substituirt:

$$C = \tfrac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).e^{\frac{a^2}{4}} = \int_0^\infty e^{ax-x^2}.dx.x^{\alpha-1}.\int_0^\infty e^{-ax-x^2}.dx.x^\alpha + \int_0^\infty e^{ax-x^2}.dx.x^\alpha.\int_0^\infty e^{-ax-x^2}.dx.x^{\alpha-1}.$$

Setzt man $a\sqrt{-1}$ statt a, so bekommt man folgende Formel:

$$\tfrac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).e^{-\frac{a^2}{4}} = \int_0^\infty dx.e^{-x^2}(\cos ax).x^{\alpha-1}.\int_0^\infty dx.e^{-x^2}(\cos ax).x^\alpha + \int_0^\infty dx.e^{-x^2}(\sin ax)\,x^{\alpha-1}.\int_0^\infty dx.e^{-x^2}(\sin ax).x^\alpha.$$

Anmerkung. Die constante Gröfsen (Exponenten), welche in den, in dieser Abhandlung befindlichen Integralen vorkommen, müssen solche Werthe haben, dafs die Integrale nicht unendlich grofs sind. Diese Werthe findet man leicht.

4.

Remarques sur les séries infinies et leur convergence.

(Par M. *Louis Olivier.*)

1.

Les séries infinies peuvent servir à exprimer par leur forme les propriétés des fonctions, qu'elles représentent et à calculer par approximation les valeurs numériques de ces fonctions. Elles peuvent faire le premier, sans le second. Mais si les séries doivent être appliquées au calcul au lieu des expressions finies, qu'elles représentent, en énoncant seulement leurs premiers termes et la loi de la progression de ces termes, elles doivent être nécessairement telles, qu'après avoir calculé un certain nombre de termes, en commencant par le premier, on y ajoute un nouveau terme ou un des groupes de termes, qui conservent le même signe, on trouve toujours par la plus exactement la vraie valeur numérique de la série totale. Car si au contraire, en ajoutant le nouveau terme, ou groupe, on s'éloignoit de la vraie valeur de la série, tantôt en plus tantôt en moins, la valeur du reste de la série continueroit d'être incertaine, et la somme de termes, qu'on auroit prise, ne pourroit être nullement posée au lieu de la somme totale de la série, lors même, qu'on ne désireroit qu'une certaine approximation.

2.

On appelle convergente une série, qui a les deux propriétés suivantes, savoir: qu'on trouve sa valeur numérique d'autant plus exactement, qu'on calcule successivement plusieurs termes, et qu'en continuant indéfiniment ce calcul, on peut se rapprocher de la vraie valeur de la série totale à tel degré qu'on voudra.

Au contraire, on appelle indéterminée une série, qui ne donne aucun rapprochement, en continuant le calcul des termes.

Et on appelle divergente une série, dont les termes suivants, ajoutés aux précédents, ne donnent que des résultats, qui s'éloignent de plus en plus de la vraie valeur de la série.

Par exemple

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$. est une série convergente,

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$. est une série indéterminée, et

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots$. est une série divergente.

Toute série, qui, étant exprimée seulement par ses premiers termes et par la loi des termes, doit pouvoir être introduite dans le calcul au lieu de l'expression finie, dont elle représente la valeur, doit être nécessairement convergente (1.).

3.

Si a_1, a_2, a_3, ... a_n, a_{n+1} représentent les termes d'une suite infinie, et s la somme de la série, cette somme peut être exprimée par

$$1. \quad s = a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots\ldots + a_n + R,$$

en supposant, qu'on ait calculé les n premiers termes, et que R signifie la somme des termes ultérieurs, c'est-à-dire, le reste de la série, qui n'avoit pas été calculé.

Cela posé, si n est un nombre indéfini, qui peut être aussi grand, qu'on voudra, la somme des n premiers termes pourra approcher aussi près, qu'on voudra, de la somme totale de la série, toutes les fois, que cette série est convergente. Elle en différera d'autant moins, que n sera plus grand. Donc il faut nécessairement, que R diminue, si n augmente. Mais cela ne se peut pas, à moins que les termes de la suite, ou les groupes de termes, qui conservent le même signe, ne diminuent eux mêmes, au moins à partir d'une certaine limite; car s'ils augmentoient, R en feroit nécessairement autant. Pour $n = \infty$, R sera nécessairement zéro. Donc, les deux conditions de la convergence des séries sont celles qui suivent:

1) Les termes de la série ou les groupes des termes, qui conservent le même signe, doivent diminuer constamment; au moins à partir d'une certaine limite.

2) La somme des termes, qui suivent le n^{me} terme, c'est-à-dire R, doit être zéro pour $n = \infty$.

Si une série est indéterminée, les termes ou les groupes de termes, qui ont les mêmes signes, ne diminuent pas nécessairement, et R n'est pas toujours $= 0$ pour $n = \infty$. Dans les séries divergentes, les termes ou les groupes de termes, ne diminuent pas non plus dans tous les cas, et R pourra être même $= \infty$ pour $n = \infty$. Les n premiers termes

mes seront peut-être aussi $= \infty$ pour $n = \infty$. Dans ce dernier cas la somme de la suite pourra être la différence entre deux quantités infinies, et cette différence pourra être tantôt infinie, tantôt une quantité finie.

4.

Puisque les séries, destinées à être introduites dans le calcul à la place d'expressions finies, doivent être toujours convergentes, il s'agit surtout de cette sorte de suites. Et si l'on veut fonder quelque analyse sur des séries données, il sera nécessaire de s'assurer, qu'elles sont convergentes. Car, dans le cas contraire, les conclusions qu'on auroit formées, seroient incertaines. C'est ce qu'on néglige souvent, et cela peut devenir une source d'erreurs. Par exemple, en employant la méthode de coëfficiens indéterminés, et étant donné l'équation

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots\ldots$$

pour toutes les valeurs possibles de x, zéro y compris, on en tire ordinairement $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ etc., parcequ'on suppose, que $bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots$ et $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots\ldots$; $cx + dx^2 \ldots\ldots$ et $\gamma x + \delta x^2 \ldots\ldots$ etc. seront nuls en même tems, pour $x = 0$. Mais cela ne'st vrai sans exception, que dans le cas de series convergentes; car si les coëfficiens a, b, c, ..., α, β, γ, ... étoient tels, que les termes qui suivent le n^{me} terme, n étant ∞, ou seulement leur somme ne fussent pas nuls pour $x = 0$, la supposition formée d'avance, et les conclusions qu'on en aura tirées, n'auroient pas lieu.

Donc, avant de calculer par des séries, il faut voir toujours si elles satisfont aux conditions ci dessus de la convergence.

5.

Il est facile de voir, si une suite donnée satisfait à la première condition de la convergence, savoir à celle du décroissement continu des termes, à partir d'une certaine limite. Cette condition sera remplie, si le quotient d'un terme quelconque par celui qui le précède, ou le quotient d'un groupe de termes par celui du même signe qui le précède, est toujours moindre que l'unité; jusqu'à la limite.

La deuxième condition de la convergence, savoir, que le reste de la serie, à partir du n^{me} terme, doit être zéro pour $n = \infty$, sera remplie, si, la première condition l'étant deja, le produit du n^{me} terme ou du n^{me} groupe de termes par n, est égal à zéro. Car si d'après l'hypothèse, les termes ou les groupes de termes diminuent constamment, le

produit du n^{me} terme ou du n^{me} groupe de termes par n, ne peut pas être moindre que le reste R de la série: donc, si ce produit est nul, le reste R le sera à plus forte raison. De même, d'un autre coté, R ne peut pas être nul, pour $n = \infty$, si le produit du n^{me} terme ou du n^{me} groupe de termes par n est une quantité finie. Car puisqu'on suppose, que les termes, ou les groupes de termes de la série diminuent constamment jusqu'a zéro, R, ou la somme des n termes qui suivent le n^{me} terme, sera nécessairement plus grand que le produit du $2n^{me}$ terme par n. En général, R est compris entre les limites $n.a_n$ et $n.a_{2n}$, si a_n et a_{2n} représentent les n^{mes} et $2n^{mes}$ termes, ou les n^{mes} et $2n^{mes}$ groupes de termes du même signe. Mais a_{2n} ne peut pas être nul pour $n = \infty$ si a_n ne l'est pas, puisque n et $2n$ sont infinis en même tems, donc R ne peut pas être nul, si $n.a_n$ ne l'est pas.

D'ailleurs la deuxième condition de la convergence d'une série, dont le n^{me} terme ou le n^{me} groupe de termes du même signe est a_n, savoir, que le produit $n.a_n$ doit nécessairement être nul pour $n = \infty$, renferme implicitement la première condition du décroissement successif des termes; car si a_n n'étoit pas nul, le produit $n.a_n$ pourroit l'être encore moins pour $n = \infty$.

Donc si l'on trouve, que dans une série infinie, le produit du n^{me} terme, ou du n^{me} des groupes de termes qui conservent le même signe, par n, est zéro, pour $n = \infty$, on peut regarder cette seule circonstance comme une marque, que la série est convergente; et réciproquement, la série ne peut pas être convergente, si le produit $n.a_n$ n'est pas nul pour $n = \infty$.

Nous allons appliquer ce criterium de la convergence des séries infinies à quelques exemples.

6.

Exemples.

I. Dans la série

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \ldots\ldots + \frac{1}{n} + R.$$

le n^{me} terme a_n est $\frac{1}{n}$. Donc $n.a_n = 1$ n'est pas 0. Donc la série n'est pas convergente.

II. Dans la série

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + R,$$

ou n est un nombre impair quelconque, le n^{me} des groupes de termes, qui conservent le même signe, est $a_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n(2n-1)}$. Donc $n.a_n = \frac{1}{2(2n-1)}$. Ce produit est zéro pour $n = \infty$. Donc la série est convergente.

III. Dans la série

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \ldots\ldots + \frac{1}{n^p} + R,$$

le produit $n.a_n$ est égal à $\frac{1}{n^{p-1}}$. Cette quantité est nulle pour $n = \infty$, si $p > 1$. Donc la série est convergente, si $p > 1$.

IV. Dans la série

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} \ldots\ldots + \frac{1}{m^p} - \frac{1}{(m+1)^p} + R,$$

où m est un nombre impair quelconque, le m^{me} groupe de termes est

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} = \frac{(2n)^p - (2n-1)^p}{(2n(2n-1))^p} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^p}{(2n-1)^p} = \frac{\frac{p}{2n} - \frac{p.p-1}{2(2n)^2} \ldots\ldots}{(2n-1)^p},$$

donc

$$n.a_n = \frac{\frac{1}{2}p - \frac{p.p-1}{8n} + \frac{p.p-1.p-2}{2.3.4.n^2} \ldots\ldots}{(2n-1)^p}.$$

Le numérateur de cette fraction est $\frac{1}{2}p$ pour $n = \infty$, le dénominateur est infini pour $p > 0$. Donc $n.a_n = 0$ pour $n = \infty$, si $p > 0$. Donc la série est toujours convergente, si $p > 0$.

V. Soit donnée la suite infinie

$$\frac{a+b}{\alpha+\beta} + \frac{a+2b}{\alpha+2\beta} + \frac{a+3b}{\alpha+3\beta} \ldots\ldots + \frac{a+nb}{\alpha+n\beta} + R,$$

le n^{me} terme, multiplié par n, donne $n.\frac{a+nb}{\alpha+n\beta} = \frac{a+nb}{\frac{\alpha}{n}+\beta}$. Cette quantité est infinie, si b n'est pas nul. Donc la série donnée n'est pas convergente.

VI. Dans la série

$$\frac{1}{c(c+k)(c+2k)\ldots\ldots(c+mk)} + \frac{1}{(c+k)(c+2k)\ldots\ldots(c+(m+1)k)} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{1}{(c+(n-1)k)(c+nk)\ldots\ldots(c+(m+n-1)k)} + R,$$

qui exprime les sommes des nombres figurés réciproques, on trouve

$$n.a_n = \frac{1}{(c+(n-1)k)\left(\frac{c}{n}+k\right)(c+(n+1)k).....(c+(m+n-1)k)}.$$

Cette quantité est zéro, si $n=\infty$ pour un k quelconque, toutes les fois que $c>0$ et $m>0$. Donc la série est convergente sous les mêmes conditions.

VII. La série infinie

$$c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3}+\frac{c^4}{4}.....\frac{c^n}{n}+R,$$

qui exprime le logarithme hyperbolique de $\frac{1}{1-c}$, donne $n.a_n=c^n$, et cette quantité n'est pas nulle pour $n=\infty$, à moins que $c<1$. Donc la série logarithmique n'est convergente que pour $c<1$.

VIII. La série infinie

$$c-\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3}-\frac{c^4}{4}.....+\frac{c^m}{m}-\frac{c^{m+1}}{m+1}+R,$$

qui exprime le logarithme hyperbolique de $1+c$, m étant un nombre impair quelconque, donne

$$n.a_n = n\left(\frac{c^{2n-1}}{2n-1}-\frac{c^{2n}}{2n}\right) = \frac{c^{2n-1}}{2-\frac{1}{n}}-\frac{c^{2n}}{2} = c^{2n-1}\left(\frac{1}{2-\frac{1}{n}}-\frac{c}{2}\right)$$

$$= \frac{c^{2n-1}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)}\left(2(1-c)+\frac{c}{n}\right).$$

Donc le produit $n.a_n$ est zéro pour $n=\infty$, si $c<1$, et il est infiniment grand si $c>1$. Si $c=1$, on trouve

$$n.a_n = \frac{c^{2n-1}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)}.\frac{c}{n} = \frac{1}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)}.\frac{c^{2n}}{n},$$

et cette quantité est égale à $c^{2n}\log c$ pour $n=\infty$ (voyez le mémoire numero 28. page 309., 4me cahier du tome précédent de ce journal), donc elle est égale à zéro, pour $c=1$. Si c est négatif, la série (VIII.) rentre dans celle (VII.); donc $n.a_n$ n'est nul pour $n=\infty$, que si $c>-1$. Donc la série, qui exprime log. hyp. $(1+c)$, n'est convergente, que depuis $c=-1$ jusqu'à $c=+1$.

IX. Pour juger de la convergence des séries dont les termes contiennent des factorielles, par exemple de la série du binome

$$(1+c)^m = 1+mc+\frac{m.m-1}{1.2}c^2.....+\frac{m.m-1.....(m-n+2)}{1.2.3.....n-1}c^{n-1}+R,$$

il faut recourir à quelques théorèmes de la théorie des factorielles.

Soit représentée la factorielle

1. $a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+(p-1)b)$ par $a^{p,b}$,

on a

2. $a^{p+k,b} = a^{p,b}(a+pb)^{k,b}$ et de là

3. $(a+pb)^{k,b} = \frac{a^{p+k,b}}{a^{p,b}}$.

D'un autre coté on a

4. $a^{p,b} = 1^{p,\frac{b}{a}}a^p$,

et cela donne $a^{p+k,b} = 1^{p+k,\frac{b}{a}}.a^{p+k}$, donc, en vertu de (3.),

5. $(a+pb)^{k,b} = \frac{1^{p+k,\frac{b}{a}}}{1^{p,\frac{b}{a}}}.a^k$.

Cela donne pour $a=b$

6. $((1+p)b)^{k,b} = \frac{1^{p+k,1}}{1^{p,1}}b^k$,

et en faisant $(1+p)b=\lambda$, ou bien $p=\frac{\lambda}{b}-1$,

7. $\lambda^{k,b} = \frac{1^{\frac{\lambda}{b}-1+k,1}}{1^{\frac{\lambda}{b}-1,1}}.b^k$,

et si l'on écrit a au lieu de λ, et p au lieu de k,

8. $a^{p,b} = \frac{1^{\frac{a}{b}+p-1,1}}{1^{\frac{a}{b}-1,1}}.b^p$.

L'équation (2.) donne aussi

9. $1^{\frac{a}{b}+p-1,1} = 1^{p,1}.(1+p)^{\frac{a}{b}-1,1}$,

donc on a suivant (4.)

10. $1^{\frac{a}{b}+p-1,1} = 1^{p,1}\left(\frac{1}{p}+1\right)^{\frac{a}{b}-1,\frac{1}{p}}.p^{\frac{a}{b}-1}$,

et en vertu de (8.)

11. $a^{p,b} = \frac{1^{p,1}\left(\frac{1}{p}+1\right)^{\frac{a}{b}-1,\frac{1}{p}}.p^{\frac{a}{b}-1}.b^p}{1^{\frac{a}{b}-1,1}}$.

De là on tire l'expression suivante du quotient de deux factorielles:

12. $\frac{a^{p,b}}{\lambda^{q,b}} = \frac{1^{p,1}}{1^{q,1}}.\frac{\left(\frac{1}{p}+1\right)^{\frac{a}{b}-1,\frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{q}+1\right)^{\frac{\lambda}{\beta}-1,\frac{1}{q}}}.\frac{p^{\frac{a}{b}-1}}{q^{\frac{\lambda}{\beta}-1}}.\frac{b^p}{\beta^q}.\frac{1^{\frac{\lambda}{\beta}-1,1}}{1^{\frac{a}{b}-1,1}}$.

En appliquant cette expression à la série, qui représente la valeur de $(1+c)^m$, on trouve ce qui suit:

On a

$$13.\quad (1+c)^m - 1 = mc + \frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}c^2 \ldots\ldots + \frac{m\,.\,m-1\ldots\ldots(m-(n-1))}{1\,.\,2\ldots\ldots n}c^n + R,$$

et le n^{me} terme de cette série est

$$14.\quad a_n = \frac{m^{n,-1}}{1^{n,+1}}\,.\,c^n.$$

En comparant cette équation à celle (12.), on a

$$a = m,\quad p = n,\quad b = -1,$$
$$\lambda = 1,\quad q = n,\quad \beta = +1,$$

donc, en vertu de (12.):

$$15.\quad a_n = \frac{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{-m-1,\frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{1,\frac{1}{n}}}\,.\,(-1)^n.\frac{1^{0,1}}{1^{-m-1,1}}.n^{-m-1}.c^n.$$

Mais de l'équation (2.) on tire

$$16.\quad 1^{0,1} = 1^{-m-1,1}.(1-m-1)^{m+1,1},$$

donc, puisque $1^{0,1} = 1$,

$$17.\quad 1^{-m-1,1} = \frac{1}{(-m)^{m+1,1}},$$

et en vertu de (15.)

$$18.\quad a_n = \frac{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{-m-1,\frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{1,\frac{1}{n}}}\cdot\frac{(-1)^n}{n^{m+1}}\,.(-m)^{m+1,1}.c^n.$$

C'est là l'expression du n^{me} terme de la série du binome (13.), à l'aide des factorielles.

Si l'on fait $n = \infty$, on trouve

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^{-m-1,\frac{1}{n}} = 1^{-m-1,0} = 1^{-m-1} = 1 \text{ et}$$

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^{1,\frac{1}{n}} = 1^{1,0} = 1,$$

donc (18.)

$$19.\quad a_n = \frac{(-m)^{m+1,1}.(-1)^n}{n^{m+1}}.c^n.$$

Cela fait voir, que le n^{me} coëfficient de la série du binome, n étant ∞, est zéro toutes les fois, que $m > -1$.

Si $m = -1$, le coëfficient est $= (-1)^n$, et si $m < -1$, le coëfficient est infiniment grand.

En multipliant le coëfficient de c^n (19.) par n, on trouve

$$20. \quad \frac{(-m)^{m+1,1}(-1)^n}{n^m}.$$

Ce produit est zéro, pour $n=\infty$, si $m>0$. Si $m=0$, il est $=-m.(-1)^n=0$, et si $m<0$, il est infiniment grand. Le n^{me} terme lui-même, pris n fois, donne (19.)

$$21. \quad n.a_n = \frac{(-m)^{m+1,1}.(-1)^n}{n^m}.c^n = \pm(-m)^{m+1,1}.\frac{c^n}{n^m}.$$

Dans cette expression le facteur $(-m)^{m+1,1}$ est toujours une quantité finie, quand m l'est. Donc il ne s'agit que de la fraction $\frac{c^n}{n^m}$.

Si $c=1$ et m positif, cette fraction est zéro pour $n=\infty$.

Si $c=1$ et m négatif, la fraction est ∞ pour $n=\infty$.

Si $c<1$ et m positif ou nul, la fraction est zéro pour $n=\infty$.

Si $c<1$, par exemple $c=\frac{1}{\gamma}$, γ étant >1, et m négatif, $=-\mu$, où $\mu>0$, la fraction est égale à

$$\frac{n^\mu}{\gamma^n}.$$

On trouve la valeur de cette fraction suivant le mémoire numéro 28. de ce recueil, en différentiant, suivant n, le numérateur et le dénominateur, par exemple ν fois, où $\nu>\mu$. Cela donne

$$22. \quad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2).....(\mu-(\nu-1))n^{\mu-\nu}}{\gamma^n(\log\gamma)^\nu} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2).....(\mu-(\nu-1))}{\gamma^n(\log\gamma)^\nu n^{\nu-\mu}},$$

et cette quantité est zéro pour $n=\infty$, si ν et μ sont finis.

Donc le n^{me} terme de la série (13.) pris n fois, c'est-à-dire, na_n (21.), est toujours zéro pour $n=\infty$, m étant un nombre quelconque, si c est moindre que l'unité.

Si $c>1$ et m négatif ou nul, la fraction $\frac{c^n}{n^m}$ est infiniment grande.

Si $c>1$ et m positif, la valeur de la fraction $\frac{c^n}{n^m}$ est, en vertu du mémoire No. 28.

$$23. \quad \frac{c^n(\log c)^\mu}{m(m-1).....(m-(\mu-1))n^{m-\mu}},$$

μ étant $>m$, et cette valeur est ∞ pour $n=\infty$.

Donc, si $n=\infty$, le n^{me} terme de la série (13.), pris n fois, c'est-à-dire, $n.a_n$ (21.), est toujours ∞ pour une valeur quelconque de m, si $c>1$.

En nous résumant, nous venons de trouver, que pour $n=\infty$,

$$24.\quad \begin{cases} n.a_n \text{ est toujours } = 0, \text{ si } c < 1, \\ n.a_n \text{ est toujours } = \infty, \text{ si } c > 1, \\ n.a_n \text{ est } = 0, \text{ si } c = 1 \text{ et } m \text{ positif}, \\ n.a_n \text{ est } = \infty, \text{ si } c = 1 \text{ et } m \text{ négatif}. \end{cases}$$

Cela posé, on sait que les termes de la série du binome

$$25.\quad (1+c)^m = 1 + mc + \frac{m.m-1}{1.2}c^2 \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-(n-1))}{1.2.3\ \ldots\ldots\ n}c^n + R$$

sont toujours alternativement positifs et négatifs (au moins à partir d'une certaine limite), toutes le fois que, pour un exposant non-entier, la série est infinie; c'est ce que fait voir aussi l'expression (19.) du n^{me} terme a_n. La série est donc composée de groupes à deux termes, et puisque, en supposant $n = \infty$, il est indifférent, qu'on exprime par n le nombre des termes ou le nombre des groupes de termes: la série, en vertu du théorème général (§. 5.), pourra être jugée convergente, si le groupe de termes $a_n - a_{n+1}$, pris n fois, est nul pour $n = \infty$.

L'équation (19.) donne

$$n(a_n - a_{n+1}) = n\left[\frac{(-m)^{m+1,1}.(-1)^n}{n^{m+1}}c^n - \frac{(-m)^{m+1,1}(-1)^{n+1}}{(n+1)^{m+1}}c^{n+1}\right],$$

ou bien

$$26.\quad n(a_n - a_{n+1}) = \frac{(-m)^{m+1,1}(-1)^n}{n^m}c^n\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{c}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}\right).$$

Dans cette expression le facteur $\frac{(-m)^{m+1,1}.(-1)^n}{n^m}c^n$ n'est autre chose, que $n.a_n$ (21.). L'autre facteur $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{c}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}$ est toujours une quantité finie pour un c fini. Donc $n(a_n - a_{n+1})$ sera nul ou fini ou infini en même tems que $n.a_n$ est l'un ou l'autre. Donc la série du binome (25.), en vertu de (24.), sera convergente pour un exposant quelconque, si $c < 1$ et si $c = 1$, m étant positif, et elle sera toujours divergente, si $c > 1$ et si $c = 1$, m étant négatif.

X. Le n^{me} terme a_n de la série

$$c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} + \frac{c^4}{2.3.4}\ldots\ldots\ldots + \frac{c^n}{2.3\ldots\ldots n} + R,$$

qui exprime la quantité exponentielle e^c, est $a_n = \frac{c^n}{2.3\ldots\ldots n}$, donc

$$n.a_n = \frac{c^n}{2.3\ldots\ldots n-1}.$$

Si

Si $c < 1$, ce produit est évidemment $= 0$ pour $n = \infty$. Si $c > 1$, soit μ le premier nombre entier plus grand que c.

Alors $\frac{\mu^n}{2.3.....n-1}$ est $> n.a_n$. Mais

$$\frac{\mu^n}{2.3.....n-1} = \frac{\mu^{\mu+1}}{2.3.....\mu} \cdot \frac{\mu^{n-1-\mu}}{\mu+1.\mu+2.....n-1}.$$

Le premier facteur à droite est toujours une quantité finie, quelque grand que soit μ. Le second facteur, composé d'un nombre égal de facteurs en haut et en bas, peut être exprimé par

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1+\frac{2}{\mu}\right)\left(1+\frac{3}{\mu}\right).....\left(1+\frac{n-1-\mu}{\mu}\right)}.$$

La valeur de la factorielle, qu'offre le dénominateur, est évidemment infiniment grande pour $n = \infty$. Donc le second facteur est $= 0$, pour $n = \infty$, et par consequent $\frac{\mu^n}{2.3.....n-1}$ l'est aussi, quelque grand que soit μ. Donc à plus forte raison $\frac{c^n}{2.3.....n-1}$ ou $n.a_n$ sera nul, pour un c quelconque, n étant ∞.

Cela fait voir, que la série est toujours convergente pour une valeur positive quelconque de c. Si c est négatif, les signes des termes de la série se succèdent en alternant, et l'on trouve, que la série est de même convergente.

XI. D'une manière tout-à-fait semblable on trouvera, que les séries

$$1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{2.3.4} \cdots\cdots - \frac{c^{2n}}{2.3.....2n} + R, \text{ et}$$

$$c - \frac{c^3}{2.3} + \frac{c^5}{2.3.....5} \cdots\cdots - \frac{c^{2n+1}}{2.3.....2n+1} + R,$$

qui expriment le cosinus et le sinus de l'arc c, le rayon étant 1, sont aussi toujours convergentes, pour un arc quelconque.

XII. L'expression d'une puissance quelconque d'un cosinus par les cosinus et les sinus des arcs multiples est en général

$$(2\cos c)^m = \cos mc + m\cos(m-2)c + \frac{m.m-1}{1.2}\cos(m-4)c \cdots\cdots$$
$$+ \frac{m.m-1.....(m-(n-2))}{2.3.....n-1}\cos(m-2(n-1))c + R_1$$
$$\pm\sqrt{-1}\left(\sin mc + m\sin(m-2)c + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)c \cdots\cdots\right.$$
$$\left. + \frac{m.m-1.....(m-(n-2))}{2.3.....n-1}\sin(m-2(n-1))c + R_2\right),$$

où, au lieu de c, il faut encore écrire $c + 2\nu\pi$, ν étant un nombre entier quelconque (voyez tome I. cahier 1. de ce journal, page 17. et 18.).

Tous les cosinus et les sinus sont moindres que l'unité; mais dans les séries ci dessus ils ne diminuent pas nécessairement jusqu'à 0. Donc ces séries ne seront nécessairement convergentes que dans le cas, où les produits des coëfficiens binomiaux des termes infiniment éloignés par un nombre infini sont égaux à zéro. Cela n'a lieu, suivant (IX. 20.), que lorsque l'exposant m est positif. Donc, l'expression ci dessus de $(2\cos c)^m$ n'est généralement convergente que si exposant m est positif.

7.

On pourra trouver de même les conditions de la convergence des séries à double, à triple etc. entrée. On les tirera des réflexions semblables à celles que nous venons de faire sur les séries ordinaires.

8.

A cette occasion nous dirons un mot d'un procédé, qui donne quelquefois les limites de la somme d'une série.

Supposons une série, dont les termes, ou les groupes de termes qui ont le même signe, diminuent continuellement, à partir du premier, jusqu'à l'infini. Soient représentés dans ce cas les termes, ou les groupes de termes, par les ordonnées orthogonales A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ..... (Fig. 1.) d'une courbe, correspondantes aux abscisses $A_0A_1 = 1$, $A_0A_2 = 2$, $A_0A_3 = 3$ etc. Alors l'axe des abscisses sera une asymptote de la courbe, et la somme de la série sera égale à la somme des aires des parallélogrammes A_1C_2, A_2C_3, A_3C_4 ....., la largeur de tous ces parallélogrammes étant $= 1$. Cette somme des aires est plus grande, que l'aire entre la courbe, la première ordonnée et l'axe des abscisses. Prolongeons B_2C_3, B_3C_4 ..... jusqu'à D_1, D_2 ....., nous aurons les parallélogrammes A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4 ....., qui seront équivalents avec les parallélogrammes A_2C_3, A_3C_4 ..... Donc la somme des aires de ces nouveaux parallélogrammes sera égale à la somme de la série, moins son premier terme. Mais l'aire, comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la première ordonnée, est plus grande, que la somme des aires des parallelogrammes A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4 ..... Donc l'aire de la courbe est comprise entre la somme de la série totale et celle de la série moins son premier terme. Soit s la somme de la série, f l'aire de la courbe et a_1

le premier terme de la série, on a

$$s = f + k \text{ et } s - a_1 = f - u,$$

k et u étant deux quantités nécessairement positives. Leur somme sera égale à a_1, comme les deux équations énoncées le font voir, en les retranchant l'une de l'autre. De là il suit que k et u sont réellement, l'un et l'autre, moindres que a_1. Donc on a

$$s < f + a \text{ et } s > f.$$

Si donc on peut trouver l'aire de la courbe, on aura deux limites, entre les quelles la somme de la série sera nécessairement comprise.

En représentant par y les ordonnées de la courbe et par a_n les termes ou les groupes de termes de la série, l'équation de la courbe sera

$$y = a_n,$$

où n exprime les abscisses et y est regardé comme fonction de n. Cela posé, l'aire de la courbe sera égale à l'intégrale de $y\,dn$, prise par rapport à n, c'est-à-dire on aura

$$f = \int a_n\,dn.$$

L'intégrale doit être $= 0$ pour $n = 1$; et, en y faisant $n = \infty$, elle donnera les limites de la valeur de la série totale. On voit bien, que ce procédé peut encore être appliqué, en ne cherchant la valeur, que d'une partie quelconque de la sériè donnée. Si l'on cherche les limites de la valeur d'un reste de la série, par exemple de celui, qui complète la série, à partir du m^{me} terme, il n'y a qu'à supposer l'intégrale $= 0$ pour $n = m$, puis on fera $n = \infty$.

Exemples.

I. Soit donnée la série

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \ldots\ldots + \frac{1}{n} + R,$$

on a $a_n = \frac{1}{n}$, donc $f = \int \frac{dn}{n} = \log n + \text{Const.}$, et si f doit être 0 pour $n = m$, $0 = \log m + \text{Const.}$ Cela donne $\text{Const.} = -\log m$, et

$$f = \log \frac{n}{m}.$$

Donc les limites de la valeur du reste de la série, à partir du m^{me} terme, sont

$$\log \frac{n}{m} + \frac{1}{m} \text{ et } \log \frac{n}{m}.$$

Ces limites toutes les deux sont infiniment grandes pour $n = \infty$ et elles ne différent que d'une quantité finie $\frac{1}{m}$. Donc la valeur du reste de la série est ∞. Cela s'accorde avec (6. I.).

II. Soit donnée la série

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} \ldots\ldots + \frac{1}{n^\mu} + R,$$

on a $a_n = \frac{1}{n^\mu}$, donc $f = \int \frac{dn}{n^\mu} = \frac{n^{1-\mu}}{1-\mu} + \text{Const.}$, et si l'on cherche la valeur du reste, à partir du m^{me} terme, $0 = \frac{m^{1-\mu}}{1-\mu} + \text{Const.}$, donc $\text{Const.} = -\frac{m^{1-\mu}}{1-\mu}$ et

$$f = \frac{n^{1-\mu} - m^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Donc les limites de la valeur du reste de la série seront

$$\frac{n^{1-\mu} - m^{1-\mu}}{1-\mu} + \frac{1}{m^\mu} \text{ et } \frac{n^{1-\mu} - m^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Soit $\mu = 2$, les limites seront

$$\frac{n^{-1} - m^{-1}}{-1} + \frac{1}{m^2} \text{ et } \frac{n^{-1} - m^{-1}}{-1},$$

ou bien

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \text{ et } \frac{1}{m} - \frac{1}{n},$$

et pour $n = \infty$,

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} \text{ et } \frac{1}{m}.$$

Mais ce procédé n'est applicable qu'aux cas, où l'intégrale $\int a_n dn$ peut être trouvée sans les secours de séries.

5.

Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren durch Construction.

(Vom Herrn *J. Steiner.*)

1.

In den Elementen der Geometrie (Anmerk. X.) beweiset Legendre den merkwürdigen Satz:

„dafs die Scheitel aller sphärischen Dreiecke über derselben Grundlinie und von gleichem Flächeninhalte in einem bestimmten kleinen Kreise liegen."

Den Satz hat Lexell zuerst gefunden (*Nova acta Petropolitana*, fünfter Band, erster Theil).

Die künstlichen Ausdrücke, welche für den Radius des genannten Kreises und zur Bestimmung der Lage seines Mittelpuncts gefunden werden, sind nicht geeignet, die eigentliche Lage des Kreises leicht zu erkennen zu geben, noch weniger, denselben danach leicht construiren zu können. Da aber auf diesen Satz mancherlei Untersuchungen gegründet werden können, wie z. B. die Verwandlung und Theilung der sphärischen Figuren, so war eine genauere Bestimmung desselben, so wie ein einfacherer Beweis, sehr wünschenswerth. In der That findet sich, dafs der genannte Ortskreis, ohne Rechnung zu Hülfe zu nehmen, unmittelbar construirt werden kann, und dafs auch der Satz selbst durch eine ganz elementare Betrachtung sich beweisen läfst.

In Folgendem soll daher der Lexell'sche Satz dahin vervollständigt werden:

„dafs der Ort der Scheitel aller sphärischen Dreiecke über derselben Grundlinie und von gleichem Flächeninhalt ein bestimmter kleiner Kreis ist, welcher durch die beiden Gegenpuncte der Endpuncte der Grundlinie geht."

Hiernach ist alsdann der Ortskreis leicht zu construiren, und dadurch wird man in den Stand gesetzt, durch Hülfe dieses Satzes eine Reihe

von Aufgaben über Verwandlung und Theilung der sphärischen Figuren zu lösen, welche denen bei geradlinigen Figuren in der Ebene analog sind, d. h., man kann alsdann durch blofse Construction jedes beliebige sphärische Polygon successive in ein Dreieck oder Zweieck, oder auch in ein sphärisches Quadrat verwandeln, desgleichen jedes gegebene sphärische Dreieck (oder Polygon), von einem gegebenen Punct aus, in zwei gleiche Theile, oder nach sonstigen Bedingungen, theilen.

2.

Jeder Kreis auf der Kugelfläche, dessen Ebene durch den Mittelpunct der Kugel geht, heifse ein Hauptkreis, jeder andere dagegen Sphärenkreis oder auch schlechthin Kreis. Der Bogen eines Hauptkreises aus dem Pol eines Sphärenkreises, bis an irgend einen Punct der Peripherie des letzteren, heifse sphärischer Radius desselben. Ein durch 2, 3, 4, ... Hauptkreis-Bogen begrenzter Theil der Kugelfläche heifse sphärisches Zweieck, Dreieck, Viereck, ... etc., wie gewöhnlich. Ein Hauptkreis, der einen anderen Kreis berührt, heifse sphärische Tangente an letzteren.

Die Sätze: „dafs die sphärischen Tangenten eines Sphärenkreises auf dem zugehörigen sphärischen Radius senkrecht stehen;" — „dafs der Durchschnittspunct zweier sphärischen Tangenten, die denselben Kreis berühren, gleich weit von beiden Berührungspuncten entfernt ist;" — „und dafs im gleichschenkligen sphärischen Dreieck die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind, und umgekehrt;" sind leicht zu beweisen und aus der Elementargeometrie bekannt.

3.

In einem beliebigen Sphärenkreis, dessen Pol M (Fig. 2.), sei ein sphärisches Viereck $ABCD$ eingeschrieben. Nach den Ecken des Vierecks ziehe man die sphärischen Radien MA, MB, MC, MD, welche, da sie einander gleich sind, mit den Seiten des Vierecks vier gleichschenklige Dreiecke AMB, BMC .... bilden, in denen die Winkel an den Grundlinien einander gleich sind (2.), so dafs

$$\alpha = \beta; \quad \gamma_1 = \beta_1; \quad \gamma = \delta; \quad \alpha_1 = \delta_1;$$

und folglich:

$$\alpha + \alpha + \gamma + \gamma_1 = \beta + \beta_1 + \delta + \delta_1;$$

oder:

$$A + C = B + D;$$

das heifst: „bei jedem sphärischen Viereck im Kreise sind die Summen der zwei Paare gegenüber liegender Winkel einander gleich." *)

4.

Zieht man in dem sphärischen Viereck $ABCD$ (Fig. 3.) im Kreise die sphärische Diagonale AC, so hat man, zufolge des vorliegenden Satzes:

$$a + c - B = D - \alpha - \gamma.$$

Ebenso hat man: $a_1 + c_1 - B_1 = D - \alpha - \gamma$, und mithin:

$$a + c - B = a_1 + c_1 - B_1;$$

das heifst: „bei allen sphärischen Dreiecken ABC, AB_1C, ..., welche über der nemlichen sphärischen Sehne AC und auf der nämlichen Seite in einen Sphärenkreis beschrieben werden, ist der Unterschied zwischen dem Winkel (B, B_1) an der Spitze und der Summe der Winkel $(a + c, a_1 + c_1)$ an der Grundlinie constant." Und umgekehrt:

„Der Ort der Scheitel (B, B_1) aller sphärischen Dreiecke ABC, AB_1C, ... über der nemlichen Grundlinie AC, und bei welchen der Unterschied zwischen dem Winkel an der Spitze und der Summe der Winkel an der Grundlinie gleich ist einer gegebenen Gröfse, ist ein bestimmter Sphärenkreis, welcher durch die Endpuncte A, C der Grundlinie geht."

Nimmt man an, die Grundlinie AC gehe durch den Pol M des Keises, so folgt, vermöge der gleichschenkligen Dreiecke AMB und BMC, dafs $B = a + c$, d. h.:

„Bei jedem in einen Sphärenkreis beschriebenen sphärischen Dreiecke, das den sphärischen Durchmesser des Kreises zur Grundlinie hat, ist der Winkel an der Spitze gleich der Summe der Winkel an der Grundlinie;" und umgekehrt: „die Scheitel aller sphärischen Dreiecke über der nemlichen Grundlinie, und bei welchen der Winkel an der

*) Dieser Satz ist blofs ein specieller Fall von dem allgemeineren Satze: „Bei jedem sphärischen $2n$Eck im Kreise, ist, wenn man die Winkel der Ordnung nach numerirt, die Summe der Winkel mit geraden Nummern gleich der Summe der übrigen," welcher sich auf gleiche Weise beweisen läfst. Es steht ihm ein anderer Satz: „Bei jedem sphärischen $2n$Eck um den Kreis ist die Summe der Seiten mit geraden Nummern gleich der Summe der übrigen," gegenüber, welcher eben so leicht zu beweisen ist.

Spitze gleich ist der Summe der Winkel an der Grundlinie, ist die Peripherie des Sphärenkreises, welcher die Grundlinie zum sphärischen Durchmesser hat."

5.

Es sei ABC (Fig. 4.) ein beliebiges sphärisches Dreieck. A_1, B_1 sollen die Gegenpuncte von A, B, also die Bogen ACA_1, BCB_1 halbe Hauptkreise sein, so finden zwischen den Winkeln der beiden sphärischen Dreiecke ACB und A_1CB_1 folgende Beziehungen statt: nemlich $c = c_1$; $\alpha = \alpha_1$; $\beta = b_1$, und da $a + \alpha = b + \beta = 2R$ (2 Rechte), so ist auch $a + a_1 = b + b_1 = 2R$, und folglich:

$$a + b + c = c_1 - (a_1 + b_1) + 4R,$$

d. h.: „bleibt die Summe $a + b + c$ constant, so bleibt auch der Unterschied $c_1 - (a_1 + b_1)$ constant."

Nun folgt aus dem bekannten Satze, wonach der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks aus der Summe seiner drei Winkel gefunden wird, dafs für alle sphärische Dreiecke ABC, über derselben Grundlinie AB und von gleichem Flächeninhalt, die Summe der drei Winkel $(a + b + c)$ constant bleibt, daher bleibt auch in den zugehörigen Dreiecken A_1CB_1 der Unterschied $c_1 - (a_1 + b_1)$, d. h. der Unterschied zwischen dem Winkel (c_1) an der Spitze uud der Summe $(a_1 + b_1)$ der Winkel an der Grundlinie, constant, und folglich ist der Ort des Scheitels C die Peripherie eines Sphärenkreises, der durch die Puncte A_1, B_1 geht (4.). Daraus folgt der nachstehende merkwürdige und fruchtbare Satz:

„Der Ort der Scheitel aller sphärischen Dreiecke ABC, über derselben Grundlinie AB und von gleichem Flächeninhalt, ist die Peripherie eines bestimmten Sphärenkreises, der durch die Gegenpuncte A_1, B_1 der Endpuncte A, B der gemeinschaftlichen Grundlinie geht."

6.

Bleibt also die Grundlinie AB des sphärischen Dreiecks ABC unverändert, und sein Scheitel C bewegt sich in der Peripherie des Kreises A_1CB_1, so bleibt sein Flächeninhalt constant. Nähert sich der Scheitel C einem der beiden Puncte A_1, B_1, z. B. dem Puncte B_1, bis er endlich mit ihm zusammenfällt, so fällt der Bogen AC mit AB_1 zusammen, und da $CB_1 = 0$ wird, so geht BC in den halben Hauptkreis BDB_1 über, welcher den Kreis A_1CB_1 in B_1 berührt. Daher folgt, dafs der Flächen-

cheninhalt des Dreiecks ABC gleich ist dem Flächeninhalt des Zweiecks BAB_1DB oder ABA_1EA, dessen eine Seite BDB_1 oder AEA_1 den Ortskreis A_1CB_1 in B_1 oder A_1 berührt.

Es ist zu bemerken, dafs, wenn die Grundlinie AB und der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks ABC gegeben sind, dafs alsdann eigentlich zwei Ortskreise für den Scheitel C statt finden, indem man sich das Dreieck auf zwei verschiedenen Seiten der Grundlinie vorstellen kann; beide Ortskreise sind aber nothwendiger Weise einander gleich, schneiden einander in den Puncten A_1, B_1, ihre Ebenen bilden mit der Ebene des Hauptkreises ABA_1B_1 gleiche Winkel, und die Gerade, welche ihre Pole verbindet, steht auf der letzteren Ebene senkrecht. In dem besonderen Falle, wo die Summe der Winkel des Dreiecks gleich 4 Rechten, d. h. wo $a+b+c=4R$, ist $c_1=a_1+b_1$ (5.), und daher ist A_1B_1 ein sphärischer Durchmesser für jeden der beiden genannten Ortskreise (4.), folglich fallen beide Ortskreise in einen einzigen zusammen, dessen Ebene zu der Ebene des Hauptkreises ABA_1B_1 senkrecht ist.

7.

Es sei P (Fig. 5.) der Pol des Hauptkreises ABA_1B_1 und EPF derjenige Hauptkreis, welcher die Puncte B, B_1 zu Polen hat. Man ziehe aus B_1 durch den Pol M des Ortskreises A_1CB_1 den Quadranten B_1MG, und beschreibe mit ihm aus dem Pol G den Hauptkreis B_1DB, so hat, da dieser Hauptkreis den Kreis A_1CB_1 in B_1 berührt, weil GMB_1 zu DB_1 senkrecht (2.), das Zweieck BDB_1AB mit dem Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt. Nun ist der Bogen DE das directe Maafs für den Flächeninhalt des Zweiecks BAB_1DB, und da die Quadranten PE und GD einander gleich sind, also auch $DE=PG$ ist, so ist auch der Bogen PG ein directes Maafs für den Flächeninhalt des Zweiecks BAB_1BD oder des Dreiecks ABC; d. h., in demselben Verhältnifs, in welchem sich der Flächeninhalt des Dreiecks ändert, ändert sich auch der ihm zugehörige Bogen, und umgekehrt; so dafs also einem Dreieck von doppeltem Flächeninhalt, ein zweimal so grofser Bogen entspricht. Stehen also z. B. über derselben Grundlinie AB zwei Dreiecke ABC und ABC_1, deren Flächeninhalte sich verhalten wie $n:m$, und entsprechen ihnen respective die Puncte G, G_1, so ist auch $PG:PG_1=n:m$, und umgekehrt.

Kann man also den Bogen PG in G_1 so theilen, dafs $PG:PG_1$ irgend einem gegebenen Verhältnifs $n:m$ gleich ist, so kann man auch ein Dreieck ABC_1 finden, welches mit dem gegebenen Dreieck ABC einerlei Grundlinie und in Hinsicht des Flächeninhalts das nemliche gegebene Verhältnifs hat.

8.

Aus dem Bisherigen ergiebt sich unter anderen zunächst die Auflösung folgender Aufgaben.

I. Aufgabe. „Ueber der Grundlinie AB eines gegebenen sphärischen Dreiecks ABC ein gleichschenkliges Dreieck zu errichten, welches mit jenem gleichen Flächeninhalt hat."

Man lege durch den Scheitel C des gegebenen Dreiecks und durch die Gegenpuncte A_1, B_1 der Endpuncte seiner Grundlinie den Ortskreis A_1CB_1, und errichte aus der Mitte der Grundlinie zu dieser einen sphärischen Perpendikel, so ist der Durchschnittspunct dieses Perpendikels und jenes Ortskreises, zufolge des Obigen, der Scheitel des zu construirenden gleichschenkligen Dreiecks.

II. Aufgabe. „Ueber der Grundlinie AB eines gegebenen sphärischen Dreiecks ABC ein anderes Dreieck zu errichten, welches mit ihm gleichen Flächeninhalt und entweder 1) an der Grundlinie einen rechten oder irgend einen gegebenen Winkel α, oder 2) eine gegebene Seite hat."

Auflösung und Beweis folgen von selbst. Für den Fall (2.) ist die Aufgabe nicht immer möglich.

III. Aufgabe. „Ein sphärisches Dreieck zu finden, welches mit einem gegebenen sphärischen Dreieck ABC dieselbe Grundlinie AB und gleichen Flächeninhalt hat, und dessen Spitze in einem gegebenen Hauptkreise K liegt."

Man construire den Ortskreis A_1CB_1, so schneidet derselbe den gegebenen Hauptkreis K in denjenigen zwei Puncten, in welchen allein die Spitze des zu construirenden Dreiecks liegen kann; schneidet er ihn nicht, so ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich.

IV. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck ABC in ein Zweieck zu verwandeln, d. h., ein Zweieck zu finden, welches mit dem Dreieck gleichen Flächeninhalt hat."

Man suche den Pol M des Ortskreises A_1CB_1 (Fig. 5.), ziehe den sphärischen Radius MB_1 und errichte B_1DB senkrecht zu MB_1, so ist BDB_1AB das verlangte Zweieck (7.).

V. Aufgabe. „Ein sphärisches Dreieck zu construiren, dessen Grundlinie gegeben ist, und welches mit einem gegebenen sphärischen Dreieck ABC einen Winkel gemein und mit ihm gleichen Flächeninhalt hat."

Es sei AD (Fig. 6.) die gegebene Grundlinie des zu construirenden Dreiecks, und A sei der beiden Dreiecken angehörige Winkel. Man ziehe den Hauptkreis CD, und construire nach (III.) das Dreieck CDE, welches mit dem gegebenen Dreieck CDB gleichen Flächeninhalt und die Grundlinie CD gemein hat, und dessen Scheitel E in dem gegebenen Hauptkreise AC liegt, so ist ADE das gesuchte Dreieck. Denn ist $\triangle CDB = \triangle CDE$, so ist auch $\triangle CFE = \triangle DFB$, und folglich auch $\triangle ABC = \triangle ADE$.

VI. Aufgabe. „Ein sphärisches Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen sphärischen Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat, und von dessen Seiten zwei der Gröfse nach gegeben sind."

Diese Aufgabe läfst sich mittelst (II, 2.) auf (V.), und umgekehrt, mittelst (V.) auf (II, 2.) zurückführen. Uebersteigt der genannte Flächeninhalt eine bestimmte Grenze, so findet die Aufgabe nicht Statt.

VII. Aufgabe. „Ein sphärisches Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen sphärischen Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat, und von welchem eine Seite und ein Winkel der Gröfse nach gegeben sind."

Diese Aufgabe läfst sich, wie die vorige, durch Hülfe von (II, 1.) und (V.) lösen.

VIII. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Viereck in ein sphärisches Dreieck zu verwandeln, d. h., ein Dreieck zu construiren, welches mit dem Viereck eine Seite und einen Winkel gemein, und mit ihm gleichen Flächeninhalt hat."

Es sei $ABCD$ (Fig. 7.) das gegebene Viereck. Man ziehe eine sphärische Diagonale DB, und verlängere an dem einen Endpuncte derselben eine Seite des Vierecks, z. B. in B die Seite AB nach E hin, und construire sodann, nach (III.), das Dreieck DBE, welches mit dem Dreieck DBC über derselben Grundlinie DB steht, gleichen Flächen-

inhalt hat, und dessen Scheitel E in der Verlängerung der Seite AB liegt, so ist AED das gesuchte Dreieck, welches mit dem Viereck $ABCD$ gleichen Flächeninhalt und den Winkel A und die Seite AD gemein hat.

IX. Aufgabe. „Irgend ein gegebenes sphärisches Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat."

Die Aufgabe wird auf ähnliche Weise gelöst wie die vorige.

Hieraus folgt:

„Dafs man durch blofse Construction jedes gegebene sphärische Vieleck in ein sphärisches Vieleck irgend einer Gattung mit einer kleineren Anzahl Seiten, folglich jedes gegebene sphärische Vieleck in ein Dreieck oder Zweieck verwandeln kann."

9.

Ferner ergiebt sich aus den obigen Betrachtungen die Auflösung folgender Aufgaben.

I. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck durch einen Hauptkreis aus einem seiner Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen."

Es sei ABC (Fig. 8.) das gegebene Dreieck. Man construire den Ortskreis A_1CB_1, dessen Pol M ist. Aus dem Pol B ziehe man den Hauptkreis $EPGF$. Ferner ziehe man den Hauptkreis $DPMD_1$ so, dafs er zu der Grundlinie AB senkrecht ist und sie in D halbirt; alsdann ist P der Pol des Hauptkreises ABA_1B_1. Endlich ziehe man den Quadranten B_1MG, halbire PG in G_1, ziehe den Quadranten $G_1M_1B_1$, welcher den Hauptkreis DPM_1D_1 in M_1 schneidet, und ziehe aus dem Pole M_1 mit dem sphärischen Radius M_1B_1 den Sphärenkreis B_1baA_1, so ist, zufolge (7.), sowohl das sphärische Dreieck ABa, als auch ABb, halb so grofs als das gegebene Dreieck ABC, und folglich leistet jeder der beiden Hauptkreise Aa und Bb der vorgelegten Aufgabe Genüge.

Es sei Cc der dritte Hauptkreis, welcher das gegebene Dreieck ABC, der Aufgabe gemäfs, halbirt, und C_1 sei der Gegenpunct des Scheitels C, so liegen, vermöge der vorstehenden Auflösung, sowohl die vier Puncte A_1, B_1, b, a, als auch B_1, C_1, c, b, so wie auch C_1, A_1, a, c in einem Kreise. Da die Ebenen dieser drei Kreise einander im Allgemeinen in einem Punct O schneiden, so treffen auch die drei Geraden A_1a, B_1b, C_1c, in welchen die nemlichen Ebenen einander schneiden, in demselben

Punct O zusammen, und folglich schneiden die Ebenen der drei Hauptkreise AaA_1, BbB_1, CcC_1 einander in einem und demselben Durchmesser SQO der Kugel, welcher durch den Punct O geht, so dafs folglich die drei Hauptkreise Aa, Bb, Cc einander in einem und demselben Puncte Q schneiden. Daraus folgt der nachstehende merkwürdige Satz:

„Die drei Hauptkreise (Aa, Bb, Cc), von denen jeder durch einen Winkel eines gegebenen sphärischen Dreiecks (ABC) geht und die Fläche desselben halbirt, treffen einander in einem und demseben bestimmten Puncte Q."

Durch irgend zwei der drei Hauptkreise ist demnach der dritte unmittelbar gegeben.

Der vorstehende Satz findet bekanntlich auf analoge Weise beim geradlinigen Dreieck statt, bei welchem der Punct (Q), in welchem die drei Halbirungslinien einander schneiden, zugleich die Eigenschaft hat, dafs er der Schwerpunct der Fläche des Dreiecks ist.

II. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck, von einem beliebigen Punct aus, der in einer seiner Seiten liegt, durch einen Hauptkreis in zwei gleiche Theile zu theilen."

Es sei ABC (Fig. 9.) das gegebene Dreieck und D der gegebene Punct. Man theile das Dreieck aus einem Winkel, z. B. aus A, durch den Hauptkreis Aa in zwei gleiche Theile (I.), und verwandele nach (8, III.) das sphärische Dreieck ADa in DaE, so theilt der Hauptkreis DE das gegebene Dreieck in zwei gleiche Theile.

III. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Viereck durch einen Hauptkreis aus einem seiner Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen."

Es sei $ABCD$ (Fig. 10.) das gegebene Viereck. Dasselbe soll z. B. aus dem Winkel A, durch einen Hauptkreis, in zwei gleiche Theile getheilt werden. Man verlängere die Seite BC nach E hin, und mache, nach (8, III.), das Dreieck ACE gleichflächig mit ACD, und theile das Dreieck AEB durch den Hauptkreis AF in zwei gleiche Theile (I.), so ist auch $\triangle AFB =$ Viereck $AFCD$, und folglich leistet der Hauptkreis AF der Aufgabe Genüge. Hätte man statt der Seite BC die Seite DC nach E_1 hin verlängert, und $\triangle ACE_1 = \triangle ACB$ gemacht, und durch den Hauptkreis AF_1 das Dreieck ADE_1 halbirt, so müfste man alsdann noch das Dreieck ACF_1 in ACF verwandeln, um den Hauptkreis AF zu finden, welcher die Forderung der vorgelegten Aufgabe erfüllt.

Hat man erst einen Hauptkreis *AF* gefunden, so lassen sich daraus, mit Hülfe von (8, III.), die drei übrigen Hauptkreise, welche aus den drei übrigen Winkeln *B*, *C*, *D* das Viereck halbiren, leicht finden.

IV. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Viereck durch einen Hauptkreis, welcher durch einen in einer Seite desselben gegebenen Punct geht, in zwei gleiche Theile zu theilen."

Es sei *ABCD* (Fig. 11.) das gegebene Viereck und *E* der gegebene Punct. Man theile z. B. aus dem Winkel *A*, durch den Hauptkreis *AF*, das Viereck in zwei gleiche Theile (III.), und verwandele hierauf das Dreieck *EFA* in *EFG*, so theilt der Hauptkreis *EG* das gegebene Viereck in zwei gleiche Theile.

V. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Vieleck durch einen Hauptkreis aus einem seiner Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen."

Es sei z. B. das Fünfeck *ABCDE* (Fig. 12.) gegeben, welches aus dem Winkel *A* durch einen Hauptkreis *AH* in zwei gleiche Theile getheilt werden soll.

Man verwandele das gegebene Fünfeck in das Viereck *AFDE*, theile dieses Viereck durch den Hauptkreis *AG* in zwei gleiche Theile (III.), und verwandele das Dreieck *ADG* in *ADH* (8, III.), so theilt der Hauptkreis *AH* das gegebene Fünfeck in zwei gleiche Theile.

Hat das gegebene Vieleck mehr als fünf Seiten, so verfährt man auf ähnliche Weise.

VI. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Vieleck aus einem Punct, der in einer seiner Seiten gegeben ist, durch einen Hauptkreis in zwei gleiche Theile zu theilen."

Die Aufgabe kann durch Hülfe von (V.) wie die Aufgabe (IV.) durch Hülfe von (III.) gelöst werden.

VII. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck 1) von einem seiner Winkel aus, oder 2) von einem in einer seiner Seiten gegebenen Punct aus, durch Hauptkreise, in 4, 8, 16, ... gleiche Theile zu theilen."

Der Fall (1.) erfordert nur eine wiederholte Anwendung der Aufgabe (I.). Der Fall (2.) dagegen erfordert die Anwendung von (I.) und (III.). Soll z. B. das Dreieck *ABC* (Fig. 9.) aus dem Punct *D* in vier gleiche Theile getheilt werden, so theile man dasselbe zuerst durch den Hauptkreis *DE* in zwei gleiche Theile, und hierauf theile man sowohl

das Dreieck *DEC*, als auch das Viereck *DEBA*, von *D* aus, in zwei gleiche Theile (I. und III.), so hat man die Forderung der Aufgabe erfüllt.

Auf dieselbe Weise kann das Viereck u. s. w. getheilt werden.

Da man einen gegebenen Winkel oder einen gegebenen Kreisbogen, durch Construction, nicht in drei gleiche Theile theilen kann, so kann auch das sphärische Dreieck durch blofse Construction nicht in drei gleiche Theile getheilt werden (7.) und (I.). Wohl aber kann umgekehrt ein gegebenes sphärisches Dreieck, blofs durch Construction, beliebig vervielfacht werden (7.).

VIII. Aufgabe. „Von einem gegebenen sphärischen Dreieck ein Stück abzuschneiden, welches mit einem anderen gegebenen sphärischen Dreieck gleichen Flächeninhalt hat."

Es soll z. B. von dem Dreieck *ABC* (Fig. 13.) ein Stück abgeschnitten werden, welches mit dem Dreieck *ADE* gleichen Flächeninhalt hat. Man verlängere *AE* nach *F* hin, und verwandele das Dreieck *BED* in *BEF* (8, III.), desgleichen das Dreieck *ABF* in *ABG*, so ist dieses Dreieck *ABG* das verlangte abzuschneidende Stück (vergl. 8, VII.).

Auf ähnliche Weise kann man von einem gegebenen sphärischen Vieleck ein Stück abschneiden, welches einen gegebenen Flächeninhalt hat.

10.

Ein sphärisches Dreieck, oder überhaupt ein sphärisches Vieleck, von einem in der Kugelfläche beliebig liegenden Punct aus, in zwei gleiche Theile zu theilen, sind einige Hülfssätze nöthig, die an einem anderen Orte im Zusammenhange vorgetragen und bewiesen, also hier nur kurz angedeutet werden sollen. Zum leichteren Verständnifs mögen die analogen Betrachtungen bei geradlinigen Figuren in der Ebene vorangehen, weil zwischen beiden Betrachtungen eine auffallende Uebereinstimmung Statt findet.

11.

I. Haben zwei geradlinige Dreiecke *ABC* und *ADE* (Fig. 14.) einen gemeinschaftlichen Winkel *A* und gleichen Flächeninhalt, so ist bekanntlich:

$$AB.AC = AD.AE.$$

Ist das eine Dreieck gleichschenklig, z. B., ist $AD = AE$, so ist alsdann

$$AB.AC = AD^2 = AE^2.$$

Nimmt man $AB_1 = AB$ und zieht irgend einen Kreis M, der durch die Puncte B_1 und C geht, so ist die Potenz dieses Kreises (s. Bd. 1. S. 164. dieses Journals), in Bezug auf den Punct A gleich $AB_1 \times AC = AD^2$; dieselbe Potenz ist aber auch gleich dem Quadrat der aus A an den Kreis gelegten Tangente AT, d. i. $= AT^2$, folglich ist $AF = AD = AE$.

II. Es ist ferner bekannt, dafs die Grundlinien BC, DE, ... aller Dreiecke ABC, ADE, ..., welche einen gemeinschaftlichen Winkel A und gleichen Flächeninhalt haben, von einer bestimmten Hyperbel, welche die Schenkel AD, AC des Winkels A zu Asymptoten hat, berührt werden, und zwar wird jede Grundlinie in ihrer Mitte berührt. Die Hauptaxe der Hyperbel halbirt demnach den Winkel A, und der eine ihrer Scheitel liegt in der Mitte G der Grundlinie DE des gleichschenkligen Dreiecks ADE. Daher folgt ferner, dafs der mit dem Radius $AD = AE = AT$, aus dem Mittelpunct A beschriebene Kreis $DFET$ die Axe AG im Brennpunct F der Hyperbel schneidet. Wenn also das Dreieck ABC gegeben ist, so kann man, durch Hülfe des Kreises M, leicht den Scheitel G und den Brennpunct F derjenigen Hyperbel finden, welche die Grundlinie BC berührt und die Seiten AB, AC zu Asymptoten hat.

12.

Auf den Eigenschaften (11.) gründet sich unter anderen die Auflösung folgender Aufgaben.

I. Aufgabe. „Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen Dreieck gleichen Flächeninhalt und den Winkel an der Spitze gemein hat."

Die Auflösung dieser Aufgabe ergiebt sich sehr leicht aus (11, I.).

II. Aufgabe. „Ein Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen Dreieck gleichen Flächeninhalt und den Winkel an der Spitze gemein hat, und dessen Grundlinie durch einen gegebenen Punct geht." Oder, was dasselbe ist:

„Aus einem gegebenen Punct eine Gerade so zu ziehen, dafs sie mit zwei gegebenen Geraden, welche mit dem Punct in einer Ebene liegen, ein Dreieck bilde, dessen Flächeninhalt gegeben ist."

Es

Es sei ABC (Fig. 15.) das gegebene Dreieck und P der gegebene Punct.

Nach (11, II.) folgt, dafs die Aufgabe einerlei ist mit folgender:

„Aus einem gegebenen Puncte P an eine Hyperbel, deren Asymptoten AC, AB, nebst einer Tangente BC, gegeben sind, eine Tangente zu legen."

Die Aufgabe wird demnach, wie folgt, gelöset.

Man mache $AB_1 = AB$, lege durch die Puncte B_1, C, einen beliebigen Kreis B_1TC, an diesen aus A die Tangente AT, und beschreibe mit derselben aus A den Kreis $TEFDF_1$, welcher die Hauptaxe F_1F der Hyperbel in ihren Brennpuncten F, F_1 schneidet, und dessen Sehne DE derselben Axe in ihrem Scheitel G begegnet. Mit der Hauptaxe $G_1G = 2AG$ beschreibe man aus F_1 den Kreis QQ_1Q_2, und aus P den Kreis FQQ_1, verbinde den Durchschnitt Q beider Kreise mit dem Brennpunct F, und fälle auf diese Gerade QF aus P das Perpendikel PO, so ist dieses Perpendikel die gesuchte Tangente, und leistet folglich der obigen Aufgabe Genüge, d. h., sie schneidet ein Dreieck HIA ab, welches mit dem gegebenen Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat. Ebenso ist das aus P auf die Gerade FQ_1 gefällte Perpendikel $PO_1H_1I_1$ eine Tangente an die Hyperbel, und schneidet ein Dreieck AH_1I_1 ab, welches mit dem gegebenen Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat.

III. Aufgabe. „Wenn in einer Ebene ein Dreieck und irgend ein Punct gegeben ist, so soll man aus diesem Puncte eine Gerade so ziehen, dafs sie die Fläche des Dreiecks in zwei gleiche Theile theilt."

Man ziehe aus den Winkeln nach den Mitten der gegenüber liegenden Seiten des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 16.) die Geraden AA_1, BB_1, CC_1, von denen bekanntlich jede das Dreieck halbirt, und die einander in einem und demselben Puncte S schneiden, und die Ebene in 6 unendliche Winkelräume theilen. Befindet sich nun der gegebene Punct, z. B., in dem Winkelraum ASC_1, wie P, so ziehe man die Gerade PDE so, dafs das Dreieck DEE mit dem Dreieck BCC_1 gleichen Flächeninhalt hat (II.), so ist der vorgelegten Aufgabe Genüge gethan.

Liegt der gegebene Punct P aufserhalb des gegebenen Dreiecks, so läfst die Aufgabe nur eine Auflösung zu; liegt er aber innerhalb desselben, so sind eine, zwei und höchstens drei Auflösungen möglich.

Denn aus (11, II.) folgt, dafs von allen möglichen Geraden, welche das Dreieck halbiren, jede eine von drei bestimmten Hyperbeln berührt, welche die Seiten des Dreiecks zu Asymptoten haben.

IV. Aufgabe. „Aus einem in der Ebene eines gegebenen Dreiecks willkürlich angenommenen Punct eine Gerade so zu ziehen, dafs sie die Fläche des Dreiecks nach einem gegebenen Verhältnifs theilt."

Diese Aufgabe wird, wie die vorige, auf (II.) zurückgeführt.

V. Aufgabe. „Wenn in einer Ebene ein Viereck und irgend ein Punct gegeben ist, so soll man aus dem Punct eine Gerade so ziehen, dafs sie das Viereck 1) halbirt, oder 2) nach irgend einem gegebenen Verhältnifs theilt, oder 3) von demselben ein Stück von gegebener Gröfse abschneidet."

Es sei $ABCD$ (Fig. 17.) das gegebene Viereck und P der gegebene Punct. Für den Fall (1.) halbire man das Viereck durch die Gerade CC_1 aus dessen Winkel C, und ziehe hierauf die Gerade PFG so, dafs das Dreieck FGE mit dem Dreieck C_1CE gleichen Flächeninhalt hat (II.), so genügt sie der Aufgabe. Hätte man das Viereck durch die Gerade AA_1 (statt CC_1) in zwei gleiche Theile getheilt, so müfste man zuerst durch die Gerade PIH ein Dreieck IDH abschneiden, welches mit ADA_1 gleichen Flächeninhalt hätte, und dann noch das Dreieck PCH in das Dreieck PCG verwandeln, wozu man HG mit PC parallel ziehen müfste.

Es ist also nicht gleich bequem, von welchem Winkel aus man das Viereck zuerst theilt. Um dieser Schwierigkeit auszuweichen, und um zum Voraus entscheiden zu können, welchen zwei Seiten des Vierecks die zu ziehende Theilungslinie (PG) begegnen werde, ziehe man zuerst aus den Winkeln des Vierecks die vier Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, von denen jede dasselbe in zwei gleiche Theile theilt, so läfst sich alsdann auf ähnliche Weise, wie (III.), erkennen, welche der vier Theilungen man zu wählen habe, und welchen zwei Seiten die Theilungslinie PG begegnen werde.

Bei den Fällen (2.) und (3.) verfährt man auf ähnliche Weise.

Diese Art von Aufgaben lassen sich auch auf die Vielecke ausdehnen und werden auf ähnliche Weise gelöset.

13.

Die Betrachtungen (11. und 12.), über geradlinige Figuren in der Ebene, finden nun, wie oben bemerkt (10.), auf analoge Weise bei den sphärischen Figuren statt, nemlich wie folgt:

I. Haben zwei sphärische Dreiecke ABC, ADE gleichen Flächeninhalt und einen Winkel A gemein, so ist bekanntlich (Legendre, *élémens de géom.* Anmerk. X.):

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AB.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AC = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AD.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AE.$$

Ist das eine Dreieck gleichschenklig, z. B. ist $AD = AE$, so ist:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AB.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AC = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AD^2 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AE^2.$$

Nimmt man $AB_1 = AB$ (Fig. 14., wo man sich unter jeder Geraden einen Hauptkreis der Kugel denken mufs), und legt durch die Puncte B und C irgend einen Sphärenkreis M, und an diesen aus A die Tangente AT, so ist, — da der Satz von der Potenz bei Kreisen in der Ebene (11, I.) auf ähnliche Weise bei Kreisen auf der Kugelfläche gilt, nemlich, dafs für alle, aus demselben Punct A durch den Kreis M gezogenen sphärischen Secanten AB_1C, das Product $\operatorname{tg}\frac{1}{2}AB_1.\operatorname{tg}\frac{1}{2}AC$ constant bleibt *), welches an einem andern Orte bewiesen werden wird, und leicht zu beweisen ist —:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AB_1.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AC = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AT^2 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AD^2,$$

und folglich

$$AT = AD = AE,$$

das heifst: „die sphärische Tangente AT aus dem Winkel A an den Kreis M ist gleich der Seite AD oder AE des gleichschenkligen Dreiecks ADE, welches mit dem Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat."

II. Ferner werden wir an einem anderen Orte beweisen, dafs die Grundlinien BC, DE, ... (Fig. 18.) aller sphärischen Dreiecke ABC, ADE, ..., welche gleichen Flächeninhalt und einen Winkel A gemein haben, von einem sphärischen Kegelschnitt (die Durchschnittscurve der Kugelfläche mit der Fläche eines Kegels zweiten Grades, dessen Scheitel im Mittelpunct der Kugel liegt) berührt werden, und zwar, dafs jede Grundlinie in ihrer Mitte berührt wird; dafs ferner die Hauptaxe AG des sphärischen Kegelschnitts den gemeinschaftlichen Winkel

*) Ebenso findet die Eigenschaft zweier Kreise in der Ebene, welche wir ihre gemeinschaftliche Potenz genannt haben (I. Band, Seite 175. dieses Journals), auf analoge Weise bei zwei Kreisen auf der Kugel statt.

Denn aus (11, II.) folgt, dafs von allen möglichen Geraden, welche das Dreieck halbiren, jede eine von drei bestimmten Hyperbeln berührt, welche die Seiten des Dreiecks zu Asymptoten haben.

IV. Aufgabe. „Aus einem in der Ebene eines gegebenen Dreiecks willkürlich angenommenen Punct eine Gerade so zu ziehen, dafs sie die Fläche des Dreiecks nach einem gegebenen Verhältnifs theilt."

Diese Aufgabe wird, wie die vorige, auf (II.) zurückgeführt.

V. Aufgabe. „Wenn in einer Ebene ein Viereck und irgend ein Punct gegeben ist, so soll man aus dem Punct eine Gerade so ziehen, dafs sie das Viereck 1) halbirt, oder 2) nach irgend einem gegebenen Verhältnifs theilt, oder 3) von demselben ein Stück von gegebener Gröfse abschneidet."

Es sei $ABCD$ (Fig. 17.) das gegebene Viereck und P der gegebene Punct. Für den Fall (1.) halbire man das Viereck durch die Gerade CC_1 aus dessen Winkel C, und ziehe hierauf die Gerade PFG so, dafs das Dreieck FGE mit dem Dreieck C_1CE gleichen Flächeninhalt hat (II.), so genügt sie der Aufgabe. Hätte man das Viereck durch die Gerade AA_1 (statt CC_1) in zwei gleiche Theile getheilt, so müfste man zuerst durch die Gerade PIH ein Dreieck IDH abschneiden, welches mit ADA_1 gleichen Flächeninhalt hätte, und dann noch das Dreieck PCH in das Dreieck PCG verwandeln, wozu man HG mit PC parallel ziehen müfste.

Es ist also nicht gleich bequem, von welchem Winkel aus man das Viereck zuerst theilt. Um dieser Schwierigkeit auszuweichen, und um zum Voraus entscheiden zu können, welchen zwei Seiten des Vierecks die zu ziehende Theilungslinie (PG) begegnen werde, ziehe man zuerst aus den Winkeln des Vierecks die vier Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, von denen jede dasselbe in zwei gleiche Theile theilt, so läfst sich alsdann auf ähnliche Weise, wie (III.), erkennen, welche der vier Theilungen man zu wählen habe, und welchen zwei Seiten die Theilungslinie PG begegnen werde.

Bei den Fällen (2.) und (3.) verfährt man auf ähnliche Weise.

Diese Art von Aufgaben lassen sich auch auf die Vielecke ausdehnen und werden auf ähnliche Weise gelöset.

13.

Die Betrachtungen (11. und 12.), über geradlinige Figuren in der Ebene, finden nun, wie oben bemerkt (10.), auf analoge Weise bei den sphärischen Figuren statt, nemlich wie folgt:

I. Haben zwei sphärische Dreiecke ABC, ADE gleichen Flächeninhalt und einen Winkel A gemein, so ist bekanntlich (Legendre, *élémens de géom.* Anmerk. X.):

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AB.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AC = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AD.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AE.$$

Ist das eine Dreieck gleichschenklig, z. B. ist $AD = AE$, so ist:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AB.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AC = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AD^2 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AE^2.$$

Nimmt man $AB_1 = AB$ (Fig. 14., wo man sich unter jeder Geraden einen Hauptkreis der Kugel denken mufs), und legt durch die Puncte B und C irgend einen Sphärenkreis M, und an diesen aus A die Tangente AT, so ist, — da der Satz von der Potenz bei Kreisen in der Ebene (11, I.) auf ähnliche Weise bei Kreisen auf der Kugelfläche gilt, nemlich, dafs für alle, aus demselben Punct A durch den Kreis M gezogenen sphärischen Secanten AB_1C, das Product $\operatorname{tg}\frac{1}{2}AB_1.\operatorname{tg}\frac{1}{2}AC$ constant bleibt *), welches an einem andern Orte bewiesen werden wird, und leicht zu beweisen ist —:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AB_1.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AC = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AT^2 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AD^2,$$

und folglich

$$AT = AD = AE,$$

das heifst: „die sphärische Tangente AT aus dem Winkel A an den Kreis M ist gleich der Seite AD oder AE des gleichschenkligen Dreiecks ADE, welches mit dem Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat."

II. Ferner werden wir an einem anderen Orte beweisen, dafs die Grundlinien BC, DE, ... (Fig. 18.) aller sphärischen Dreiecke ABC, ADE, ..., welche gleichen Flächeninhalt und einen Winkel A gemein haben, von einem sphärischen Kegelschnitt (die Durchschnittscurve der Kugelfläche mit der Fläche eines Kegels zweiten Grades, dessen Scheitel im Mittelpunct der Kugel liegt) berührt werden, und zwar, dafs jede Grundlinie in ihrer Mitte berührt wird; dafs ferner die Hauptaxe AG des sphärischen Kegelschnitts den gemeinschaftlichen Winkel

*) Ebenso findet die Eigenschaft zweier Kreise in der Ebene, welche wir ihre gemeinschaftliche Potenz genannt haben (I. Band, Seite 175. dieses Journals), auf analoge Weise bei zwei Kreisen auf der Kugel statt.

A halbirt, und einer ihrer Scheitel in der Mitte G der Grundlinie DE des gleichschenkligen Dreiecks ADE liegt; dafs der mit der Seite AD dieses Dreiecks aus A beschriebene Sphärenkreis $DFEF_1$ der Axe in den Brennpuncten F, F_1 des Kegelschnitts begegnet; dafs, wenn f der Gegenpunct von F_1, mithin $A_1f = AF$ ist, der Kegelschnitt, in Bezug auf die beiden Brennpuncte F, F_1, hyperbolische, dagegen, in Bezug auf die beiden Brennpuncte F, f elliptische Eigenschaften hat, d. h., dafs für jeden Peripheriepunct I des Kegelschnitts sowohl der Unterschied der beiden Bogen $IF_1 - IF$, als auch die Summe der beiden Bogen $IF + If$ constant ist, nemlich ersterer $= 2AG = GG_1$, und letztere $= Gg$; dafs endlich die Tangente BIC den Winkel FIF_1 der Leitstrahlen halbirt, und dafs überhaupt das Verfahren, an einen sphärischen Kegelschnitt eine Tangente zu legen, demjenigen bei den ebenen Kegelschnitten ganz und gar analog ist.

Die beiden Hauptkreise ACA_1 und ABA_1 kann man, wegen der Uebereinstimmung ihrer hier angegebenen Eigenschaft, in Bezug auf den sphärischen Kegelschnitt, mit den Asymptoten, in Bezug auf die Hyperbel (11, II.), spärische Asymptoten des sphärischen Kegelschnitts nennen *).

---

*) Wir fügen hier kürzlich noch folgende Resultate hinzu, die mit den obigen Sätzen im Zusammenhange sind, aber aufser dem Zwecke dieser Abhandlung liegen.

I. „Die Polarfigur eines sphärischen Kegelschnitts ist ebenfalls ein sphärischer Kegelschnitt, d. h., zieht man in einem Peripheriepunct I des gegebenen sphärischen Kegelschnitts die sphärische Normale IK, und nimmt $IK =$ einem Quadranten, so ist der Ort des Puncts K ebenfalls die Peripherie eines bestimmten Kegelschnitts, und zwar ist IK zugleich auch die sphärische Normale auf denselben im Puncte K. Ferner haben die beiden sphärischen Kegelschnitte folgende Beziehungen zu einander: Wenn sie beide als sphärische Ellipsen angesehen werden, so haben sie denselben Mittelpunct S, ihre sphärische Axen liegen in denselben Hauptkreisen ASA_1, LSL_1, und zwar liegt die kleine Axe der einen sphärischen Ellipse mit der grofsen Axe der andern im gleichen Hauptkreise, und die Summe zweier solcher zusammen gehöriger Axen ist einem halben Hauptkreise gleich; und endlich sind die Brennpuncte des einen sphärischen Kegelschnitts die Pole der Asymptoten des andern."

Aus diesem Satze folgt mit andern Worten der folgende:

II. „Fället man aus einem beliebigen Puncte k_1 Lothe auf die Ebenen, welche einen gegebenen Kegel k zweiten Grades berühren, so liegen alle Lothe zusammen in einer andern Kegelfläche K_1 desselben Grades. Sind $2a$ und $2b$ der gröfste und kleinste Winkel am Scheitel des Kegels K (die Axen-Winkel), und $2a_1$, $2b_1$ dasselbe für den Kegel K_1, so ist $2a + 2b_1 = 2a_1 + 2b = 2R$, und sowohl die beiden Axen-Winkel $2a$, $2b_1$ als $2b$, $2a_1$ liegen in einer und derselben Ebene. Werden diese beiden Axen-Ebenen zu Coordinaten-Ebenen genommen, so ist die Gleichung des Kegels K, wenn dessen Scheitel K der Anfangspunct ist:

$$y^2 \operatorname{tg} a^2 + x^2 \operatorname{tg} b^2 = z^2 . \operatorname{tg} a^2 . \operatorname{tg} b^2,$$

14.

Aus diesen angedeuteten Sätzen und Eigenschaften (13.) ergeben sich die Auflösungen vieler sphärischen Aufgaben, z. B. der folgenden:

I. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, welches mit ihm den Winkel an der Spitze gemein hat."

Die Auflösung ergiebt sich aus (13, I.).

II. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches mit ihm den Winkel an der Spitze gemein hat, und dessen Grundlinie durch einen gegebenen Punct geht."

Die Auflösung dieser Aufgabe gründet sich auf (13, II.), und ist mit (12, II.) analog, so dafs letztere für die gegenwärtige Aufgabe wörtlich übertragen werden kann.

III. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck durch einen Hauptkreis, der von einem auf der Kugel gegebenen Punct ausgeht, in zwei gleiche Theile zu theilen."

Die Auflösung ist analog mit (12, III.), nur dafs beim sphärischen Dreieck die Hauptkreise, welche dasselbe von seinen Winkeln aus halbiren, nicht durch die Mitten der gegenüberliegenden Seiten gehen, wie beim geradlinigen Dreieck, sondern nach (9, I.) construirt werden müssen.

IV. Aufgabe. „Von einem gegebenen sphärischen Dreieck durch einen Hauptkreis, der durch einen gegebenen Punct geht, ein Stück ab-

---

und die Gleichung des Kegels K_I, wenn dessen Scheitel k_I zum Anfangspunct genommen wird, ist

$$\frac{y^2}{\mathrm{tg}\,a^2} + \frac{x^2}{\mathrm{tg}\,b^2} = \frac{z^2}{\mathrm{tg}\,a^2 . \mathrm{tg}\,b^2}."$$

Aus dem bekannten Satze (*Correspondance sur l'école polytechnique Tom. I. p.* 179.): „dafs der Ort der Durchschnittslinie zweier Ebenen, die zu einander senkrecht sind und die durch die Schenkel eines fixen Winkels gehen, eine Kegelfläche zweiten Grades ist, die den fixen Winkel zum kleinen Axen-Winkel hat;" oder mit andern Worten: „dafs der Ort der Scheitel aller sphärischen Dreiecke über derselben Grundlinie, deren Winkel am Scheitel rechte sind, ein sphärischer Kegelschnitt ist, welcher die Grundlinie zur kleinen elliptischen Axe hat," folgt nach (I.) folgender Satz:

III. „Dafs alle Quadranten, wie z. B. BC (Fig. 18.), die man zwischen zwei gegebenen und fixen halben Hauptkreisen ABA_I, ACA_I ziehen kann, zusammen von einem bestimmten sphärischen Kegelschnitt $GIhgH$ berührt werden;" oder mit andern Worten: „dafs alle mögliche Ebenen, von denen jede durch einen gegebenen Punct K in der Durchschnittslinie zweier gegebenen fixen Ebenen geht und diese so schneidet, dafs die beiden Durchschnittslinien einen rechten Winkel bilden, zusammen einen bestimmten Kegel K zweiten Grades berühren, dessen Scheitel in dem genannten Punct K liegt, und welcher zugleich auch die beiden fixen Ebenen berührt."

zuschneiden, welches mit einem anderen gegebenen sphärischen Dreieck gleichen Flächeninhalt hat."

Die Aufgabe läfst sich, vermöge (8, VII.), auf (II.) zurückführen.

V. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Viereck durch einen Hauptkreis, der durch einen gegebenen Punct geht, in zwei gleiche Theile zu theilen."

Die Auflösung ist analog mit (12, V.). U. s. w.

15.

Es mögen hier noch folgende zwei Aufgaben nebst einigen Bemerkungen, die mit (13.) in Beziehung sind, ihren Platz finden.

„Wenn auf der Kugel zwei Hauptkreise ABA_1, ACA_1 (Fig. 18.) und irgend ein Punct I gegeben sind, so soll man denjenigen Bogen BIC finden, 1) für welchen $IB = IC$, oder 2) für welchen das sphärische Dreieck ABC ein Minimum oder das sphärische Dreieck A_1BC ein Maximum ist."

Ein und derselbe Bogen erfüllt zugleich die Forderungen beider Aufgaben. Angenommen, es sei Bogen $AI < A_1I$. Man nehme $IN = IA$, mache Winkel $INC = IAB$, und ziehe aus dem Durchschnitt C der Bogen NC und AC den Bogen CIB, so genügt dieser beiden Aufgaben zugleich. Denn die beiden sphärischen Dreieke AIB und NIC sind, vermöge der gleichen Seiten AI und NI und der daran liegenden gleichen Winkel, congruent, und daher ist $IB = IC$. Dafs ferner jedes andere Dreieck, wie z. B. AB_1C_1, gröfser ist als das sphärische Dreieck ABC, folgt eben so leicht. Denn die beiden sphärischen Dreiecke IBB_1 und ICC_2 sind, vermöge der gleichen Seiten IB und IC und der daran liegenden gleichen Winkel, congruent. Nun aber ist offenbar das sphärische Dreieck $ICC_1 > ICC_2$, also auch das sphärische Dreieck $ICC_1 > IBB_1$, und folglich auch das sphärische $\triangle AB_1C_1 > \triangle ABC$.

Bemerkt man ferner, dafs der gefundene Bogen BC, nach (13, II.), in seiner Mitte I von einem bestimmten sphärischen Kegelschnitt berührt wird, welcher die gegebenen Hauptkreise ABA_1 und ACA_1 zu Asymptoten hat, so folgt: „Dafs die vorliegende Auflösung zugleich lehrt, wie man durch Construction, in einem gegebenen Punct I an einen sphärischen Kegelschnitt eine Tangente BC legen kann, wenn nur die beiden Asymptoten desselben gegeben sind." „Dafs sofort ferner auch die den

Kegelschnitt im Scheitel G berührende Tangente DE, mithin auch dieser Scheitel selbst, so wie endlich auch die Brennpuncte F, F_1 oder f durch blofse Construction zu finden sind (13.)." U. s. w. Dieses alles findet bekanntlich auf analoge Weise bei der Hyperbel in Hinsicht ihrer Asymptoten statt.

Zum Schlusse kann noch bemerkt werden, dafs sich aus dem Obigen der nachstehende bekannte Satz (Legendre, VII. Buch, 26. Satz):

> „dafs nemlich von allen sphärischen Dreiecken mit zwei gegebenen Seiten, dasjenige das gröfste sei, in welchem der Winkel zwischen den gegebenen Seiten so grofs ist, als die Summe der beiden übrigen Winkel,"

leicht beweisen lasse. Denn es seien AB und AC (Fig. 4.) die gegebenen Seiten. Man nehme AB als fixe Grundlinie an, und beschreibe mit AC aus A einen Kreis A, und denke sich ferner durch die Gegenpuncte A_1, B_1 der Endpuncte der Grundlinie den Kreis M, der den Kreis A in C berührt, so ist, wie aus dem Obigen leicht folgt, das Dreieck ABC das gröfstmögliche mit den gegebenen Seiten AB und AC. Da ferner der Berührungspunct C mit den Polen der beiden genannten Kreise A, M, in einem Hauptkreise liegt, so fällt also im gegenwärtigen Falle der Pol M in den Hauptkreis ACA_1, und daher hat man (4.):

$$b_1 = a_1 + c_1 = a_1 + c,$$

und da

$$a + a_1 = b + b_1,$$

so folgt:

$$a = b + c,$$

w. z. b. w.

Berlin, im März 1827.

6.
Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

(Tom. XVII. p. 284. der *Annales de mathém.* von Gergonne.)

(Vom Herrn *J. Steiner.*)

Aufgabe. „Quelle est l'ellipse la plus approchante du cercle que l'on puisse circonscrire à un quadrilatère donné?"

Auflösung. 1) Durch vier in einer Ebene liegende Puncte können nur dann Ellipsen gelegt werden, wenn jeder Punct aufserhalb des Dreiecks liegt, welches durch die drei übrigen bestimmt wird.

2) Alle Kegelschnitte, welche durch die nemlichen vier Puncte gehen, haben zusammen ein System conjugirter Durchmesser, welche mit einander parallel sind.

3) Von allen Paaren conjugirter Durchmesser einer Ellipse bilden die beiden gleichen unter sich den kleinsten Winkel, und

4) Die Ellipse kommt dem Kreise um so näher, je mehr sich das Verhältnifs ihrer Axen der Einheit, oder je mehr sich der Winkel ihrer gleichen conjugirten Durchmesser dem rechten Winkel nähert, weil, wenn a, b die Axen und α der Winkel der genannten Durchmesser der Ellipse ist, $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ ist.

5) Daraus folgt, „dafs die gesuchte Ellipse diejenige ist, deren gleiche conjugirte Durchmesser zu dem System der parallelen Durchmesser (2.) gehören." Denn bei jeder anderen Ellipse, bei welcher die beiden conjugirten Durchmesser, die zu dem Parallelsystem gehören, nicht gleich sind, bilden die beiden gleichen conjugirten Durchmesser einen kleineren Winkel als jene (3.), und folglich weicht die Ellipse mehr vom Kreise ab (4.) als die genannte.

Zu dem vorhin angeführten bekannten Satze, über die parallelen conjugirten Durchmesser, lassen sich folgende Zusätze hinzufügen.

Alle

Alle Kegelschnitte, welche durch vier gegebene Puncte gehen, haben ein System conjugirter Durchmesser, die parallel sind, und ihre Mittelpuncte liegen in der Peripherie eines anderen bestimmten Kegelschnitts *K*. Dieses ist bekannt.

Da nun, wenn die vier Puncte die in (1.) angegebene Lage haben, unter der Schaar Kegelschnitte, welche durch dieselben gehen, sich immer zwei Parabeln befinden, und da ferner bei der Parabel von irgend zwei conjugirten Durchmessern immer der eine mit der Axe parallel ist, so folgt, dafs die Axen der beiden genannten Parabeln mit den, zu dem Parallelsystem gehörigen conjugirten Durchmessern parallel sind; und da der Mittelpunct der Parabel unendlich weit entfernt ist, so folgt ferner, dafs der genannte Kegelschnitt *K* nothwendig eine Hyperbel ist, deren Asymptoten mit den Axen der beiden Parabeln parallel sein müssen. Daher folgt:

„Dafs alle Kegelschnitte, die durch vier gegebene Puncte gehen, welche die in (1.) angegebene Lage haben, ein System conjugirter Durchmesser haben, die parallel sind, und dafs ihre Mittelpuncte in einer bestimmten Hyperbel liegen, deren Asymptoten ebenfalls mit jenen conjugirten Durchmessern parallel sind."

Berlin, im Mai 1827.

7.

De residuis cubicis commentatio numerosa.

(Auct. Dr. *J. G. D. Jacobi* Regiom.)

1.

Theorema fundamentale de residuis quadraticis postquam pluribus demonstrationibus egregiis comprobaverat, Cl. Gaufs, iam ex longo temporis intervallo, de residuis cubicis et biquadraticis quaestionem moverat, nec non quae ea de re theoremata struxerit, communicaturum se cum arithmeticis pollicitus est. Ante biennium fere Vir ille Clarissimus commentationem primam de residuis biquadraticis conscriptam societati Gottingensi tradidit, quae tamen diu desiderata nondum lucem vidit. Quam ne nimis graviter ferant arithmetici moram, ipse praecipua, quae ibi adornaverat, theoremata iam tum temporis publici iuris facere voluit (vid. *Göttinger gelehrte Anzeiger Vol. I. A.* 1725.). Versari comperimus ea theoremata cum in aliis rebus gravissimis tum in explorandis indiciis, quibus cognoscatur, numerum 2 dati numeri primi esse residuum biquadraticum. Equidem dum ad egregia Viri inventa probe intelligenda animum bene praeparatum esse volebam, hisce quaestionibus intentus casu, ut fit, in methodum satis generalem incidi, cuius ope plurima de residuis dignitatum theoremata investigare, vel undecunque cognita comprobare posse mihi videor. Cuius ope eruta de residuis cubicis theoremata fundamentalia arithmeticis iam proponam.

2.

Quaestio de residuis dignitatum gravissima in eo maxime versatur, ut proposito numero q omnes numeri primi p formae $\lambda n + 1$ assignandi sint tales, ut congruentia $x^\lambda \equiv q \pmod{p}$ resolvi queat, sive, quod idem est, ut sit $q^{\frac{p-1}{\lambda}} \equiv 1 \pmod{p}$; quo casu dicetur, numerum q esse residuum λ^{tae} dignitatis, respectu numeri primi p. Sit $\lambda = 3$ sive p formae $3n+1$, notum est (v. Disquis. Ar., Sectio ult.), semper eiusmodi numeros L, M eosque unico tantum modo assignari posse, ut sit $LL + 27MM = 4p$. Numerum q in theorematibus fundamentalibus pro-

ponendis et ipsum primum statuemus; distinguendum autem nobis est inter casum, quo q erit formae $6n+1$, et casum, quo q formae $6n-1$. Casu primo, quo q formae $6n+1$, notum est, semper resolvi posse congruentiam $xx+3 \equiv 0 \pmod{q}$. Quibus positis, proponamus theorema sequens genuina forma, qua inventum est — varie enim transformare licet hoc et alterum —:

Theorema I. „Sint et p et q numeri primi formae $6n+1$, sit $4p = LL + 27MM$, sit porro $xx+3 \equiv 0 \pmod{q}$: erit q residuum cubicum, respectu numeri primi p, quoties $\frac{p(L+3Mx)}{2}$ sive etiam $\frac{L+3Mx}{L-3Mx}$ residuum cubicum respectu numeri primi q; sin minus, non erit."

3.

Altero casu, quo q formae $6n-1$, theorema fundamentale longius repetendum erit. Eo enim casu confugiendum est ad theoriam prorsus novam, nempe ad considerationem radicum imaginariarum congruentiarum. Casu nostro, quo q formae $6n-1$, notum est, congruentiam $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$ duas tantum habere radices reales ± 1, at reliquas, quarum $p-1$ numerus, sub forma imaginaria $a+b\sqrt{-3}$, ubi $aa+3bb \equiv 1 \pmod{q}$ assignare licet omnes. Nec non inter eas rursus radices primitivas distinguere licet, quarum idem numerus est atque numerorum numero $q+1$ minorum et ad ipsum $q+1$ primorum. De quibus et ipsis valet, quod de radicibus primitivis vulgo dictis, ut radices congruentiae omnes tamquam unius radicis primitivae dignitates repraesentari possint. Modum eiusmodi congruentiae radices exhibendi expeditissimum alibi tradam; adnotabo tantummodo, ubi $q+1 = mn$, atque r radix primitiva congruentiae $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$, fieri congruentiae $x^m \equiv 1 \pmod{q}$ radices: $1, r^n, r^{2n}, r^{3n}, \ldots, r^{(m-1)n}$.

Jam omnes radices congruentiae $x^{\frac{q+1}{3}} \equiv 1 \pmod{q}$, quippe qui sunt cubi radicum congruentiae $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$, denominemus in sequentibus residua cubica numeri primi q. Quibus positis, theorema sequens enuntiare licet.

Theorema II. „Sit p numerus primus formae $6n+1$, atque $4p = LL + 27MM$; sit porro q numerus primus formae $6n-1$: erit q residuum cubicum numeri primi p, quoties est $\frac{L+M\sqrt{-3}}{L-M\sqrt{-3}}$ residuum cubicum numeri primi q; sin minus, non erit."

3.

Haec duo theoremata fundamentalia tamquam primae lineae theoriae residuorum cubicorum amplissimae consideranda sunt. Eorum ope adornari poterit tabula, cuius initium hic exhibemus:

q	Congruentiae conditionales respectu moduli q, ut sit q R.C. moduli p; $(4p=LL+27MM)$
2	$M\equiv 0$
3	$M\equiv 0$
5	$L\equiv 0;\ M\equiv 0$
7	$L\equiv 0;\ M\equiv 0$
11	$L\equiv 0;\ M\equiv 0;\ L\equiv \pm 4M$
13	$L\equiv 0;\ M\equiv 0;\ L\equiv \pm M$
17	$L\equiv 0;\ M\equiv 0;\ L\equiv \pm 3M$ $L\equiv \pm 9M$
19	$L\equiv 0;\ M\equiv 0;\ L\equiv \pm 3M$ $L\equiv \pm 9M$
23	$L\equiv 0;\ M\equiv 0;\ L\equiv \pm 8M;\ L\equiv \pm 2M$ $L\equiv \pm 11M$
29	$L\equiv 0;\ M\equiv 0;\ L\equiv \pm M;\ L\equiv \pm 11M$ $L\equiv \pm 2M\ L\equiv \pm 13M$
31	$L\equiv 0;\ M\equiv 0;\ L\equiv \pm 5M;\ L\equiv \pm 6M$ $L\equiv \pm 7M\ L\equiv \pm 11M$
37	$L\equiv 0;\ M\equiv 0;\ L\equiv \pm 3M;\ L\equiv \pm 7M;\ L\equiv \pm 8M$ $L\equiv \pm 9M\ L\equiv \pm 12M$
	etc. etc.

Ubi e congruentiis, quas conditionales diximus, una aliqua locum habet, erit q residuum cubicum numeri primi p; sin minus, non erit. Congruentias eas, quarum numerus $\frac{q\pm 1}{3}$, ita disposuimus, ut binarum

$$L\equiv \pm aM,$$
$$L\equiv \pm bM,$$

coëfficientes a, b in se ducti fiant $\pm 27 \pmod q$. Ubi singulae inveniuntur, quod semper fit, ubi q est formae $12n\pm 1$, erit coëfficientis quadratum $\equiv 27 \pmod q$.

Additamentum. Cl. Gaufs loco laudato (*Götting. gel. Anz.*) theorema egregium annunciavit sequens:

„Sit p numerus primus $= 4k+1$, atque resolvatur in duo quadrata $ee+ff$, designante ee quadratum impar, ff quadratum par, fore $\pm e$ residuum minimum (quod inter $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$ continetur), numeri $\frac{1}{2}\cdot\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots 2k}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ k}$, per p divisi; hoc insuper residuum minimum per 4 divisum semper residuum $+1$ relinquere; ita ut sit aut numerus negativus formae $-(4n+3)$, aut positivus formae $4n+1$."

Cuius insignis theorematis demonstrandi periculum faciens, in fontem uberrimum incidi, e quo inter alia et demanare sequentia theoremata vidi, illius simillima:

„Sit p numerus primus $= 3n+1$, ac ponatur, quod fieri posse constat, $4p = LL + 27MM$: erit L residuum minimum numeri $-\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1\ .\ 2\ \ldots\ n}$, per p divisi, quod residuum per 3 divisum semper relinquet $+1$ residuum."

„Sit p numerus primus $= 7n+1$, ac ponatur, quod licet, $p = LL + 7MM$, erit L residuum minimum numeri $\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n}{1\ .\ 2\ \ldots\ n}$, per p divisi, quod residuum per 7 divisum semper relinquet $+1$ residuum.

D. 22. m. Junii, a. 1827.

8.
Von den Keradoïden oder Spirallinien doppelter Krümmung.

(Vom Herrn *W. Horn.*)

1. Durch die Umdrehung einer beliebigen, mittelst ihrer rechtwinkligen Coordinaten x und $y = fx$ gegebenen Curve SB um ihre Axe SC, sei der Körper $BSPFE$ (Fig. 19.) erzeugt. Die Länge eines, der Abscisse x entsprechenden Bogens dieser Curve werde durch Fx ausgedrückt. Für eine beliebige bekannte Abscisse $SN = c$, sei die zugehörige Ordinate $NH = fc = r$, so wird dieselbe bei der Rotation einen Kreis $HAPI$ beschreiben, dessen Umfang $= 2r\pi$ ist. Man nehme in der Peripherie dieses Kreises irgend einen Punct A als Anfangspunct, und beliebige andere Puncte P, p an, und lege durch diese Puncte und die Axe SC, Ebenen, welche die gewölbte Oberfläche des Körpers in den Curven SAE, SPF, Spf schneiden, die der Curve SHB congruent sind und welche Meridiane heifsen sollen.

Ferner sei eine zweite beliebige Curve $\alpha\beta$ durch die rechtwinkligen Coordinaten z und Φz gegeben, auch ein Paar Coordinaten a und $b = \Phi a$ derselben bekannt.

Nimmt man nun beliebige Bogen AP in der Peripherie des Kreises $HAPI$ so an, dafs $AP : 2r\pi = \Phi z : b$, oder, wenn ψ die Länge des, dem Centriwinkel ANP entsprechenden Bogens, für den Halbmesser $= 1$, ist:

$$r\psi : 2r\pi = \Phi z : b$$

ist, und trägt auf dem durch P gehenden Meridiane SPF, die Länge der zu Φz gehörigen Abscisse z von S nach M, so dafs, wenn die zum Puncte M der Curve SPM gehörige Abscisse $SO = x$ gesetzt wird, $Fx = z$ ist, so ist der Punct M ein Punct in einer Curve von doppelter Krümmung, die sich spiralförmig um das durch SB erzeugte Konoïd oder Sphäroïd windet, und die (ihrer Aehnlichkeit mit der Gestalt der Widderhörner wegen) Keradoïde heifsen soll.

Der Kreis *HAPI* soll Grundkreis, *S* Pol der Keradoïde, der Winkel $ANP = \psi$ Polarwinkel, und der Bogen $SPM = Fx = z$ Polarabstand des Punctes *M*, der Bogen *AP* Abscisse und der Bogen *PM* Ordinate des Punctes *M* in der Keradoïde, endlich die Ebene *CSB*, durch deren Rotation der Grundkörper entstand, erzeugende Ebene, und die Curve $\alpha\beta$ erzeugende Linie heifsen.

2. Gleichung der Keradoïde.

Aus obiger Proportion $r\psi : 2r\pi = \Phi z : b$ folgt:

$$\text{I.} \quad \psi = \frac{2\pi \cdot \varphi z}{b} = \frac{2\pi}{b} \cdot \Phi(Fx).$$

(Man sieht aus dieser Gleichung, dafs die Entfernung des Grundkreises vom Pole, welche oben $= c$ gesetzt wurde, ganz willkürlich ist, und auf die Gleichung der Keradoïde gar keinen Einflufs hat, da der Halbmesser $r = fc$ des Grundkreises herausfällt.)

3. Zusatz. Man stelle sich unter *E* die beliebig erweiterte Ebene des Grundkreises vor, unter *E'* die darauf senkrechte, durch *A* und die Axe *SC* gelegte Ebene, und unter *E''* eine ebenfalls durch die Axe gelegte Ebene, welche sowohl auf *E* als auf *E'* senkrecht ist, so ist der Abstand eines Punctes *M* der Keradoïde

$$\text{von } E, = x - c;$$

$$\text{von } E', = y \cdot \sin\psi = fx \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{b} \cdot \Phi(Fx)\right);$$

$$\text{und von } E'', = y \cdot \cos\psi = fx \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{b} \cdot \Phi(Fx)\right);$$

wodurch die Lage von *M* ebenfalls völlig bestimmt ist.

4. An einem beliebigen Puncte *M* der Keradoïde eine Tangente zu ziehen.

Man stelle sich in *M* eine Tangente *MQ* der Curve *SPM* vor, welche die Ebene des Grundkreises in *Q* schneidet, desgleichen ebenfalls in *M* eine Tangente *MR* des durch *M* gelegten, mit dem Grundkreise parallelen Kreises *KML*. Legt man durch beide Tangenten eine Ebene, so ist dieselbe eine Berührungsebene der gewölbten Oberfläche des Konoïds im Puncte *M*, welche die Ebene des Grundkreises in der geraden Linie *TQ* schneidet, die mit *RM* parallel und folglich auch auf *MQ* in *Q* senkrecht ist. In dieser Berührungsebene mufs die Tangente *MT* der Keradoïde am Puncte *M* liegen, und man hat, da *TQM* ein rechter Winkel ist:

$$MQ : QT = \partial z : y\,\partial\psi, \text{ also } QT = \frac{y\,\partial\psi}{\partial z} . MQ.$$

Aber $x - c : MQ = \partial x : \partial z$, folglich $MQ = \frac{(x-c)\,\partial z}{\partial x}$

Mithin ist:

$$\text{II.} \quad QT = \frac{(x-c)\,y\,\partial\psi}{\partial x} = \frac{2\pi(x-c)\,fx\,.\,\partial\varphi(Fx)}{b\,.\,\partial x}.$$

Ferner ist $x - c : y - NQ = \partial x : \partial y$, und hieraus:

$$\text{III.} \quad NQ = \frac{y\,\partial x - (x-c)\,\partial y}{\partial x} = fx - (x-c)\,\frac{\partial fx}{\partial x}.$$

Durch NQ und QT ist aber die Lage des Punctes T, in welchem die Tangente MT der Keradoïde die erweiterte Ebene des Grundkreises schneidet, vollkommen bestimmt; mithin ist hierdurch auch die Lage dieser Tangente selbst bekannt.

5. Den Winkel γ zu finden, welchen die Tangente der Keradoïde in einem beliebigen Puncte derselben mit der Tangente des, durch denselben Punct gehenden Meridians einschliefst.

Aus der Proportion $\partial z : y\,\partial\psi = 1 : \text{tang}\,\gamma$ folgt:

$$\text{IV.} \quad \text{tang}\,\gamma = \frac{y\,\partial\psi}{\partial z} = \frac{2\pi\,.\,fx\,.\,\partial\varphi(Fx)}{b\,.\,\partial Fx}.$$

6. Rectification der Keradoïde.

Es ist, wenn die Länge eines Bogens der Curve durch v bezeichnet wird:

$$\text{V.} \quad \partial v = \sqrt{(y^2\partial\psi^2 + \partial z^2)} = \sqrt{(y^2\partial\psi^2 + \partial x^2 + \partial y^2)}.$$

7. Quadratur der Keradoïde.

Ist die Fläche, welche von einem Bogen der Keradoïde und dem zugehörigen Polarabstande begrenzt wird, $= F$, so ist:

VI. $\partial F = \frac{1}{2} z\,.\,y\,\partial\psi$, oder, da $y\,\partial\psi = \partial z\,.\,\text{tang}\,\gamma$ ist, auch

$$\partial F = \tfrac{1}{2} z\,\partial z\,.\,\text{tang}\,\gamma.$$

Anwendungen auf einige besondere Fälle.

I. Arithmetische Keradoïden.

8. Ist die Linie $\alpha\beta$ (Fig. 20.) eine gerade Linie, so soll die nach obigen Gesetzen erzeugte Curve arithmetische Keradoïde heifsen.

Es

Es sey die Entfernung des Durchschnittspunctes dieser Linie mit ihrer Axe, vom Anfangspuncte der Abscissen, oder AB (Fig. 19.) $= e$, so hat man:

$$\varphi z = \frac{z-e}{a-e}.b. \quad \text{Also nach I.}$$

$$\psi = \frac{2\pi\varphi z}{b} = \frac{2\pi(z-e)}{a-e}, \text{ und hieraus:}$$

$$\text{VII.} \quad z = e + \frac{(a-e)\psi}{2\pi}.$$

9. Für $\psi = 0$ wird $z = e$. Man nehme die Entfernung c des Grundkreises vom Pole so an, dafs $Fc = e$ ist, so wird für $\psi = 0$, der Grundkreis von der Keradoïde im Anfangspuncte A (Fig. 19.) geschnitten.

10. Ferner ergiebt sich für $z = 0$, $\psi = -\frac{2e\pi}{a-e}$. Für diesen Werth von ψ geht die Keradoïde durch den Pol.

11. Wird $\psi < -\frac{2e\pi}{a-e}$, so wird z negativ, und die Curve biegt sich in entgegengesetzten Windungen wieder um den Grundkörper herum, nachdem sie durch den Pol gegangen ist. So wird sie durch den Pol in zwei gleiche Schenkel getheilt, die beide in's Unendliche fortgehen. (Diese Schenkel würden congruent sein, wenn sie nicht nach entgegengesetzten Richtungen gewunden wären.) Die Gleichheit beider Schenkel erhellet daraus, dafs zu gleichen, aber entgegengesetzten Polarwinkeln auch gleiche, aber entgegengesetzte Polarabstände gehören. Es ist nemlich für $z = 0$, $\psi = -\frac{2e\pi}{a-e}$. Wird nun $\psi = -\frac{2e\pi}{a-e} \pm \lambda$, so ist $z = e + \frac{a-e}{2\pi}\left[-\frac{2e\pi}{a-e} \pm \lambda\right] = \pm\frac{a-e}{2\pi}.\lambda$. Dafs aber auch beide Schenkel in's Unendliche fortgehen, ist klar, weil mit ψ auch z zunimmt; und weil nun ψ ohne Ende wachsen kann, so ist für $\psi = \infty$ auch $z = \infty$.

Anmerkung. Dies gilt nicht nur für conoïdische Grundkörper, sondern auch für Sphäroïden, nur dafs bei letzteren die Keradoïden unzählige Male durch die beiden Pole gehen, und also auch den Körper unzählige Male umschlingen.

12. Ist $\psi = -\frac{4e\pi}{a-e}$, so ist $z = -e$. Ist nun $Fc = e$, so wird, für diesen Werth von ψ, der Grundkreis abermals von der Keradoïde geschnitten.

13. Wächst ψ um 2π, so ist $z' = e + \frac{(a-e)(\psi+2\pi)}{2\pi}$,

oder $z' = a + \frac{(a-e)\psi}{2\pi}$.

Aber $z = e + \frac{(a-e)\psi}{2\pi}$.

Folglich $z' - z = a - e$.

Beide Polarabstände z' und z aber liegen in einerlei Meridian, ihr Unterschied giebt daher die Höhe einer Windung, im Meridiane gemessen. Diese ist also bei jeder arithmetischen Keradoïde constant, und mithin haben alle Windungen derselben einerlei Höhe.

14. Setzt man $z - e = Fx - Fc = w$, so ist:

VIII. $w = \frac{a-e}{2\pi}.\psi$.

Für einen anderen Polarwinkel ψ' hat man eben so:

$w' = \frac{a-e}{2\pi}.\psi'$, also

$w : w' = \psi : \psi'$; d. h.:

bei jeder arithmetischen Keradoïde verhalten sich die Ordinaten (in Meridiane genommen), wie die zugehörigen Polarwinkel.

Für $\psi = 0$ ist auch $w = 0$; d. h., der Grundkreis wird von der Keradoïde im Anfangspuncte geschnitten (9.).

Für den Pol ist $w = -e$, also $\psi = -\frac{2e\pi}{a-e}$ (10.).

15. Setzt man in (8.) $e = 0$, so entsteht aus VII.

IX. $z = \frac{a\psi}{2\pi}$.

Für einen anderen Polarwinkel ψ' ist $z' = \frac{a\psi'}{2\pi}$, also $z : z' = \psi : \psi'$. Es verhalten sich also in diesem Falle die Polarabstände wie die zugehörigen Polarwinkel (vergl. mit 14.).

16. Für $\psi = 0$ wird auch $z = 0$; d. h., für $\psi = 0$ geht die Keradoïde durch den Pol (vergl. mit 14.).

17. Wächst ψ um 2π, so ist $z' = \frac{a(\psi+2\pi)}{2\pi}$, oder $z' = a + \frac{a\psi}{2\pi}$. Subtrahirt man hiervon $z = \frac{a\psi}{2\pi}$, so ergiebt sich $z' - z = a =$ der Höhe einer Windung (vergl. mit 13.),

18. Aus VII. erhält man $\partial z = \frac{a-e}{2\pi}.\partial\psi$. Setzt man diesen Werth für ∂z in die Formel IV, so ergiebt sich

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{y\,\partial\psi}{\frac{a-e}{2\pi}.\partial\psi} = \frac{2\pi y}{a-e};$$

d. h. die Tangente des Winkels, den die arithmetische Keradoïde mit dem Meridiane in einem beliebigen Puncte einschliefst, ist gleich der Peripherie des, durch diesen Punct gelegten Parallelkreises, dividirt durch die Höhe einer Windung.

19. Tangente, Rectification und Quadratur lassen sich nur finden, wenn die Gleichung für die erzeugende Ebene bekannt ist (Man sehe die folgenden Beispiele).

Beispiele von arithmetischen Keradoïden.

A. Wenn die erzeugende Ebene ein rechtwinkliges Dreieck, der Grundkörper also ein gerader Kegel ist.

20. Die Meridiane sind hier die Seiten des Kegels, und die Polarabstände mithin gerade Linien. Alle oben (von 8. bis 18.) hergeleitete Formeln gelten hier, wenn man für z eine gerade Linie $= \sqrt{(x^2+y^2)}$ annimmt.

Ist der Winkel, welchen die Hypothenuse des erzeugenden rechtwinkligen Triangels mit der Kathete, die als Axe des Kegels dient, also der Winkel, welchen die Seite des Kegels mit der Axe desselben einschliefst, $= \alpha$, so ist $z = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha} = e + \frac{(a-e)\psi}{2\pi}$.

21. Wird z negativ, so fallen die Polarabstände in die Verlängerungen der Seiten des Kegels; daher liegt der zweite Schenkel der Keradoïde nicht auf dem Grundkegel selbst, sondern auf dessen Gegenkegel, und ist dem ersten Schenkel congruent. Für $z = -e$ entsteht ein zweiter Grundkreis, der im Gegenkegel liegt, und dem ersten gleich ist.

22. Anmerkung. Da $e.\sin\alpha = r$, so ist

$$z = \frac{r}{\sin\alpha} + \frac{\left(a - \frac{r}{\sin\alpha}\right)\psi}{2\pi}.$$

Ist nun $\alpha = 90° = R$, so wird $\sin\alpha = 1$; der Mantel des Kegels aber

verwandelt sich in eine Ebene, und man erhält $z = r + \frac{(a-r)\psi}{2\pi}$, die bekannte allgemeine Gleichung für die archimedische Spirallinie. Diese gehört daher zu den arithmetischen Keradoïden.

23. Die Lage der Tangente für die auf einem geraden Kegel gezeichnete Keradoïde zu finden.

Es ist nach III.:

$$NQ = \frac{y\,\partial x - (x-c)\,\partial y}{\partial x} = \frac{x\,\partial x \,.\, \text{tang}\,\alpha - (x-c)\,\partial x \,.\, \text{tang}\,\alpha}{\partial x} = c \,.\, \text{tang}\,\alpha = r.$$

Ferner ist nach II.: $QT = \frac{(x-c)\,y\,\partial\psi}{\partial x}$.

Nun ist aber $x = z \,.\, \cos\alpha$; $c = e \,.\, \cos\alpha$; $\partial\psi = \frac{2\pi\,\partial z}{a-e}$ (aus 18.) und $\partial x = \partial z \,.\, \cos\alpha$ (aus 20.), also:

$$QT = \frac{(z-e)\cos\alpha \,.\, y \,.\, 2\pi\,\partial z}{(a-e)\cos\alpha \,.\, \partial z} = \frac{2\pi(z-e)}{a-e} \,.\, y.$$

Aber $\frac{2\pi(z-e)}{a-e} = \psi$ (8.), daher:

$$QT = y \,.\, \psi.$$

Stellt man sich daher durch den Berührungspunct einen Parallelkreis und durch den Anfangspunct eine Seite des Kegels gelegt vor, so drückt der zwischen dieser Seite und dem Berührungspuncte enthaltene Bogen dieses Parallelkreises die Länge der Linie QT aus. Der Ausdruck dieses Abstandes $QT = y \,.\, \psi$ hängt daher von der Rectification des Kreises ab.

Für $\psi = 0$ ist auch $QT = 0$. In diesem Falle liegen sowohl beide Berührungspuncte (nemlich der Keradoïde und des Grundkreises), als auch der Durchschnittspunct beider Tangenten, im Anfangspuncte A.

Für $z = 0$ erhält man aus $QT = y \,.\, \psi = \psi \,.\, z \sin\alpha$ auch $QT = 0$; folglich fällt die Tangente der Keradoïde im Pole mit der Seite des Kegels zusammen.

Für $z = \infty$ ist $QT = \infty$, also die Tangente der Keradoïde mit der Ebene des Grundkreises parallel.

24. Nach (18.) ist, wenn γ den Winkel bezeichnet, den die Tangente der Keradoïde mit der durch den Berührungspunct gehenden Seite des Kegels einschliefst:

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{2\pi y}{a-e} = \frac{2\pi \,.\, \sin\alpha}{a-e} \,.\, z.$$

Wenn z wächst, so nimmt auch γ zu. Für $z = \infty$ wird $\text{tang}\,\gamma = \infty$, also $\gamma = R$ (23.). Für $z = 0$ wird auch $\text{tang}\,\gamma = 0$, also $\gamma = 0$. Daher fällt für $z = 0$, d. h. im Pole, die Tangente der Keradoïde mit der Seite des Kegels zusammen (23.).

25. Rectification. Nach (V.) hat man $\partial v = \sqrt{(y^2 \partial \psi^2 + \partial z^2)}$. Aber $y = z \sin\alpha$ und $\partial\psi = \frac{2\pi\,\partial z}{a-e}$, mithin

$$\partial v = \partial z \,.\, \sqrt{\left[\left(\frac{2\pi \,.\, \sin\alpha}{a-e}\right)^2 . z^2 + 1\right]}.$$

Damit das Integral für $z = 0$ verschwinde, mufs man $e = 0$ setzen, und den Anfangspunct der Abscissen in B (Fig. 19.) annehmen. Alsdann ist $v = \int \partial z \sqrt{\left[\left(\frac{2\pi \sin\alpha}{a}\right)^2 + 1\right]} + C$, oder vollständig:

$$v = \frac{1}{4a\pi\sin\alpha}\left[\frac{[2\pi z \,.\, \sin\alpha + \sqrt{(4\pi^2 z^2 \sin\alpha^2 + a^2)}]^4 - a^4}{4[2\pi z \sin\alpha + \sqrt{(4\pi^2 z^2 \sin\alpha^2 + a^2)}]^2} + a^2 \,.\, \text{logn} \,.\, \frac{2\pi z \,.\, \sin\alpha + \sqrt{(4\pi^2 z^2 \,.\, \sin\alpha^2 + a^2)}}{a}\right],$$

wo, nach obiger Voraussetzung, a die Höhe einer Windung bezeichnet.

26. Quadratur. Nach (7.) ist $\partial F = \frac{1}{2} z \partial z \,.\, \text{tang}\,\gamma$. Hierin aus (24.) den Werth für $\text{tang}\,\gamma = \frac{2\pi z \sin\alpha}{a-e}$ gesetzt, giebt $\partial F = \frac{2\pi\sin\alpha}{a-e} \,.\, \frac{1}{2} z^2 \partial z$, oder wenn wie in (25.) $e = 0$ gesetzt wird,

$$F = \frac{\pi\sin\alpha}{a} \,.\, \int z^2 \,\partial z = \frac{\pi \,.\, \sin\alpha}{3a} \,.\, z^3;$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $z = 0$ das Integral verschwindet.

Für $\psi = 2\pi$ ist $z = a$, also $F = \frac{1}{3} a^2 \pi \,.\, \sin\alpha$.

B. Wenn die erzeugende Ebene ein Rechteck, der Grundkörper also ein gerader Cylinder von kreisförmiger Grundfläche ist.

27. Hier ist es am bequemsten, die Formeln in (15., 16. und 17.) zum Grunde zu legen, und also die Polarabstände vom Grundkreise an zu rechnen, der hier die Stelle des Poles vertritt. Es ist $z = \frac{a\psi}{2\pi}$ die bekannte Gleichung für die gemeine Schraubenlinie, die daher ebenfalls zum Geschlechte der arithmetischen Keradoïden gehört. — Alle oben von (8.) bis (18.) hergeleiteten Sätze gelten auch hier, und es ist hier

$y = r$ und $z = x$. Die Polarabstände, oder vielmehr die Ordinaten der Curve, sind also hier ebenfalls gerade Linien.

28. Legt man an den Cylinder eine Berührungsebene, so liegt sowohl die Tangente der Schraubenlinie, als auch die entsprechende Tangente des Grundkreises, in dieser Ebene. Die Entfernung des Durchschnittspunctes beider Tangenten von dem Berührungspuncte der letzteren, ist nach (II.): $QT = \frac{(x-c)\,y\,.\,\partial\psi}{\partial x}$.

Es ist aber $x = z$, $c = e = 0$ (der Annahme gemäfs), $y = r$, $\partial\psi = \frac{2\pi}{a}.\partial z$ und $\partial x = \partial z$, also $QT = \frac{z.r.2\pi\partial z}{a.\partial z} = r.\frac{2\pi z}{a} = r.\psi =$ der Länge des zugehörigen Bogens des Grundkreises. Die Linie, in welcher sämmtliche Durchschnittspuncte der Tangenten der Schraubenlinie mit der erweiterten Ebene des Grundkreises, liegen, ist also die Evolvente des Grundkreises.

29. Ist γ der Winkel, den die Tangente der Schraubenlinie mit der Seite des Cylinders einschliefst, so ist

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{y\,\partial\psi}{\partial z} = \frac{2y\pi\partial z}{a\partial z} = \frac{2r\pi}{a};\ \text{also constant.}$$

30. Rectification. $\partial v = \sqrt{(\partial z^2 + r^2\partial\psi^2)} = \sqrt{\left[\partial z^2 + \left(\frac{2r\pi}{a}\right)^2\partial z^2\right]}$, mithin $v = \frac{z}{a}\sqrt{(a^2 + 4r^2\pi^2)}$; wo keine Constante hinzukommt, wenn angenommen wird, dafs für $z = 0$ das Integral verschwindet, die Länge der Schraubenlinie also vom Grundkreise an gerechnet wird.

Der Factor $\sqrt{(a^2 + 4r^2\pi^2)}$ bezeichnet die Länge einer Windung, und $\frac{z}{a}$ giebt die Anzahl der Windungen an.

31. Quadratur. Da hier die Polarabstände nicht aus einem Puncte ausgehen, sondern mit einander parallel sind, so ist $\partial F = z.r\partial\psi$, oder, den Werth von $\partial\psi = \frac{2\pi}{a}.\partial z$ substituirt:

$$F = \frac{2r\pi}{a}\int z\partial z = \frac{r\pi z^2}{a}.$$

Für $z = a$ ist $F = ar\pi$.

Für $z = 2a$ ist $F' = 4ar\pi$. Wollte man diese Fläche wirklich umwickeln, so würde der Theil F von F' doppelt belegt werden; rechnet man ihn daher einmal ab, so ist der Unterschied $= 3ar\pi =$ dem

Mantel des Cylinders, so weit er von dem Grundkreise und der zweiten Windung begrenzt wird. Will man den Theil F'' zwischen zwei Windungen haben, so mufs man die Fläche F noch einmal abrechnen, und man erhält $F'' = 2arπ =$ einem Rechteck, welches den Umfang des Grundkreises zur Grundlinie, und die Höhe einer Windung zur Höhe hat.

C. Wenn die erzeugende Ebene ein Kreis, welcher sich um eine aufserhalb desselben liegende gerade Linie drehet, der Grundkörper also ein Ring ist.

32. Es sei $AEDF$ (Fig. 19.) der erzeugende Kreis des Grundkörpers, r sein Halbmesser, SC die Drehaxe, und die Entfernung BG derselben vom Mittelpunct $= p$. Nimmt man den kleinsten, mit dem Halbmesser $BA = p - r$ beschriebenen Kreis als Grundkreis an, und bedient sich, da dieser Grundkörper keine wirkliche Pole hat, der Gleichung in (14.), so ist $w = \frac{a-e}{2\pi}.\psi$, oder, der Körper wegen, $e = 0$ gesetzt, $w = \frac{a}{2\pi}.\psi$, wo w den Abstand irgend eines Punctes der Keradoïde vom Grundkreise, im Meridiane, d. h., im Bogen eines kreisförmigen Querschnitts des Ringes, mittelst einer durch die Axe gelegten Ebene, bezeichnet.

Für $w = 2nr\pi$, wo n jede positive oder negative ganze Zahl bedeuten kann, wird der Grundkreis von der Keradoïde geschnitten. Der zu solchem Durchschnittspuncte gehörige Polarwinkel ist $\psi = \frac{4nr\pi^2}{a}$. Wird derselbe $= 2m\pi$ (wo m eine ganze Zahl bezeichnet), so läuft die Keradoïde, nachdem sie den Ring n mal nach der Richtung der Axe, oder m mal nach der Richtung der Peripherie des Grundkreises umschlungen hat, wieder in den Anfangspunct und in sich selbst zurück. Letzteres folgt aus $\text{tang}\gamma = \frac{2\pi y}{a}$, indem für den ersten und letzten Punct der Keradoïde γ einerlei, und die Tangente der Keradoïde daher in beiden Puncten gemeinschaftlich ist. Uebrigens hängt die Anzahl der Windungen nur vom Halbmesser r des erzeugenden Kreises und von der Höhe a einer Windung, nicht aber von der Weite des Ringes ab, so dafs also die Keradoïden auf allen Ringen von verschiedener Weite, unter übrigens gleichen Umständen, eine gleiche Anzahl Windungen haben.

Die weitere Ausführung dieser Untersuchung sei dem Leser überlassen.

II. Logarithmische Keradoïden.

33. Ist die erzeugende Linie eine logarithmische Linie, so heifse die daraus entspringende Keradoïde logarithmische Keradoïde.

Es sei $\alpha\beta$ (Fig. 20.) eine logarithmische Linie, MN ihre Asymptote, und AB die Abscissenlinie, senkrecht auf MN; ferner $AC=a$, $CD=b$, $AE=z$, $EF=\Phi z$, so ist, wenn $AG=1$ gesetzt wird, $b:\Phi z=\log a:\log z$, also $\Phi z=\frac{b.\log z}{\log a}$. Nach (I.) ist aber $\psi=\frac{2\pi\varphi z}{b}$, also ist $\psi=\frac{2\pi}{b}.\frac{b.\log z}{\log a}$ $=\frac{2\pi\log z}{\log a}$. Folglich:

$$\text{X.}\quad \log z=\frac{\psi.\log a}{2\pi}.$$

34. Für einen anderen Polarwinkel ψ' ist $\log z'=\frac{\psi'.\log a}{2\pi}$, also $\psi:\psi'=\log z:\log z'$; es verhalten sich also bei der logarithmischen Keradoïde die Polarwinkel wie die Logarithmen der zugehörigen Polarabstände.

Für $\psi=0$ ist $\log z=0$, also $z=1$. (Nimmt man an, dafs für $\psi=0$ die Keradoïde den Grundkreis schneide, so ist der Halbmesser desselben gleich der, dem Bogen $z=1$ des Meridians zugehörigen Ordinate.)

Wird ψ negativ, so wird $\log z$ ebenfalls negativ, also $z<1$, und die Keradoïde fällt mithin zwischen den Grundkreis und ihren Pol. Für $z=0$ aber wird $\log z=-\infty$, also auch $\psi=-\infty$; folglich geht die logarithmische Keradoïde in unendlich vielen Windungen um den Grundkörper herum, bevor sie den Pol erreicht. Der Pol der Keradoïde ist daher eine Asymptote derselben.

35. Wird z negativ, so ist $\log z$ unmöglich. Die logarithmische Keradoïde hat daher nur einen Schenkel und kann nie über den Pol hinausgehen. Dies ist einleuchtend, wenn man erwägt, dafs sie erst nach unzähligen Windungen den Pol erreicht.

36. Wächst ψ um 2π, so ist $\log z'=\frac{\log a(\psi+2\pi)}{2\pi}$. Aber $\log z=$ $\frac{\log a.\psi}{2\pi}$. Folglich $\log z'-\log z=\log a$, oder $\log\frac{z'}{z}=\log a$, oder $\frac{z'}{z}=a$.

Eben so ergiebt sich, wenn z'', z''' .... die Polarabstände bezeichnen, die den Polarwinkeln $\psi+4\pi$, $\psi+6\pi$, u. s. w. entsprechen, $\frac{z''}{z'}=a$, $\frac{z'''}{z''}=a$, u. s. w.

Das

Das geometrische Verhältnifs der Polarabstände zweier aufeinander folgender Windungen ist daher constant.

Da $z : z' : z'' : z''' \ldots = 1 : a : a^2 : a^3 \ldots$, so bilden die in einerlei Meridian gemessenen Polarabstände eine geometrische Reihe, deren Exponent $= a$ ist.

37. Da nach (IV.) $\text{tang}\gamma = \frac{y\,\partial\psi}{\partial z}$, aber $\partial\psi = \frac{2\pi\partial z}{\log a . z}$ ist, so folgt $\text{tang}\,\gamma = \frac{2\pi y}{z . \log a}$.

Der Ausdruck der Lage der Tangente, so wie die Rectification und Quadratur, hängt von den Eigenschaften der erzeugenden Ebene ab. (Man sehe die folgenden Beispiele.)

Beispiele von logarithmischen Keradoïden.

A. Wenn die erzeugende Ebene ein rechtwinkliges Dreieck, der Grundkörper also ein gerader Kegel ist.

38. Die Polarabsätnde liegen in den Seiten des Kegels und sind also gerade Linien. Der Polarabstand für den Grundkreis ist $= 1$ (34.), also der Halbmesser des Grundkreises $= \sin\alpha$, wenn α den Winkel bezeichnet, den die Seite des Kegels mit der Axe einschliefst.

39. Es ist $\text{tang}\gamma = \frac{y\,\partial\psi}{\partial z}$. Aber $y = z . \sin\alpha$, und $\partial\psi = \frac{2\pi}{\log a} . \frac{\partial z}{z}$, also $\text{tang}\gamma = \frac{2\pi . \sin\alpha}{\log a}$, eine constante Gröfse. Die logarithmische Keradoïde schliefst daher in allen Puncten mit der Seite des Kegels einerlei Winkel ein.

40. Für die Lage der Tangente ergiebt sich leicht:

$NQ = \sin\alpha =$ dem Halbmesser des Grundkreises;

$QT = \frac{(z-1)\sin\alpha . 2\pi}{\log a} = (z-1)\,\text{tang}\,\gamma.$

41. Rectification. Es ist $\partial v = \sqrt{(y^2\partial\psi^2 + \partial z^2)} = \sqrt{(\partial z^2 . \text{tang}\,\gamma^2 + \partial z^2)} = \partial z\sqrt{(\text{tang}\,\gamma^2 + 1)}$; also

$$v = \frac{z . \sqrt{(4\pi^2 \sin\alpha^2 + \log a^2)}}{\log a},$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $z = 0$ das Integral verschwindet.

42. Aus (39.) folgt $\frac{2\pi . \sin\alpha}{\log a} = \text{tang}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sqrt{(1-\cos\gamma^2)}}{\cos\gamma}$, also $\frac{4\pi^2 \sin\alpha^2}{\log a^2} = \frac{1-\cos\gamma^2}{\cos\gamma^2}$, oder $\frac{4\pi^2 \sin\alpha^2 - \log a^2}{\log a^2} = \frac{1}{\cos\gamma}$, oder $\frac{\sqrt{(4\pi^2 \sin\alpha^2 - \log a^2)}}{\log a} = \frac{1}{\cos\gamma}$. Dieser Werth in (41.) substituirt, giebt:

$$v = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

Die Länge des Bogens einer, auf einem geraden Kegel verzeichneten logarithmischen Keradoïde, ist daher gleich dem zugehörigen Polarabständen, dividirt durch den Cosinus des Winkels, den die Keradoïde mit der Seite des Kegels einschliefst.

v ist also ganz unabhängig von α, und es sind mithin die zu einerlei Polarabständen gehörigen Bogen solcher logarithmischen Keradoïden, welche mit der Seite des Kegels gleiche Winkel einschliefsen, auf allen beliebigen Kegeln einander gleich.

Obiges Resultat ergiebt sich auch kürzer folgendermafsen: Es ist $\partial v = \frac{\partial z}{\cos\gamma}$, also $v = \frac{z}{\cos\gamma}$.

43. Da $z = \frac{y}{\sin\alpha}$, so ist auch $v = \frac{y}{\sin\alpha . \cos\gamma}$. Wird nun $\alpha = R$, so wird $\sin\alpha = 1$, und der Mantel des Kegels verwandelt sich in eine Ebene, die Keradoïde also in eine gewöhnliche logarithmische Spirallinie, für welche y der Polarabstand ist, und es ist daher auch hier $v = \frac{y}{\cos\gamma}$.

Eben so ist $z = \frac{x}{\cos\alpha}$; also $v = \frac{x}{\cos\alpha . \cos\gamma}$.

44. Für einen anderen Polarabstand z' hat man $v' = \frac{z'}{\cos\gamma}$, also $v : v' = z : z'$; und da, vorausgesetzt, dafs z und z' zu zwei aufeinander folgenden Windungen gehören, $z : z' = 1 : a$ ist, so folgt auch $v : v' = 1 : a$.

Die Längen der Bogen für aufeinander folgende Windungen der logarithmischen Keradoïde, die auf einem geraden Kegel gezeichnet ist, stehen daher ebenfalls in einer geometrischen Progression, deren Exponent $= a$ ist.

45. Quadratur. Man erhält leicht:

$$F = \tfrac{1}{2} z^2 . \frac{\pi . \sin\alpha}{\log a} = \tfrac{1}{4} z^2 . \text{tang}\,\gamma,$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $z = 0$ das Integral verschwindet.

B. Wenn die erzeugende Ebene ein Rechteck, der Grundkörper also ein gerader Cylinder von kreisförmiger Grundfläche ist.

46. Nimmt man einen, auf der Axe des Cylinders senkrechten Querschnitt desselben als Grundkreis an, so giebt es in der Entfernung $= 1$, einen damit parallelen Kreis, über welchen die Keradoïde nie hinausgehen kann, und den sie auch erst erreicht, nachdem sie sich unzählige Male um den Cylinder, in immer engeren Windungen herumgewunden hat. Dieser Kreis, von welchem die Polarabstände an gerechnet werden, kann Polar- oder Scheitelkreis heifsen (vergl. 34. u. 35.). Er hat die Eigenschaft einer Asymptote, dafs nemlich die Curve sich ihm immer mehr nähert, ihn aber erst in unendlicher Entfernung berührt.

Auf der anderen Seite des Grundkreises hingegen, schlingt sich die Keradoïde in immer weiteren Windungen bis in's Unendliche fort.

47. Da $\text{tang}\gamma = \frac{y\,\partial\psi}{\partial z}$ und $y = r$; $\partial\psi = \frac{2\pi}{\log a}\cdot\frac{\partial z}{z}$ ist, so erhält man $\text{tang}\gamma = \frac{2r\pi}{z.\log a}$.

Für $z = 0$, ist $\text{tang}\,\gamma = \infty$, also $\gamma = R$. Es fällt daher für $z = 0$ die Tangente der Keradoïde mit der Tangente des Scheitelkreises zusammen.

Für $z = \infty$ ist $\text{tang}\gamma = 0$, also $\gamma = 0$; daher fällt für $z = \infty$ die Tangente der Keradoïde mit der Seite des Cylinders zusammen.

Für $z = \frac{2r\pi}{\log a}$ ist $\gamma = 45°$.

48. Die Lage der Tangente zu finden, erhält man

$NQ = y - (x-c)\frac{\partial y}{\partial x}$; aber $y = r$, also $\partial y = 0$, folglich $NQ = y = r$.

Ferner $QT = \frac{(x-c)y\,\partial\psi}{\partial x}$. Nun ist $x = z$, $\partial x = \partial z$, $c = 1$, $y = r$ und $\partial\psi = \frac{2\pi}{\log a}\cdot\frac{\partial z}{z}$, folglich $QT = \frac{2r\pi(z-1)}{z.\log a} = \text{tang}\gamma.(z-1)$.

49. Rectification. Es ist $\partial v = \sqrt{(y^2\partial\psi^2 + \partial z^2)} = \frac{\partial z}{z}\sqrt{\left[\left(\frac{2r\pi}{\log a}\right)^2 + z^2\right]}$.

Setzt man $\left(\frac{2r\pi}{\log a}\right)^2 = A$, und $\sqrt{(A+z^2)} = u$, so entsteht $\partial v = \frac{u^2\,\partial u}{-A+u^2}$,

und daher ist: $v = \int \frac{u^2 \partial u}{-A+u^2}$; oder nach den Integraltafeln von M. Hirsch, pag. 48, $v = u + A\int \frac{\partial u}{-A+u^2}$, und ebendaselbst pag. 47, $v = u + A.\frac{1}{2\sqrt{A}}.\log n.\frac{\sqrt{-A}+u\sqrt{-1}}{\sqrt{-A}-u\sqrt{-1}} + C$, oder

$$v = \sqrt{\left[\left(\frac{2r\pi}{\log a}\right)^2 + z^2\right]} + \frac{r\pi}{\log a}.\log n.\frac{\left[\frac{2r\pi}{\log a} + \sqrt{\left(\left(\frac{2r\pi}{\log a}\right)^2 + z^2\right)}\right]^2}{z^2} + C.$$

Rechnet man die Länge des Bogens vom Grundkreise an, so verschwindet das Integral für $z = 1$, und man erhält alsdann vollständig:

$$v = \frac{\sqrt{[(2r\pi)^2 + z^2 \log a^2]} - \sqrt{[(2r\pi)^2 + \log a^2}}{\log a} + \frac{r\pi}{\log a}.\log n \frac{2r\pi + \sqrt{[(2r\pi)^2 + z^2 \log a^2]}}{z^2[2r\pi + \sqrt{((2r\pi)^2 + \log a^2)}]}.$$

50. Quadratur. Da die Ordinaten oder Polarabstände hier parallel sind, so ist $\partial F = zr\partial\psi = \frac{2r\pi}{\log a}.\partial z$, also $F = \frac{2r\pi}{\log a}.z + C = z^2 \operatorname{tang}\gamma + C$. Für $z = 1$ ist aber $F = 0$, also vollständig $F = (z-1)\frac{2r\pi}{\log a}$. Setzt man QT (in 48.) $= s$, so ist $F = z.s$.

Anmerkung. Je nachdem die erzeugende Linie eine Parabel, Hyperbel, ein Kreis u. s. w. ist, können die daraus entspringenden Keradoïden parabolisch, hyperbolisch, circulär u. s. w. heifsen. Ihre Eigenschaften lassen sich eben so, wie oben bei einigen arithmetischen und logarithmischen Keradoïden geschahe, aus den Gleichungen für die erzeugende Linie und die erzeugende Ebene finden.

9.
Ueber den Stillstand der Planeten.

(Vom Herrn *Joseph L. Raabe.*)

Es ist interessant, das Problem über den scheinbaren Stillstand der Planeten ganz allgemein, ohne irgend eine Vernachläfsigung, aufzulösen; denn man findet dieses Problem überall nur so aufgelöset, dafs weder auf die Neigung der Planetenbahnen gegen die Erdbahn, noch auf die Excentricitäten beider Bahnen Rücksicht genommen wird, wodurch dann eine Bedingungs-Gleichung entsteht, die wenigstens für unser Planeten-System nicht passend ist.

Im Anfange, als ich mich zur Lösung dieses Problems anschickte, dachte ich blofs eine Bedingungsgleichung aufzufinden, die den Stillstand in geocentrischer Länge des Planeten anzeigen soll, allein der Endausdruck wird so sehr complicirt, dafs ich ihn nicht werth hielt öffentlich mitzutheilen; besonders fand ich ihn ganz nutzlos, bei der Untersuchung über den allgemeinen Stillstand eines Planeten, indem mir die letztere Untersuchung einen bei weitem einfachern Endausdruck gab, und zugleich den Vortheil einschliefst die Aufgabe in ihrem ganzen Umfange zu lösen.

Erst nach der Vollendung dieser Untersuchung erhielt ich Nachricht von dem eleganten Problem des Herrn Dr. Gaufs: „Ueber die Grenzen der geocentrischen Orte der Planeten." Beim Lesen dieser Auflösung fand ich meine Bedingungs-Gleichungen (welche ich in der Folge anzeigen werde), ganz übereinstimmend mit den Bedingungs-Gleichungen des Herrn Dr. Gaufs, und dieses läfst schliefsen, dafs beide Aufgaben auf ein und dasselbe hinauslaufen und dafs die eine als Folge der anderen anzusehen ist.

Wir wollen zur Auflösung über den scheinbaren Stillstand der Planeten schreiten:

Es schneiden sich drei unter einander senkrechte Coordinaten-Ebenen im Mittelpunct der Sonne, die Ebene der xy falle mit der Ekliptik

zusammen, die Ebene der xz gehe durch die Knotenlinie der Planetenbahn in der Ebene der Ekliptik, und die Ebene der yz stehe auf der Ebene der xz senkrecht. Ferner seien:

x, y, z die Coordinaten des Planeten in Bezug auf diese Ebenen;
x', y', z' die Coordinaten der Erde auf denselben coordinirten Ebenen;
r, r' die Radii vectores des Planeten und der Erde;
u, u' die Argumente der Breite des Planeten und der Erde;
g, g' die Argumente der Breiten der Aphelien der Planetenbahn und der Erdbahn;
f, f' die halben Parameter beider Bahnen;
fe, $f'e'$ ihre Excentricitäten;
k die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn des Planeten in der Ekliptik;
n die Neigung beider Ebenen.

Dies vorausgesetzt, hat man folgende Werthe für die Coordinaten des Planeten und der Erde:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos u \\ y &= r\sin u\cos n \\ z &= r\sin u\sin n \\ x' &= r'\cos(u'-k) \\ y' &= r'\sin(u'-k) \\ z' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}).$$

Die Gröfsen $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ drücken, wie bekannt, die Lage des Planeten gegen die Erde aus. Sind nun λ und β die geocentrische Länge und Breite des Planeten, so wie ϱ die Distanz derselben von der Erde, so hat man:

$$\begin{aligned} x-x' &= \varrho\cos\beta\cos(\lambda-k) \\ y-y' &= \varrho\cos\beta\sin(\lambda-k) \\ z-z' &= \varrho\sin\beta. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen findet man durch Division:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tang}(\lambda-k) &= \frac{y-y'}{x-x'} \\ \mathrm{tang}\,\beta &= \frac{z-z'}{\sqrt{[(y-y')^2+(x-x')^2]}} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}).$$

Nun ist, wie bekannt, ein jedes sphärisches Dreieck gegeben, wenn drei beliebige Stücke desselben als bekannt vorausgesetzt werden. Sind

diese drei Stücke constant, so ist kein zweites Dreieck möglich, was von dem ersten verschieden wäre, und die drei constanten Stücke mit demselben gemeinschaftlich hätte. Soll nun der Planet, von der Erde aus gesehen, stille stehen, so mufs das rechtwinklige sphärische Dreieck, welches von den Bogen der gröfsten Kreise $(\lambda - k)$ und β gebildet wird, ein constantes für diesen Augenblick bleiben, und dieses wird dann statt finden, wenn das Dreieck, aufser dem constanten rechten Winkel, noch die ihn einschliefsenden Seiten $(\lambda - k)$ und β constant hat, d. h., für den Augenblick des Stillstandes müssen, sowohl die geocentrische Länge als Breite, beide zugleich als constante Gröfsen angesehen werden.

Man hat daher folgende zwei Bedingungs-Gleichungen:

$$d\lambda = 0; \quad d\beta = 0.$$

Es sind aber λ sowohl als β Functionen von u und u', wie es die Gleichungen (I) und (II) zeigen, daher findet statt der vorigen zwei Bedingungs-Gleichungen folgende mit ihnen gleichlautende Statt:

$$0 = \left(\frac{d\lambda}{du}\right) du + \left(\frac{d\lambda'}{du'}\right) du',$$

$$0 = \left(\frac{d\beta}{du}\right) du + \left(\frac{d\beta'}{du'}\right) du'.$$

Verbindet man diese zwei Gleichungen durch Elimination von $\frac{du}{du'}$, so erhält man folgende Bedingungs-Gleichung für einen Stillstand:

$$\left(\frac{d\lambda}{du}\right)\left(\frac{d\beta}{du'}\right) = \left(\frac{d\lambda}{du'}\right)\left(\frac{d\beta}{du}\right) \quad \text{(III)}.$$

Nimmt man die partiellen Differentialien $\left(\frac{d\lambda}{du}\right)$, $\left(\frac{d\lambda}{du'}\right)$ . . . aus den Gleichungen (II), und bemerkt, dafs x, y, z Functionen von u, und x', y', z' Functionen von u' sind, so erhält man, da z' gleich Null ist, folgende mit der letzterer gleich bedeutende Gleichung:

$$0 = dx'(y\,dz - z\,dy) + dy'(z\,dx - x\,dz) + dz(x'\,dy' - y'\,dx') \quad \text{(III')},$$

wo unter dx, dy, dz verstanden wird: $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dz}{du}$; eben so: dx', dy', ist $\frac{dx'}{du'}$, $\frac{dy'}{du'}$.

Diese Gleichung zeigt, dafs für einen Stillstand die Tangente an den Planeten in seiner Bahn und die Tangente an der Erde in ihrer Bahn in einer und derselben Ebene liegen.

Um dieses nachzuweisen, wollen wir folgendes bemerken. Die Gleichung der Tangente an der Bahn des Planeten ist:

$$\left.\begin{aligned} X-x &= (Z-z)\frac{dx}{dz} \\ Y-y &= (Z-z)\frac{dy}{dz} \end{aligned}\right\} \quad (a).$$

Die Gleichung der Tangente an der Erdbahn wird seyn:

$$\left.\begin{aligned} X-x' &= (Y-y')\frac{dx'}{dy'} \\ Z-z' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (b).$$

Die Gleichung einer Ebene, die durch den Punct X, Y, Z und durch den Planeten geht, ist:

$$(X-x)+A(Y-y)+B(Z-z)=0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den Gleichungen (a), so erhält man eine Bedingungs-Gleichung, welche ausdrückt, dafs die Tangente an den Planeten in die angenommene Ebene fällt. Man hat also:

$$0=\frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}.A+B.$$

Die Gleichung derselben Ebene aber, die durch denselben Punct X, Y, Z und durch die Erde geht, wird seyn:

$$(X-x')+A(Y-y')+B(Z-z')=0,$$

und diese mit den Gleichungen (b) verbunden, erhält man eine Bedingungs-Gleichung, unter welchen auch die Tangente an der Erdbahn mit der gesagten Ebene zusammenfällt. Man hat also ebenfalls:

$$0=\frac{dx'}{dy'}+A.$$

Aus diesen beiden erhaltenen Bedingungs-Gleichungen erhält man die Werthe für A und B, welche sind:

$$A=-\frac{dx'}{dy'},$$

$$B=-\frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}.\frac{dx'}{dy'},$$

und da die Gleichung derselben Ebene, wenn man annimmt, dafs sie durch den Planeten und durch die Erde geht, seyn mufs:

$$(x-x')+A(y-y')+B(z-z')=0,$$

so erhält man, wenn man die eben gefundenen Werthe für A und B substituirt, die Gleichung (III′).

Um

Um aus der Gleichung (III′) noch eine Bedingungs-Gleichung zwischen u und u' zu erhalten, darf man blofs aus (I) die Werthe für x, y, z ... nehmen und auch deren Differentialien suchen, wo dann noch zu bemerken ist, dafs:

$$r = \frac{f}{1 - e\cos(u-g)},$$

$$r' = \frac{f'}{1 - e'\cos(u'-g')},$$

wo man dann erhält:

$$dx = -\frac{f[\sin u - e\sin g]}{[1-e\cos(u-g)]^2},$$

$$dy = +\frac{f\cos n\,[\cos u - e\cos g]}{[1-e\cos(u-g)]^2},$$

$$dz = +\frac{f\sin n\,[\cos u - e\cos g]}{[1-e\cos(u-g)]^2},$$

$$dx' = -\frac{f'[\sin(u'-k) - e'\sin(g'-k)]}{[1-e'\cos(u'-g')]^2},$$

$$dy' = +\frac{f'[\cos(u'-k) - e'\cos(g'-k)]}{[1-e'\cos(u'-g')]^2},$$

und diese Werthe in (III′) substituirt, erhält man zuerst:

$$y\,dz - z\,dy = 0,$$

$$z\,dx - x\,dz = -r^2\sin n,$$

$$x'\,dy' - y'\,dx' = r'^2,$$

und dann die Endgleichung:

$$f'[\cos u - e\cos g] = f[\cos(u'-k) - e'\cos(g'-k)] \quad \text{(III″)}.$$

Und die Gleichungen (III), (III′), (III″) sind die oben angeführten, welche Dr. Gaufs bei der Auflösung seines erwähnten Problems ebenfalls erhielt.

Die Endgleichung (III″), wiewohl sie von der Neigung der Bahn des Planeten gegen die der Erde ganz unabhängig ist, findet doch für den besondern Fall nicht statt, wo man die Neigung gleich Null setzt, denn in diesem Falle geht das oben angenommene constante sphärische Dreieck in einen constanten Bogen eines gröfsten Kreises über. Weil nemlich dann der Planet keine Bewegung in Breite hat, so ist dann auch eine Bedingungs-Gleichung, nemlich $d\beta = 0$, zu viel, und für diesen besonderen Fall ist blofs $d\lambda = 0$ die Bedingungs-Gleichung für den Stillstand.

Dann findet auch die allgemeine Gleichung für den Fall nicht statt, wo die Bahn des Planeten senkrecht auf der Erdbahn wäre, weil dann die Bedingungs-Gleichung $d\lambda = 0$ überflüssig war; denn die Länge

eines solchen Planeten wäre, in welchem Puncte seiner Bahn er auch immer seyn möchte, gleich der Länge des aufsteigenden Knotens. Es bleibt daher für diesen besonderen Fall blofs die Bedingungs-Gleichung übrig: $d\beta = 0$.

Da aber bei unserm Planetensystem kein einziger Planet sich vorfindet, dessen Bahn mit der Erdbahn zusammenfiele, oder senkrecht auf sie wäre, so wollen wir diese Fälle als nicht existirend übergehen, und die Gleichung (III″) drückt die Relation zwischen u und u' für irgend einen Stillstand von was immer für einen Planeten aus. Eben so drückt die Gleichung (III″) bei Herrn Gaufs das Verhältnifs von u zu u' aus, für den Fall, wenn der Planet an der äufsersten Grenze seiner Zone ist.

Wir können also hieraus folgern: Wenn der Planet gegen die Erde die äufserste Grenze seines Zodiacus erreicht hat, so ist er gegen die Erde für diesen Augenblick im Stillstande, und umgekehrt: wenn ein Stillstand statt findet, so ist der Planet an der äufsersten Grenze seiner Zone.

1. Anmerkung für die unteren Planeten.

Da bei den untern Planeten f' gröfser ist als f, und aus der Gleichung (III″) folgt:

$$\cos(u'-k) = \frac{f'}{f}\cos u - \frac{[f'e\cos g - fe'\cos(g'-k)]}{f},$$

so sieht man, dafs nicht jeder Werth für u reelle Werthe für $u'-k$ geben wird, denn alle Werthe für u, welche $\cos(u'-k)$ gröfser als $+1$ und kleiner als -1 geben, drücken Unmöglichkeiten aus. Es sind daher $+1$ und -1 die Grenzwerthe von $\cos(u'-k)$. Geht für diese zwei Werthe von $u'-k$, u in u_1 und u_2 über, so hat man:

$$\cos u_1 = \frac{f+[f'e\cos g - fe'\cos(g'-k)]}{f'},$$

$$\cos u_2 = \frac{-f+[f'e\cos g - fe'\cos(g'-k)]}{f'}.$$

Alle Werthe also für u, die zwischen u_1 und u_2 fallen, lassen zwei Werthe für $u'-k$ zu, unter der Bedingnifs aber, wenn u_1 und u_2 selbst mögliche Gröfsen sind, d. h., für solche untere Planeten, wo man hat:
$f' \geqq [f'e\cos g - fe'\cos(g'-k)] \pm f$, oder, wo man hat:

$$f' \mp f \geqq [f'e\cos g - fe'\cos(g'-k)].$$

Wenn diese letztere Bedingungs-Gleichung statt findet, kann man für jeden Werth von $u'-k$ zwei Werthe für u finden, die aber zwischen die Grenzen von u_1 und u_2 fallen werden, und das Ganze spricht sich folgendermafsen aus: Für einen jeden Stand der Erde in ihrer Bahn lassen sich

zwei Orte in der Bahn des Planeten auffinden, für welche ein Stillstand statt finden wird; hingegen für jeden Stand des Planeten in seiner Bahn sind nicht immer Orte in der Erdbahn da, für welche ein Stillstand des Planeten statt finden wird, bis auf die zwischen den oben aufgefundenen Grenzen u_1 und u_2 in der Bahn des Planeten.

2. Anmerkung für die oberen Planeten.

Ganz wie im vorigen Falle wird man hier finden, weil f gröfser als f' ist, dafs nur dann mögliche Werthe für u sind, wenn $u'-k$ zwischen den Grenzen von u'_1-k und u'_2-k liegt, wo man hat:

$$\cos(u'_1-k) = \frac{f'+[fe'\cos(g'-k)-f'e\cos g]}{f},$$

$$\cos(u'_2-k) = \frac{-f'+[fe'\cos(g'-k)-f'e\cos g]}{f},$$

wo dann noch die Bedingungs-Gleichung für alle oberen Planeten statt finden mufs:

$$f \mp f' \geqq fe'\cos(g'-k)-f'e\cos g,$$

und hier ist es gerade umgekehrt wie in der Anmerkung 1., nemlich: nicht an jedem Orte der Erdbahn kann ein Stillstand eines Planeten statt finden, sondern an denjenigen Orten der Erdbahn, die zwischen den Grenzen u'_1-k und u'_2-k fallen; hingegen lassen sich immer für einen jeden Stand des Planeten in seiner Bahn zwei Orte in der Erdbahn auffinden, die zwischen besagten Grenzen u'_1-k und u'_2-k fallen, von welchen aus ein Stillstand bemerkbar sein wird. —

Zum Beschlufs dieser Aufgabe wollen wir noch die Relation zwischen u und u' ausmitteln, damit ein Planet in seiner Opposition oder in seiner Conjunction sei.

Für diesen Augenblick ist, wie bekannt, die Ebene, die durch den Planet, die Erde und die Sonne gelegt wird, senkrecht auf die Ebene der Ekliptik; und aus dieser Voraussetzung wollen wir die Bedingungs-Gleichung dafür ausmitteln.

Des Unterschiedes willen wird die oben gebrauchte Bezeichnung so beibehalten werden, dafs wir, statt wie oben die kleinen Buchstaben des Alphabets gebraucht zu haben, hier die grofsen Buchstaben vorkommen werden. Wir wollen also zur Auflösung schreiten:

Die Gleichung einer Ebene, die durch den Planeten geht, ist:

$$X+AY+BZ+C=0.$$

Die Gleichung derselben Ebene, wenn sie durch die Erde gehen soll, ist:

$$X'+AY'+BZ'+C=0,$$

und die Bedingung, dafs sie auch durch die Sonne geht, ist, weil da selbst der Anfang der Coordinaten ist,

$$C = 0.$$

Endlich, die Bedingung, dafs die gelegte Ebene auf die Ebene der Ekliptik oder auch auf die Ebene der XY senkrecht ist, wird man erhalten, wenn man den Cosinus ihrer Neigung gegen die Ebene der XY gleich Null setzt, also:

$$\frac{B}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}} = 0.$$

Findet man aus den zwei ersten Gleichungen der Ebene den Werth für B, und setzt solchen gleich Null, so erhält man eine Bedingungs-Gleichung für eine Opposition oder Conjunction:

$$XY' - YX' = 0,$$

und die Werthe aus (I) für X, Y, ... genommen, so hat man folgende Relation zwischen U und U':

$$0 = \cos U \sin(U' - K) - \sin U \cos(U' - K) \cos N.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der Gleichung (III''), mit Berücksichtigung der Anmerkungen 1. und 2., kann man für jeden Stand des Planeten in seiner Bahn die entsprechenden Orte der Erde in ihrer Bahn auffinden, von wo aus ein Stillstand und eine Opposition oder Conjunction des ersteren statt finden wird, und eben so für jeden Stand der Erde in ihrer Bahn die entsprechenden Orte in der Planetenbahn.

Aus denselben beiden Gleichungen kann man auch die Stücke der Bahnen berechnen zwischen einem Stillstande und einer Opposition oder Conjunction.

10.

Einiges über die Integration der Differentialgleichung der zweiten Ordnung (Pfaffschen)

$$x^2(a+bx^n)\,d^2y^1 + x(c+ex^n)\,dy^1\,dx + (f+gx^n)\,y^1\,\partial x^2 = M\,\partial x^2.$$

(Vom Herrn *C. G. Sauer.*)

Die Integration dieser Gleichung hängt bekanntlich von einer Gleichung von derselben Form ab, in der $n=1$ und $M=0$ ist. Euler hat sie, wie man weifs, in einem allgemeinen Falle und in 9 anderen (wie er glaubte) speciellen bewirkt, und hielt sie wegen ihrer Anwendung für sehr wichtig. Hiedurch hat sich auch Pfaff veranlafst gefunden, eine neue Untersuchung über die Integration dieser Gleichung anzustellen. Man findet ihr Resultat in der zweiten Abhandlung seiner *disquisitionum analyticarum* p. 135. ff. Er hat nemlich die Gleichung von der Form:

$$x^2(a+bx)\,d^2y + x(c+ex)\,dy\,\partial x + (f+gx)\,y\,\partial x^2 = 0,$$

auf 3 verschiedene Arten transformirt, indem er $y = x^p(a+bx)^q.v$ setzt, und so bewirkt, dafs die Integration dieser letzteren Gleichung sich auf die einer Gleichung von derselben Form bringen läfst, worin $f=0$, und die sich dann durch x ohne Rest dividiren läfst. Die so erhaltene Gleichung transformirt er wieder auf ähnliche Weise, und bestimmt p und q so, dafs eine Gleichung von derselben Form bleibt. Die dadurch erhaltenen 4 Gleichungen reducirt er (jede) auf eine andere, indem er eine Gleichung von ähnlicher Form annimmt, diese r mal differentiirt und die so gewonnene Gleichung mit den als gegeben betrachteten übereinstimmig macht. In diese reducirten Gleichungen wird dadurch eine willkürliche ganze Zahl r gebracht. Je zwei von diesen reducirten Gleichungen verbindet er nun so mit einander, dafs er die vorgegebene erst aus einer Formel reducirt, und diese reducirte wieder aus der anderen, wobei er das r der ersten Formel mit ϱ, das der zweiten mit r bezeichnet. Auf diese Weise 4 neue reducirte Gleichungen erhaltend, findet er, dafs die ursprünglich gegebene Gleichung integrirbar sei, wenn

1) $f+pc+p(p-1)a=0$; $g+(p\pm rn)e+(p\pm rn).(p\pm rn-1)b=0$;

2) $e=b\left(\frac{c}{a}+(\frac{1}{2}+r+\varrho)n\right)$; $f=\frac{a}{4}\left(\left(\frac{c}{a}-1\right)^2-n^2(\frac{1}{2}-r+\varrho)^2\right)$;

3) $e=b\left(\frac{c}{a}+(\frac{1}{2}+r+\varrho)n\right)$; $g=\frac{b}{4}\left(\left(\frac{e}{b}-1\right)^2-n^2(\frac{1}{2}-r+\varrho)^2\right)$;

4) $f=\frac{a}{4}\left(\left(\frac{c}{a}-1\right)^2-n^2(\frac{1}{2}-r-\varrho)^2\right)$; $g=\frac{b}{4}\left(\left(\frac{e}{b}-1\right)^2-n^2(1-r+\varrho)^2\right)$;

wo p willkürlich ist, r und ϱ aber beliebige ganze Zahlen sind. Pfaff glaubt so alle integrirbare Fälle ermittelt zu haben (s. p. 138 b. der *disq. anal.*).

Seine reducirte Gleichung, die unter der Form:
$x(a+bx)d^2z+(c+(\varrho-r)a+(e-2rb)x)dz\partial x+(g-re+r(r+1)b)z\partial x^2=0$,
die 4 verschiedenen reducirten Gleichungen enthält, indem r und ϱ beide, oder nur eins, ihr Zeichen ändern, läfst sich jedoch noch auf eine andere reduciren, wenn man $x=X^2$ und dann $c+(\varrho-r)a=\frac{1}{2}a$ setzt, nachher eine dieser Gleichung der Form nach ähnliche annimmt, diese π mal differentiirt, wodurch sie die Form
$(a+bX^2)\partial^{\pi+2}\omega+(e^1+2\pi b)X\partial\omega\partial x+(g^1-\pi e^1+\pi(\pi-1)b)\omega\partial x^2=0$
bekommt. Hieraus ergeben sich: $\frac{\partial^\pi\omega}{(dX)^\pi}=z$, $e^1+2\pi b=2(e-(2r+\frac{1}{2})b)$ und $g^1-\pi e^1+\pi(\pi-1)b=4(g-re+r(r+1)b)$ gesetzt, die Werthe von e^1 und g^1 in der angenommenen Gleichung. Ist nun in dieser Gleichung der Coefficient von $v=0$, oder sind die beiden ersten Glieder ein genaues Differential, so ist bekanntlich die Integration dieser Gleichung möglich, und dadurch auch die der vorgegebenen. Sucht man jetzt die Bedingungsgleichungen für die Integrirbarkeit der ursprünglich gegebenen Gleichung, so wird man finden, dafs die Fälle unter 2, 3 und 4 allgemeiner, und zwar die speciellen Fälle derselben vermehrt werden, indem in die eine der beiden Gleichungen noch π eintritt. Der erste wird es auch, aber nicht für ein willkürliches p, sondern nur für ein p, was durch eine ähnliche Bedingungsgleichung, wie die Gröfsen unter 2, 3 und 4, dem Werthe nach, beschränkt wird. Verlangt man ein negatives π, was zuweilen nöthig ist, so darf man nur $d^\pi v(a+bX^2)^q$ statt $\partial^\pi\omega$ setzten, und q so bestimmen, dafs die Gleichung ganz dieselbe Form behält. Man wird freilich finden, dafs nur $\pi=\pm 1$ etwas Neues liefert, und deshalb die Anzahl der speciellen Fälle nach Pfaff nur beinahe ver-

doppelt wird. — Die eben gezeigte Methode ist übrigens nur deshalb gewählt worden, damit die integrirbaren Fälle unter allgemeinerer Form, nicht in einer gröfsern Anzahl erscheinen möchten; denn es ist sehr wahrscheinlich, dafs man alles Neue auch erhalten werde, wenn man die Gleichung

$$(a+bx^2)\partial^2 z + 2(e-(2r+\tfrac{1}{2})b)x\partial z\partial x + 4(g-re+r(r+1)b)z\partial x^2 = 0$$

auf die eben angegebene Weise transformirt hätte.

Auch wird man leicht bemerken, dafs bei diesem Verfahren die eine der ganzen Zahlen r oder $\varrho = 0$ sein kann, wenn π eine willkürliche ganze Zahl bleibt. Es tritt indefs dabei der Uebelstand ein, dafs x in derselben Formel für y zweierlei Werthe hat. Diesem läfst sich freilich durch das Verfahren abhelfen, was Herr Prof. Scherkh in seiner Inaugural-Dissertation gelehrt hat; es dürfte aber dadurch an Kürze wohl nichts gewonnen werden.

Andere Bemerkungen zu machen und in nähere Erörterungen einzugehen, unterlasse ich hauptsächlich aus dem Grunde, weil es wenig Interesse zu haben scheint, einige integrirbare Fälle einer Differentialgleichung aufzufinden, da man die Gleichung allgemein, d. h., den etwa zu machenden Anwendungen genügend, zu integriren weifs.

Naumburg a. Q., im Mai 1827.

11.
Aufgaben und Lehrsätze,
erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

Geometrische Aufgaben und Lehrsätze von Hrn. J. Steiner,

(Verfasser der Abhandlungen No. 5., 18., 25., 31. und 32. im ersten und No. 5. und 6. im zweiten Bande dieses Journals).

1. Aufgabe. Wenn in einer Ebene drei beliebige Kreise einander in einem Punct schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, dafs wenn A, B, C ihre übrigen Durchschnitte mit den Kreisen sind, die Abschnitte AB, BC der Geraden ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben.

2. Aufgabe. Wenn im Raume vier beliebige Kugeln einander in einem Punct schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, dafs wenn A, B, C, D die Puncte sind, in welchen sie den Kugelflächen aufserdem begegnet, ihre Abschnitte AB, BC, CD gegebene Verhältnisse zu einander haben.

3. Aufgabe. Wenn ein gegebenes (irreguläres) Vieleck (n Eck) so beschaffen ist, dafs sowohl in als um dasselbe ein Kreis beschrieben werden kann, so soll man zwischen den Radien (r, R) der beiden Kreise und dem Abstande (a) ihrer Mittelpuncte von einander eine Gleichung finden. (Für das Dreieck ist diese zuerst von Euler gefundene Gleichung bekanntlich $a^2 = R^2 - 2rR$.)

4. Aufgabe. Wenn in einer Ebene zwei beliebige in einander liegende Kreise solche Lage zu einander haben, dafs man zwischen denselben eine Reihe von n Kreisen so beschreiben kann, dafs jeder jene beiden Kreise, und dafs sie einander der Reihe nach berühren, so soll man zwischen den Radien jener beiden Kreise und dem Abstande ihrer Mittelpuncte von einander eine Gleichung finden. (Man sehe Band I. S. 256 dieses Journals.)

5. Aufgabe. Jeder beliebige Punct in der Ebene eines gegebenen geradlinigen Dreiecks kann einer der Brennpuncte eines Kegelschnitts sein, der alle drei Seiten des Dreiecks berührt. Man soll nun untersuchen, welche Lage der Punct in Beziehung auf das Dreieck haben müsse, damit der Kegelschnitt entweder Parabel, oder Ellipse, oder Hyperbel sei?

6. Aufgabe. Fället man aus irgend einem Peripheriepunct P, des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises, Lothe auf die Seiten des Dreiecks, so liegen bekanntlich die Fufspuncte dieser drei Lothe allemal in irgend einer Geraden G. Man soll nun denjenigen Punct P finden, für welchen die ihm zugehörige Gerade G mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

7. Lehrsatz. Halbirt man in einem Viereck im Kreise, sowohl die Winkel zwischen den Diagonalen, als auch die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten einschliefsen, so sind von den 6 Geraden, welche diese Winkel halbiren, 3 und 3 parallel.

8. Lehrsatz. Vier beliebige Geraden in einer Ebene bilden, zu drei und drei genommen, vier Dreiecke. In jedem dieser Dreiecke schneiden die drei Lothe aus den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten einander in einem Punct, und diese vier Puncte liegen allemal in einer Geraden.

9. Lehrsatz. Vier beliebige Puncte in der Peripherie eines gegebenen Kreises bestimmen, zu dreien genommen, vier Dreiecke. Die vier Puncte, in welchen die Lothe aus den Spitzen dieser vier Dreiecke auf die gegenüberliegenden Seiten einander schneiden, liegen allemal in der Peripherie eines Kreises, welcher dem gegebenen Kreise gleich ist.

10. Lehrsatz. Fället man aus den Ecken eines beliebigen (irregulairen) Tetraëders auf die gegenüberliegenden Seitenebenen Lothe, so schneiden diese vier Lothe einander im Allgemeinen nicht. Schneiden sich aber, in einem besondern Falle, irgend zwei derselben, so schneiden alle vier einander in einem und demselben Puncte. Im Allgemeinen aber haben die genannten vier Lothe die merkwürdige Eigenschaft, dafs jede Gerade, welche durch irgend drei derselben geht, auch das vierte schneidet, d. h., dafs durch jeden beliebigen Punct, den man in einem der vier Lothe annimmt, allemal eine Gerade so gelegt werden kann, dafs sie die drei übrigen Lothe schneidet.

11. Lehrsatz. Vier der Gröfse und Lage nach gegebene Kugeln können im Allgemeinen von 16 bestimmten Kugeln berührt werden; gehen sie aber durch unendliche Vergröfserung in vier Ebenen über, die ein Tetraëder (beliebige dreiseitige Pyramide) bilden, so bleiben von jenen 16 Kugeln, im Allgemeinen, nur noch 8 übrig, d. h., es giebt im

Allgemeinen 8 Kugeln, von denen jede die vier Seitenebenen eines gegebenen Tetraëders berührt. Von diesen 8 Kugeln ist *a*) eine dem Tetraëder eingeschrieben; *b*) von vier andern berührt jede die Aufsenseite einer Seitenebene und die Verlängerungen der drei übrigen; und *c*) jede der drei übrigen Kugeln berührt alle Seitenebenen in ihrer Verlängerung und zwar zwei Seitenebenen auf ihrer Aufsenseite.

Bezeichnet man nun den Radius der Kugel (*a*) durch R, die Radien der Kugeln (*b*), nach der Ordnung ihrer Gröfse, durch R_1, R_2, R_3, R_4, wo nemlich der letzte der gröfste ist, und die Radien der Kugeln (*c*), nach der Ordnung ihrer Gröfse, durch R_5, R_6, R_7, so hat man zwischen diesen Radien unter andern folgende merkwürdige Relationen:

I. $$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}=\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}=\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_7},$$

II. $$\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\pm\frac{1}{R_7}=0,$$

III. $$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2}+\frac{1}{R_4^2}=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_5^2}+\frac{1}{R_6^2}+\frac{1}{R_7^2},$$ u. s. w.

Sind von den Seitenebenen des Tetraëders drei zu einander senkrecht, so hat man z. B. auch noch folgende Gleichungen:

IV. $$\frac{1}{R_4-R}=\frac{1}{R_1+R_7}+\frac{1}{R_2+R_6}+\frac{1}{R_3+R_5},$$

V. $$\frac{1}{RR_4}=\frac{1}{R_1R_7}+\frac{1}{R_2R_6}+\frac{1}{R_3R_5}.$$

12. Lehrsatz. Beschreibt man in einem beliebigen dreikantigen Körperwinkel eine Reihe Kugeln, von denen jede die drei Seitenebenen desselben berührt, und die einander der Ordnung nach berühren, so bilden die Radien dieser Kugeln, ihrer Gröfse nach, eine geometrische Progression. Sind z. B. a, b, c die Winkel, welche die Kanten des Körperwinkels mit einander bilden, und setzt man die Radien zweier nach einander folgender Kugeln R_1 und R_2, und zur Abkürzung $a+b+c=2s$, so ist der Exponent der genannten Progression:

I. $$\frac{R_2}{R_1}=\left[\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}+\sqrt{\left(1+\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}\right)}\right]^2.$$

Oder sind A, B, C die drei Flächenwinkel des Körperwinkels, und man setzt zur Abkürzung $A+B+C=2S$, so ist:

II. $$\frac{R_2}{R_1}=\left[\frac{\sqrt{[-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)]}}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}+\sqrt{\left(1+\frac{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}\right)}\right]^2.$$

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

Aufgaben von Anderen.

13. Grenzen für die Zahl der imaginairen Wurzeln einer algebraischen Gleichung von einem beliebigen Grade, aus den gegebenen Coefficienten der Gleichung zu finden.

14. Aus der Gleichung

$(a_1+x)^{\frac{1}{2}} + (a_2+x)^{\frac{1}{2}} + (a_3+x)^{\frac{1}{2}} + (a_4+x)^{\frac{1}{2}} + (a_5+x)^{\frac{1}{2}} + (a_6+x)^{\frac{1}{2}} = 0,$

wo a_1, a_2, a_3, ... a_6 beliebige, von einander verschiedene, gegebene Grösen sind, x zu finden.

15. Man kann beweisen, dafs die Zahl π, welche die Länge des Umfanges eines Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser 1 ist, desgleichen ihr Quadrat, nothwendig irrationale Zahlen sind. (Man sehe z. B. Legendre *géométrie, note IV.*) Nachzuweisen, ob, und wenn es angehet, wie sich beweisen lasse, dafs, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, auch π^n nothwendig irrational ist?

16. In der Reihe

$$x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 2x^7 \ldots,$$

welche gleich

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} \ldots\ldots + \frac{x^n}{1-x^n} \ldots\ldots$$

ist, sind die Coefficienten der verschiedenen Glieder, wie Lambert bemerkt hat, gleich den Zahlen der ganzzahligen Divisoren der Exponenten der nemlichen Glieder, so dafs von allen Gliedern, deren Coefficienten 2 sind, und nur von diesen Gliedern die Exponenten Primzahlen sind. Man verlangt durch einen endlichen Ausdruck diese Lambertsche Reihe zu summiren.

17. Die Bernoullischen Zahlen, die Differenz-Coefficienten und die Facultäten-Coefficienten allgemein durch Producte von der Form $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \ldots$ auszudrücken.

18. Die Gröfse $a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$ nach a und der Zahl x der Exponenten zu entwickeln. Diese Zahl x ist z. B. in der Gröfse $a^{a^{a^a}}$ gleich 3.

19. Aus dem Cardanischen Ausdruck der Wurzeln der Gleichungen vom dritten Grade, oder demjenigen durch trigonometrische Linien, die Wurzeln der Gleichung $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ für den Fall herzuleiten, wenn $a_0 = 0$ ist.

20. $X = 0$ sei eine beliebige algebraische Gleichung, z. B. vom *n*ten Grade, wie

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} \ldots + a_n = 0.$$

$Y = 0$ sei diejenige Gleichung, deren Wurzeln bestimmte Potestäten, z. B. die *m*ten Potestäten der Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind. Alsdann lassen sich bekanntlich die Coefficienten der Gleichung $Y = 0$ aus den Coefficienten der Gleichung $X = 0$ finden. Es fragt sich, ob sich auch, wenn nicht alle Coefficienten der Gleichung $X = 0$, sondern statt der fehlenden einige Coefficienten der Gleichung $Y = 0$ gegeben sind, die übrigen Coefficienten der beiden Gleichungen finden lassen, und wenn es angehet, wie.

21. Aus den gegebenen Seiten eines Vielecks im Kreise von einer beliebigen Seitenzahl, den Inhalt des Vielecks und den Halbmesser des Kreises zu finden. Dieses kann gefordert werden, weil alle Vielecke im Kreise mit den nemlichen Seiten, in welcher Ordnung auch die bestimmten Seiten auf einander folgen mögen, offenbar gleich grofs sind, auch alle diese Vielecke nothwendig in gleichen Kreisen liegen.

22. Unter allen Kreis-Abschnitten von gleichem Umfange, die kleiner sind als der halbe Kreis, und unter allen beliebigen Kreis-Ausschnitten von gleichem Umfange die kleinsten zu finden.

23. Ein Körper, der aus einer gleichartigen, dichten und als vollkommen unelastisch betrachteten Masse bestehet, deren Cohäsionskraft gegeben ist, und der die Form eines senkrechten, kreisförmigen Cylinders mit parallelen Grundflächen hat, dessen senkrechte Höhe, wenn man will, gegen den Durchmesser nur klein ist, ruhet mit dem Rande der kreisförmigen, unteren Grund-Ebene wagerecht auf einer festen Unterstützung. Im Mittelpunct der oberen Grund-Ebene wirkt senkrecht auf dieselbe, also in lothrechter Richtung, eine Kraft. Zu finden, wie grofs diese Kraft, mit oder auch ohne Rücksicht auf das Gewicht des Cylinders, sein mufs, um denselben zu zerbrechen, und in welcher Linie der Cylinder brechen wird.

24. Die Gestalt eines Hohlspiegels zu finden, der die Strahlen eines kugelförmigen leuchtenden Körpers von gegebenem Durchmesser so wenig als möglich zerstreut, oder so nahe als möglich dieselben parallel wirft.

12.

Recherches sur les fonctions elliptiques.

(Par M. *N. H. Abel.*)

Depuis longtems les fonctions logarithmiques, et les fonctions exponentielles et circulaires ont été les seules fonctions transcendantes, qui ont attiré l'attention des géomètres. Ce n'est que dans les derniers tems, qu'on a commencé à en considérer quelques autres. Parmi celles-ci il faut distinguer les fonctions, nommées elliptiques, tant pour leurs belles propriétés analytiques, que pour leur application dans les diverses branches des mathématiques. La première idée de ces fonctions a été donnée par l'immortel Euler, en démontrant, que l'équation séparée

$$1. \quad \frac{\partial x}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}} + \frac{\partial y}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4)}} = 0$$

est intégrable algébriquement. Après Euler, Lagrange y a ajouté quelque chose, en donnant son élégante théorie de la transformation de l'intégrale $\int \frac{R.\partial x}{\sqrt{[(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)]}}$, ou R est une fonction rationelle de x. Mais le premier et, si je ne me trompe, le seul, qui ait approfondi la nature de ces fonctions, est *M.* Legendre, qui, d'abord dans un mémoire sur les fonctions elliptiques, et ensuite dans ses excellents exercices de mathématiques, a développé nombre de poropriétés élégantes de ces fonctions, et a montré leur application. Lors de la publication de cet ouvrage, rien n'a été ajouté à la théorie de M. Legendre. Je crois, qu'on ne verra pas ici sans plaisir des recherches ultérieures sur ces fonctions.

En général on comprend sous la dénomination de fonctions elliptiques, toute fonction, comprise dans l'intégrale

$$\int \frac{R\,\partial x}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}},$$

où R est une fonction rationelle et α, β, γ, δ, ε sont des quantités constantes et réelles. M. Legendre a démontré, que par des substitu-

tions convenables on peut toujours ramener cette intégrale à la forme

$$\int \frac{P\partial y}{\sqrt{(a+by^2+cy^4)}},$$

où P est une fonction rationelle de y^2. Par les réductions convenables, cette intégrale peut être ensuite ramenée à la forme

$$\int \frac{A+By^2}{C+Dy^2} \cdot \frac{\partial y}{\sqrt{(a+by^2+cy^4)}},$$

et celle-ci à:

$$\int \frac{A+B\sin^2\theta}{C+D\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}},$$

où c est réel, et moindre que l'unité.

De là suit, que toute fonction elliptique peut être réduite à l'une des trois formes:

$$\int \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}}; \int \partial\theta\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}; \int \frac{\partial\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}},$$

auxquelles M. Legendre donne les noms de fonctions elliptiques de la première, seconde et troisième espèce. Ce sont ces trois fonctions, que M. Legendre a considérées; surtout la première, qui a les propriétés les plus remarquables et les plus simples.

Je me propose, dans ce mémoire, de considérer la fonction inverse, c'est-à-dire la fonction $\varphi\alpha$, déterminée par les équations

$$\alpha = \int \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}} \text{ et}$$
$$\sin\theta = \varphi(\alpha) = x.$$

La dernière équation donne

$$\partial\theta.\sqrt{(1-\sin^2\theta)} = \partial.\varphi\alpha = \partial x,$$

donc

$$\alpha = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.$$

M. Legendre suppose c^2 positif, mais j'ai remarqué, que les formules deviennent plus simples, en supposant c^2 négatif, $= -e^2$. De même j'écris pour plus de symmétrie $1-c^2x^2$ au lieu de $1-x^2$. En sorte que la fonction $\varphi\alpha = x$ sera donnée par l'équation

$$\alpha = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}},$$

ou bien

$$\varphi'\alpha = \partial\alpha.\sqrt{[(1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha)]}.$$

Pour abréger, j'introduis deux autres fonctions de α, savoir:

$$f\alpha = \sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)}; \; F\alpha = \sqrt{(1+e^2\varphi^2\alpha)}.$$

Plusieurs propriétés de ces fonctions se déduisent immédiatement des propriétés connues de la fonction elliptique de la première espèce, mais d'autres sont plus cachées. Par ex. on démontre, que les équations $\varphi\alpha = 0$, $f\alpha = 0$, $F\alpha = 0$ ont un nombre infini de racines, qu'on peut trouver toutes. Une des propriétés les plus remarquables est, qu'on peut exprimer rationellement $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$ (m étant un nombre entier) en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Aufsi rien n'est plus facile, que de trouver $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, lorsqu'on connoît $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$; mais le problème inverse, savoir de déterminer $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$ est plus difficile, parcequ'il dépend d'une équation d'un degré plus élevé (savoir du degré m^2).

La solution de cette équation est l'objet principal de ce mémoire. D'abord on fera voir, comment ont peut trouver toutes les racines, au moyen des fonctions φ, f, F. On traitera ensuite de la solution algébrique de l'equation en question, et on parviendra à ce résultat remarquable, que $\varphi\left(\frac{\alpha}{m}\right)$; $f\left(\frac{\alpha}{m}\right)$; $F\left(\frac{\alpha}{m}\right)$ peuvent être exprimés en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, au moyen d'une fonction, qui, par rapport à α, ne contient d'autres irrationalités que des radicaux. Cela produit une classe très générale d'équations, qui sont resolubles algébriquement. Il est à remarquer, que les expressions des racines contiennent des quantités constantes, qui, en général, ne sont pas exprimables par des quantités algébriques. Ces quantités constantes dépendent d'une équation du degré $m^2 - 1$. On fera voir comment, au moyen de fonctions algébriques, on peut en ramener la solution à celle d'une équation du degré $m + 1$. On donnera plusieurs expressions des fonctions $\varphi(2n+1)\alpha$; $f(2n+1)\alpha$; $F(2n+1)\alpha$ en fonctions de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. On en déduira ensuite les valeurs de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en fonctions de α. On démontrera, que ces fontions peuvent être décomposées en un nombre infini de facteurs, et même en une infinité de fractions partielles.

§. I.

Propriétes fondamentales des fonctions $\varphi\alpha$; $f\alpha$; $F\alpha$.

1.

En supposant, que $\varphi\alpha = x$ (1.), on aura en vertu de ce qui précède:

2. $$\alpha = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

Par là on voit, que α, considéré comme fonction de x, est positif depuis $x = 0$, jusqu'à $x = \frac{1}{c}$. En faisant donc

$$3.\quad \frac{\omega}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}},$$

il est évident, que $\varphi\alpha$ et positif et va en augmentant depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{\omega}{2}$, et qu'on aura

$$4.\quad \varphi(0) = 0,\quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c}.$$

Parceque α change de signe, lorsqu'on écrit $-x$ à la place de x; il en est de même de la fonction $\varphi\alpha$ par rapport à α, et par conséquent on aura l'équation

$$5.\quad \varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha).$$

En mettant dans (1.) xi au lieu de x (ou i, pour abréger, représente la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$) et désignant la valeur de α par βi, il viendra

$$6.\quad xi = \varphi(\beta i) \text{ et } \beta = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)]}}.$$

β est réel et positif depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{e}$, donc en faisant

$$7.\quad \frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-e^2x^2)(1+c^2x^2)]}},$$

x sera positif, depuis $\beta =$ zéro jusqu'à $\beta = \frac{\varpi}{2}$, c'est-à-dire, la fonction $\frac{1}{i}\varphi(\beta i)$ sera positive entre les mêmes limites. En faisant $\beta = \alpha$ et $y = \frac{\varphi(\alpha i)}{i}$, on a

$$\alpha = \int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-e^2y^2)(1+c^2y^2)]}},$$

donc on voit, qu'en supposant c au lieu de e et e au lieu de c,

$\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ se changera en $\varphi\alpha$.

Et parceque $f\alpha = \sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)}$,
$F\alpha = \sqrt{(1+e^2\varphi^2\alpha)}$,

on voit, que par le changement de c en e et e en c, $f(\alpha i)$ et $F(\alpha i)$ rentreront respectivement en $F\alpha$ et $f\alpha$. Enfin les équations (2.) et (7.) font voir, que par la même transformation, ω et ϖ rentreront respectivement en ϖ et ω.

Suivant (7.) on aura $x = \frac{1}{e}$ pour $\beta = \frac{\varpi}{2}$, donc en vertu de l'équation $xi = \varphi(\beta i)$, il viendra

$$8. \quad \varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right) = i \cdot \frac{1}{e}.$$

2.

En vertu de ce qui précède, on aura les valeurs de $\varphi\alpha$ pour toute valeur réelle de α, comprise entre $-\frac{\omega}{2}$ et $+\frac{\omega}{2}$, et pour toute valeur imaginaire de la forme βi de cette quantité, si β est une quantité continue entre les limites $-\frac{\varpi}{2}$ et $+\frac{\varpi}{2}$. Il s'agit maintenant de trouver la valeur de cette fonction pour une valeur quelconque, réelle ou imaginaire, de la variable. Pour y parvenir, nous allons d'abord établir les propriétés fondamentales des fonctions φ, f et F.

Parcequ'on a

$$f^2\alpha = 1 - c^2\varphi^2\alpha,$$
$$F^2\alpha = 1 + e^2\varphi^2\alpha,$$

on aura, en différentiant:

$$f\alpha \cdot f'\alpha = -c^2\varphi\alpha \cdot \varphi'\alpha,$$
$$F\alpha \cdot F'\alpha = e^2\varphi\alpha\,\varphi'\alpha,$$

Or d'après (2.) on a

$$\varphi'\alpha = \sqrt{[(1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha)]} = f\alpha \cdot F\alpha,$$

donc, en substituant cette valeur de $\varphi'\alpha$ dans les deux équations précédentes, on trouvera, que les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ sont liées entre elles par les équations

$$9. \quad \begin{cases} \varphi'\alpha = f\alpha \cdot F\alpha, \\ f'\alpha = -c^2\varphi\alpha \cdot F\alpha, \\ F'\alpha = e^2\varphi\alpha \cdot f\alpha. \end{cases}$$

Cela posé, je dis, qu'en désignant par α et β deux indéterminées, on aura

$$10. \quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varphi\alpha \cdot f\beta \cdot F\beta + \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot F\alpha}{1 + e^2c^2 \cdot \varphi^2\alpha \cdot \varphi^2\beta}, \\ f(\alpha+\beta) = \dfrac{f\alpha \cdot f\beta - c^2 \cdot \varphi\alpha \cdot \varphi\beta \cdot F\alpha \cdot F\beta}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha \cdot \varphi^2\beta}, \\ F(\alpha+\beta) = \dfrac{F\alpha \cdot F\beta + e^2 \cdot \varphi\alpha \cdot \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot f\beta}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha \cdot \varphi^2\beta}. \end{cases}$$

Ces formules peuvent être déduites sur le champ des propriétés connues des fonctions elliptiques *); mais on peut aussi les vérifier aisement de la manière suivante.

*) Legendre Exercices de calcul intégral.

En désignant par r le second membre de la première des équations (10.), on aura, en differentiant par rapport à α:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right) = \frac{\{\varphi'\alpha . f\beta . F\beta + \varphi\beta . F\alpha . f'\alpha + \varphi\beta . f\alpha . F'\alpha\}}{1 + e^2 c^2 \varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}$$

$$- \frac{(\varphi\alpha . f\alpha . F\beta + \varphi\beta . f\alpha . F\alpha) . 2e^2 c^2 \varphi\alpha . \varphi^2\beta . \varphi'\alpha}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2}.$$

En substituant pour $\Phi'\alpha$, $f'\alpha$, $F'\alpha$ leurs valeurs données par les équations (9.), il viendra

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right) = \frac{f\alpha . F\alpha . f\beta . F\beta}{1 + e^2 c^2 \varphi^2\alpha . \varphi^2\beta} - \frac{2e^2 c^2 \varphi^2\alpha . \varphi^2\beta . f\alpha . f\beta . F\alpha . F\beta}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2}$$

$$+ \frac{\varphi\alpha . \varphi\beta . \{1 + e^2 c^2 \varphi^2\alpha\varphi^2\beta\}\{-c^2 F^2\alpha + e^2 f^2\alpha\} - 2e^2 c^2 \varphi\alpha\varphi\beta . \varphi^2\beta . f^2\alpha . F^2\alpha}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2\alpha\varphi^2\beta)^2},$$

d'où, en substituant pour $f^2\alpha$ et $F^2\alpha$ leurs valeurs: $1 - c^2\Phi^2\alpha$, $1 + e^2\Phi^2\alpha$, et en réduisant, on tire

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right) = \frac{(1 - e^2 c^2 \varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)\{(e^2 - c^2) - \varphi\alpha . \varphi\beta + f\alpha . f\beta . F\alpha . F\beta\} - 2e^2 c^2 \varphi\alpha\varphi\beta(\varphi^2\alpha + \varphi^2\beta)}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2}.$$

Maintenant α et β entrent symétriquement dans l'expression de r; donc on aura la valeur de $\left(\frac{\partial r}{\partial \beta}\right)$, en permutant α et β dans la valeur de $\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)$. Or par cela l'expression de $\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)$ ne change pas de valeur, donc on aura $\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right) = \left(\frac{\partial r}{\partial \beta}\right)$.

Cette équation aux différentielles partielles fait voir que r est fonction de $\alpha + \beta$; donc on aura

$$r = \psi(\alpha + \beta).$$

La forme de la fonction ψ se trouvera, en donnant à β une valeur particulière. En supposant par ex. $\beta = 0$, et remarquant que $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 1$, $F(0) = 1$, les deux valeurs de r deviendront

$$r = \varphi(\alpha) \quad \text{et} \quad r = \psi(\alpha),$$

donc

$$\psi(\alpha) = \varphi(\alpha),$$

et de là

$$r = \psi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha + \beta).$$

La première des formules (10.) a donc lieu effectivement.

De la même manière on verifiera les deux autres formules.

3.

Des formules (10.) on peut en déduire une foule d'autres. Je vais rapporter quelques-unes des plus remarquables: Pour abréger je fais

$$11.\quad 1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha . \varphi^2 \beta = R.$$

En changeant d'abord le signe de β, on obtiendra

$$12.\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\beta) + \varphi(\alpha-\beta) = \frac{2\varphi\alpha . f\beta . F\beta}{R}, \\ \varphi(\alpha+\beta) - \varphi(\alpha-\beta) = \frac{2\varphi\beta . f\alpha . F\alpha}{R}, \\ f(\alpha+\beta) + f(\alpha-\beta) = \frac{2f\alpha . f\beta}{R}, \\ f(\alpha+\beta) - f(\alpha-\beta) = \frac{-2c^2 . \varphi\alpha . \varphi\beta . F\alpha . F\beta}{R}, \\ F(\alpha+\beta) + F(\alpha-\beta) = \frac{2F\alpha . F\beta}{R}, \\ F(\alpha+\beta) - F(\alpha-\beta) = \frac{2e^2 . \varphi\alpha . \varphi\beta . f\alpha . f\beta}{R}. \end{cases}$$

En formant le produit de $\varphi(\alpha+\beta)$ et $\varphi(\alpha-\beta)$, on trouvera

$$\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varphi\alpha . f\beta . F\beta + \varphi\beta . f\alpha . F\alpha}{R} . \frac{\varphi\alpha . f\beta . F\beta - \varphi\beta . f\alpha . F\alpha}{R}$$

$$= \frac{\varphi^2\alpha . f^2\beta . F^2\beta - \varphi^2\beta . f^2\alpha . F^2\alpha}{R^2},$$

ou, en substituant les valeurs de $f^2\beta$, $F^2\beta$, $f^2\alpha$, $F^2\alpha$ dans $\varphi\beta$ et $\varphi\alpha$:

$$\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varphi^2\alpha - \varphi^2\beta - e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^4\beta + e^2c^2\varphi^2\beta . \varphi^4\alpha}{R^2}$$

$$= \frac{(\varphi^2\alpha - \varphi^2\beta)(1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)}{R^2};$$

or $R = 1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta$, donc

$$13.\quad \varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varphi^2\alpha - \varphi^2\beta}{R}.$$

On trouvera de même

$$14.\quad \begin{cases} f(\alpha+\beta).f(\alpha-\beta) = \frac{f^2\alpha - c^2\varphi^2\beta . F^2\alpha}{R} = \frac{f^2\beta - c^2\varphi^2\alpha . F^2\beta}{R} \\ \quad = \frac{1 - c^2\varphi^2\alpha - c^2\varphi^2\beta - c^2e^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}{R} = \frac{f^2\alpha . f^2\beta - c^2(c^2+e^2)\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}{R}, \\ F(\alpha+\beta).F(\alpha-\beta) = \frac{F^2\alpha + e^2\varphi^2\beta . f^2\alpha}{R} = \frac{F^2\beta + e^2\varphi^2\alpha . f^2\beta}{R} \\ \quad = \frac{1 + e^2\varphi^2\alpha + e^2\varphi^2\beta - e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}{R} = \frac{F^2\alpha . F^2\beta - e^2(c^2+e^2)\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}{R}. \end{cases}$$

4.

En faisant dans les formules (10.) $\beta = \pm\frac{\varpi}{2}$, $\beta = \pm\frac{\varpi}{2}i$, et remarquant, que $f\left(\pm\frac{\omega}{2}\right) = 0$, $F\left(\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = 0$, on aura

$$15.\quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha \pm \frac{\omega}{2}\right) = \pm\varphi\frac{\omega}{2}\cdot\frac{f\alpha}{F\alpha};\ f\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right) = \mp\frac{F\frac{\omega}{2}}{\varphi\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{\varphi\alpha}{F\alpha}; \\ F\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right) = \frac{F\frac{\omega}{2}}{F\alpha}; \\ \varphi\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \pm\varphi\frac{\varpi}{2}i\cdot\frac{F\alpha}{f\alpha};\ F\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \mp\frac{f\frac{\varpi}{2}i}{\varphi\frac{\varpi}{2}i}\cdot\frac{\varphi\alpha}{f\alpha}; \\ f\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{f\frac{\varpi}{2}i}{f\alpha}; \end{cases}$$

ou bien:

$$16.\quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right) = \pm\frac{1}{c}\cdot\frac{f\alpha}{F\alpha};\ f\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right) = \mp\sqrt{(e^2+c^2)}\cdot\frac{\varphi\alpha}{F\alpha}; \\ F\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{(e^2+c^2)}}{c}\cdot\frac{1}{F\alpha}; \\ \varphi\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \pm\frac{i}{e}\cdot\frac{F\alpha}{f\alpha};\ F\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \pm i\sqrt{(e^2+c^2)}\cdot\frac{\varphi\alpha}{f\alpha}; \\ f\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{\sqrt{(e^2+c^2)}}{e}\cdot\frac{1}{f\alpha}. \end{cases}$$

De là on tire sur le champ:

$$17.\quad \begin{cases} \varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right);\ f\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right) = -f\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right); \\ F\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right) = F\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right); \\ \varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right);\ F\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = -F\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right); \\ f\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = f\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right); \end{cases}$$

$$18.\quad \varphi\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right).\varphi\left(\alpha+\frac{\varpi}{2}i\right) = \pm\frac{i}{c\,e};\ F\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right).F\alpha = \frac{b}{c};\ f\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right).f\alpha = \frac{b}{e}.$$

En faisant $\alpha = \frac{\omega}{2}$ et $\frac{\varpi}{2}i$, on trouve de là

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right) = \tfrac{1}{0},\ f\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right) = \tfrac{1}{0},\ F\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right) = \tfrac{1}{0}.$$

Ensuite

Ensuite les équations (17.), en y mettant dans les trois premières $\alpha + \frac{\omega}{2}$ au lieu de α, et dans les trois dernières $\alpha + \frac{\varpi}{2} i$ au lieu de α, donnent les suivantes

$$19.\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\omega) = -\varphi\alpha;\ f(\alpha+\omega) = -f\alpha;\ F(\alpha+\omega) = F\alpha; \\ \varphi(\alpha+\varpi i) = -\varphi\alpha;\ f(\alpha+\varpi i) = f\alpha;\ F(\alpha+\varpi i) = -F\alpha; \end{cases}$$

et en mettant $\alpha+\omega$ et $\alpha+\varpi i$ au lieu de α:

$$20.\quad \begin{cases} \varphi(2\omega+\alpha) = \varphi\alpha;\ \varphi(2\varpi i+\alpha) = \varphi\alpha;\ \varphi(\omega+\varpi i+\alpha) = \varphi\alpha; \\ f(2\omega+\alpha) = f\alpha;\ f(\varpi i+\alpha) = f\alpha; \\ F(\omega+\alpha) = F\alpha;\ F(2\varpi i+\alpha) = F\alpha. \end{cases}$$

Ces équations font voir, que les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ sont des fonctions périodiques. On en déduira sans peine les suivantes, où m et n sont deux nombres entiers positifs ou négatifs:

$$21.\quad \begin{cases} \varphi((m+n)\omega+(m-n)\varpi i+\alpha) = \varphi\alpha;\ \varphi((m+n)\omega+(m-n+1)\varpi i+\alpha) = -\varphi\alpha; \\ f(2m\omega+n\varpi i+\alpha) = f\alpha;\quad f((2m+1)\omega+n\varpi i+\alpha) = -f\alpha; \\ F(m\omega+2n\varpi i+\alpha) = +F\alpha;\ F(m\omega+(2n+1)\varpi i+\alpha) = -F\alpha. \end{cases}$$

Ces formules peuvent aussi s'écrire comme il suit:

$$22.\quad \begin{cases} \varphi(m\omega+n\varpi i\pm\alpha) = \pm(-1)^{m+n}.\varphi\alpha, \\ f(m\omega+n\varpi i\pm\alpha) = (-1)^m.f\alpha, \\ F(m\omega+n\varpi i\pm\alpha) = (-)^n.F\alpha. \end{cases}$$

On peut remarquer comme cas particuliers:

$$22'.\quad \begin{cases} \varphi(m\omega\pm\alpha) = \pm(-1)^m.\varphi\alpha;\quad \varphi(n\varpi i\pm\alpha) = \pm(-1)^n.\varphi\alpha; \\ f(m\omega\pm\alpha) = (-1)^m.f\alpha;\quad f(n\varpi i\pm\alpha) = f\alpha; \\ F(m\omega\pm\alpha) = F\alpha;\quad F(n\varpi i\pm\alpha) = (-1)^n.F\alpha. \end{cases}$$

5.

Les formules qu'on vient d'établir, font voir qu'on aura les valeurs des fonctions $\varphi\alpha$; $f\alpha$; $F\alpha$ pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable, lorsqu'on les connoît pour les valeurs réelles de cette quantité, comprises entre $\frac{\omega}{2}$ et $-\frac{\omega}{2}$ et pour les valeurs imaginaires de la forme βi, où β est comprise entre $\frac{\varpi}{2}$ et $-\frac{\varpi}{2}$.

En effet, supposons qu'on demande la valeur des fonctions $\varphi(\alpha+\beta i)$, $f(\alpha+\beta i)$, $F(\alpha+\beta i)$, où α et β sont des quantités réelles quelconques. En mettant dans les formules (10.) βi à la place de β, il est clair, qu'on aura les trois fonctions dont il s'agit, exprimées par les fonctions: $\varphi\alpha$; $f\alpha$; $F\alpha$; $\varphi(\beta i)$; $f(\beta i)$; $F(\beta i)$. Il ne reste donc, qu'à déterminer ces der-

nières. Or, quelles que soient les valeurs de α et β, on peut toujours trouver deux nombres entiers m et n, tels que $\alpha = m.\omega \pm \alpha'$, $\beta = n\varpi \pm \beta'$, où α' est une quantité comprise entre 0 et $+\frac{\omega}{2}$, et β' entre 0 et $+\frac{\varpi}{2}$. Donc on aura, en vertu des équations (22.), en substituant les valeurs précédentes de α et β:

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha) &= \Phi(m\omega \pm \alpha') = \pm(-1)^m.\Phi\alpha', \\
f(\alpha) &= f(m\omega \pm \alpha') = (-1)^m.f\alpha', \\
F(\alpha) &= F(m\omega \pm \alpha') = F\alpha', \\
\Phi(\beta i) &= \Phi(+n\varpi i \pm \beta' i) = \pm(-1)^n.\Phi(\beta' i), \\
f(\beta i) &= f(n\varpi i \pm \beta' i) = f(\beta' i), \\
F(\beta i) &= F(n\varpi i \pm \beta' i) = (-1)^n.F(\beta' i).
\end{aligned}$$

Donc les fonctions $\Phi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, $\Phi(\beta i)$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ seront exprimées comme on vient de le dire et par suite aussi les fonctions $\Phi(\alpha+\beta i)$; $f(\alpha+\beta i)$; $F(\alpha+\beta i)$.

Nous avons vu précédemment, que $\Phi\alpha$ est réel depuis $\alpha = -\frac{\omega}{2}$ jusqu'à $\alpha = +\frac{\omega}{2}$, et que $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ est réel depuis $\alpha = -\frac{\varpi}{2}$ jusqu'à $\alpha = +\frac{\varpi}{2}$.

Donc en vertu des équations (22.) il est clair:

1) que $\Phi(\alpha)$ et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ sont réels pour toute valeur réelle de α; $\Phi\alpha$ est compris entre $-\frac{1}{c}$ et $+\frac{1}{c}$, et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ entre $-\frac{1}{e}$ et $+\frac{1}{e}$;

2) que $\Phi(\alpha)$ s'évanouit pour $\alpha = m\omega$, et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ pour $\alpha = m\varpi$, m étant un nombre entier positif ou négatif; mais $\Phi(\alpha)$ n'est pas nul pour aucune autre valeur réelle de α.

En remarquant, que $f\alpha = \sqrt{(1 - c^2\Phi^2\alpha)}$, $F\alpha = \sqrt{(1 + e^2\Phi^2\alpha)}$, il suit de ce que nous venons de dire:

1) que les fonctions $f(\alpha)$; $F(\alpha)$; $f(\alpha i)$; $F(\alpha i)$ sont réelles pour toute valeur de α;

2) que $f(\alpha)$ est compris entre les limites -1 et $+1$ et $F(\alpha)$ entre les limites $+1$ et $+\sqrt{\left(1+\frac{e^2}{c^2}\right)}$, ensorte que $F\alpha$ est positif pour toute valeur réelle de α;

3) que $f(\alpha i)$ est positif et compris entre les limites $+1$ et $\sqrt{\left(1+\frac{c^2}{e^2}\right)}$ et $F(\alpha i)$ entre les limites -1 et $+1$ pour toute valeur réelle de α;

4) que $f(\alpha)$ s'évanouit pour $\alpha = (m + \frac{1}{2})\omega$ et $F(i\alpha)$ pour $\alpha = (m + \frac{1}{2})\varpi$; mais pour nulle autre valeur de α.

On remarquera ce qui suit comme corrollaires qu'on tire des formules (22.):

1) Soit $\alpha = 0$. Dans ce cas, en remarquant, que $\Phi(0) = 0$, $f(0) = 1$, $F(0) = 1$, on aura

$$23. \quad \begin{cases} \Phi(m\omega + n\varpi i) = 0, \\ f(m\omega + n\varpi i) = (-1)^m, \\ F(m\omega + n\varpi i) = 1. \end{cases}$$

2) Soit $\alpha = \frac{\omega}{2}$. En vertu des équations:

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c}; \quad f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0; \quad F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{b}{c};$$

on aura

$$24. \quad \begin{cases} \Phi((m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i) = (-1)^{m+n} \cdot \frac{1}{c}, \\ f((m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i) = 0, \\ F((m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i) = (-1)^n \cdot \frac{b}{c}. \end{cases}$$

3) Soit $\alpha = \frac{\varpi}{2} i$. En vertu des équations

$$\Phi\left(\frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{i}{e}; \quad f\left(\frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{b}{e}; \quad F\left(\frac{\varpi}{2} i\right) = 0;$$

on aura:

$$25. \quad \begin{cases} \Phi(m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i) = (-1)^{m+n} \frac{i}{e}, \\ f(m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i) = (-1)^m \cdot \frac{b}{e}, \\ F(m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i) = 0. \end{cases}$$

4) Soit $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i$. En vertu des équations ci dessus on aura

$$26. \quad \begin{cases} \Phi((m + \frac{1}{2})\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i) = \frac{1}{0}, \\ f((m + \frac{1}{2})\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i) = \frac{1}{0}, \\ F((m + \frac{1}{2})\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i) = \frac{1}{0}. \end{cases}$$

6.

Les équations (23.), (24.), (25.) font voir, que la fonction $\Phi(\alpha)$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = m\omega + n\varpi i$; que $f\alpha$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = (m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i$, et que $F\alpha$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i$.

Or je dis que pour toute autre valeur de α, les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ auront nécessairement une valeur différente de zéro.

Supposons en effet, qu'on ait

$$\varphi(\alpha+\beta i) = 0,$$

α et β étant des quantités réelles. En vertu de la première des formules (10.), cette équation peut s'écrire comme il suit:

$$\frac{\varphi\alpha . f(\beta i) . F(\beta i) + \varphi(\beta i) . f\alpha . F\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2\alpha . \varphi^2(\beta i)} = 0.$$

Maintenant le quantités $\varphi\alpha$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ sont réelles et $\varphi(\beta i)$ est de la forme $i . A$, où A est réel; donc cette équation ne peut pas subsister à moins qu'on n'ait séparément:

$$\varphi(\alpha) . f(\beta i) . F(\beta i) = 0;\ \varphi(\beta i) . f\alpha . F\alpha = 0.$$

Ces équations ne peuvent être satisfaites, que de deux manières, savoir en faisant

$$\varphi(\alpha) = 0,\ \varphi(\beta i) = 0,$$

ou

$$f(\beta i) . F(\beta i) = 0,\ f\alpha . F\alpha = 0.$$

Les deux premières équations donnent $\alpha = m\omega$; $\beta = n\varpi$.

Les deux dernières, en remarquant que $F\alpha$ et $f(\beta i)$ ne peuvent jamais s'évanouir, donnent

$$f\alpha = 0,\ F(\beta i) = 0,$$

d'où

$$\alpha = (m + \tfrac{1}{2})\omega,\ \beta = (n + \tfrac{1}{2})\varpi.$$

Mais pour ces valeurs de α et β la valeur de $\varphi(\alpha+\beta i)$ deviendra infinie; donc les seules valeurs de α et β sont $\alpha = m\omega$ et $\beta = n\varpi$, et par-conséquent toutes les racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

peuvent être représentées par

$$27.\quad x = m\omega + n\varpi i.$$

De la même manière on trouvera, que toutes les racines de l'équation

$$f(x) = 0,$$

peuvent être représentées par

$$28.\quad x = (m + \tfrac{1}{2})\omega + n\varpi i,$$

et celles de l'équation

$$F(x) = 0,$$

par

$$29.\quad x = m\omega + (n + \tfrac{1}{2})\varpi i.$$

7.

Les formules (26.) font voir, qu'on satisfait aux trois équations

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{0},\ f(x) = \tfrac{1}{0},\ F(x) = \tfrac{1}{0},$$

en donnant à x une des valeurs de la forme

$$30.\quad x = (m + \tfrac{1}{2})\omega + (n + \tfrac{1}{2})\varpi i.$$

Or on peut démontrer que les équations en question n'ont pas d'autres racines.

En effet, ayant

$$F(x) = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{F\left(x - \frac{\omega}{2}\right)};\ \varphi(x) = \frac{i}{ec} \cdot \frac{1}{\varphi\left(x - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi}{2} i\right)};\ f(x) = \frac{b}{e} \cdot \frac{1}{f\left(x - \frac{\varpi}{2} i\right)};$$

les équations en question entraîneront celles-ci:

$$\varphi\left(x - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi}{2} i\right) = 0;\ f\left(x - \frac{\varpi}{2} i\right) = 0;\ F\left(x - \frac{\omega}{2}\right) = 0,$$

mais en vertu de ce qu'on vient de voir dans le numéro précédent, les équations donnent respectivement:

$$x - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi}{2} i = m\omega + n\varpi i;\ x - \frac{\varpi}{2} i = (m + \tfrac{1}{2})\omega + n\varpi i;$$

$$x - \frac{\omega}{2} = m\omega + (n + \tfrac{1}{2})\varpi i;$$

c'est-à-dire: on aura pour les trois équations:

$$x = (m + \tfrac{1}{2})\omega + (n + \tfrac{1}{2})\varpi i,$$

c. q. f. d.

8.

Ayant trouvé comme ci dessus toutes les racines des équations

$$\Phi(x) = 0;\ f(x) = 0;\ F(x) = 0;$$
$$\Phi(x) = \tfrac{1}{0};\ f(x) = \tfrac{1}{0};\ F(x) = \tfrac{1}{0};$$

je vais maintenant chercher les racines des équations plus générales.

$$\Phi(x) = \Phi a,\ f(x) = fa,\ F(x) = Fa,$$

où a est une quantité quelconque réelle ou imaginaire.

Considérons d'abord l'équation

$$\Phi(x) - \Phi a = 0.$$

En faisant dans la seconde des formules (12.)

$$\alpha = \frac{x + a}{2},\ \beta = \frac{x - a}{2},$$

on trouvera

$$\Phi x - \Phi a = \frac{2\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot F\left(\frac{x+a}{2}\right)}{1 + e^2 c^2 \cdot \varphi^2\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{x-a}{2}\right)} = 0.$$

Cette équation ne peut subsister que dans l'un des cinq cas suivans:

1. si $\Phi\left(\frac{x-a}{2}\right) = 0$, d'où $x = a + 2m\omega + 2n\varpi i$,
2. si $f\left(\frac{x+a}{2}\right) = 0$, d'où $x = -a + (2m+1)\omega + 2n\varpi i$,
3. si $F\left(\frac{x+a}{2}\right) = 0$, d'où $x = -a + 2m\omega + (2n+1)\varpi i$,
4. si $\Phi\left(\frac{x-a}{2}\right) = \frac{1}{0}$, d'où $x = a + (2m+1)\omega + (2n+1)\varpi i$,
5. si $\Phi\left(\frac{x+a}{2}\right) = \frac{1}{0}$, d'où $x = -a + (2m+1)\omega + (2n+1)\varpi i$.

La résolution de ces cinq équations est contenue dans les formules (27.), (28.), (29.).

Des valeurs trouvées de x il faut rejeter celles, que donne la formule

$$x = -a + (2m+1)\omega + (2n+1)\varpi i,$$

car une telle valeur de x donne en vertu de (22.):

$$\Phi x = -\Phi a,$$

tandis qu'on doit avoir $\Phi x = \Phi a$; mais les autres valeurs de x, exprimées par les quatre premières formules, peuvent être admises. Elles sont, comme on voit, contenues dans la seule formule:

$$31.\quad x = (-1)^{m+n}.a + m\omega + n\varpi i.$$

Telle est donc l'expression générale de toutes les racines de l'équation

$$\Phi x = \Phi a.$$

De la même manière on trouvera, que toutes le racines de l'équation

$$fx = fa$$

sont représentées par la formule

$$32.\quad x = \pm a + 2m\omega + n\varpi i,$$

et toutes celles de l'équation

$$Fx = Fa,$$

par la formule

$$33.\quad x = \pm a + m\omega + 2n\varpi i.$$

§. II.

Formules, qui donnent les valeurs de $\Phi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$ exprimées en fonctions rationelles de $\Phi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

9.

Reprenons les formules (12.). En faisant dans la 1e, 3e et 5^e^ $\alpha = n\beta$, il viendra:

$$34.\quad \begin{cases} \Phi(n+1)\beta = -\Phi(n-1)\beta + \dfrac{2\varphi(n\beta).f\beta.F\beta}{R}, \\ f(n+1)\beta = -f(n-1)\beta + \dfrac{2f(n\beta).f\beta}{R}, \\ F(n+1)\beta = -F(n-1)\beta + \dfrac{2F(n\beta).F\beta}{R}, \end{cases}$$

où $R = 1 + c^2e^2.\Phi^2(n\beta).\Phi^2\beta.$

Ces formules donnent la valeur de $\Phi(n+1)\beta$ en $\Phi(n-1)\beta$ et $\Phi(n\beta)$; celle de $f(n+1)\beta$ en $f(n-1)\beta$ et $f(n\beta)$, et celle de $F(n+1)\beta$ en $F(n-1)\beta$ et $F(n\beta)$. Donc en faisant successivement $n = 1, 2, 3 \ldots$, on trouvera successivement les valeurs des fonctions:

$$\Phi(2\beta);\ \Phi(3\beta);\ \Phi(4\beta) \ldots\ldots \Phi(n\beta),$$
$$f(2\beta);\ f(3\beta);\ f(4\beta) \ldots\ldots f(n\beta),$$
$$F(2\beta);\ F(3\beta);\ F(4\beta) \ldots\ldots F(n\beta)$$

exprimées en fonctions rationelles des trois quantités

$$\Phi\beta;\ f\beta;\ F\beta.$$

En faisant p. ex. $n = 1$, on aura:

$$35.\quad \begin{cases} \Phi(2\beta) = \dfrac{2.\varphi\beta.f\beta.F\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}, \\ f(2\beta) = -1 + \dfrac{2f^2\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}, \\ F(2\beta) = -1 + \dfrac{2F^2\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}. \end{cases}$$

Les fonctions $\Phi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ étant des fonctions rationelles de $\Phi\beta$, $f\beta$, $F\beta$, on peut toujours les réduire à la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des fonctions entières de $\Phi\beta$, $f\beta$, $F\beta$. De même il est clair, que le dénominateur Q aura la même valeur pour les trois fonctions, que l'on considère. Soit donc

$$35'.\quad \Phi(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n},\quad f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q_n},\quad F(n\beta) = \frac{P''_n}{Q_n},$$

on auraégalement

$$\Phi(n+1)\beta = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},\ f(n+1)\beta = \frac{P'_{n+1}}{Q_{n+1}},\ F(n+1)\beta = \frac{P''_{n+1}}{Q_{n+1}},$$
$$\Phi(n-1)\beta = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ f(n-1)\beta = \frac{P'_{n-1}}{Q_{n-1}},\ F(n-1)\beta = \frac{P''_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

En substituant ces valeurs, la première des formules (34.) deviendra:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = -\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \frac{2f\beta.F\beta.\frac{P_n}{Q_n}}{1+c^2e^2\varphi^2\beta.\frac{P_n^2}{Q_n^2}},$$

ou bien

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{-P_{n-1}.(Q_n^2+c^2e^2\varphi^2\beta.P_n^2)+2P_n.Q_n.Q_{n-1}.f\beta.F\beta}{Q_{n-1}.(Q_n^2+e^2c^2\varphi^2\beta.P_n^2)}.$$

En égalant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux fractions, on aura

$$36.\quad P_{n+1} = -P_{n-1}(Q_n^2+c^2e^2\Phi^2\beta.P_n^2)+2f\beta.F\beta.P_n.Q_n.Q_{n-1},$$

$$37.\quad Q_{n+1} = Q_{n-1}(Q_n^2+e^2c^2\Phi^2\beta.P_n^2).$$

La seconde et la troisième des équations (34.) donneront de la même manière:

$$38.\quad P'_{n+1} = -P'_{n-1}.(Q_n^2+c^2e^2\Phi^2\beta.P_n^2)+2f\beta\,P'_n.Q_n.Q_{n-1},$$

$$39.\quad P''_{n+1} = -P''_{n-1}.(Q_n^2+c^2e^2\Phi^2\beta.P_n^2)+2F\beta.P''_n.Q_n.Q_{n-1}.$$

En faisant dans ces quatre formules $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$, et remarquant, qu'on aura:

$$Q_0=1;\ Q_1=1;\quad P_0=0;\ P_1=\Phi\beta;$$
$$P'_0=1;\ P'_1=f\beta;\ P''_0=1;\ P''_1=F\beta;$$

on trouvera successivement les fonctions entières Q_n, P_n, P'_n, P''_n, pour toutes les valeurs de n.

Soient pour abréger:

$$40.\quad \Phi\beta = x,\ f\beta = y,\ F\beta = z \text{ et}$$

$$41.\quad R_n = Q_n^2 + e^2c^2x^2P_n^2,$$

les formules précédentes donneront:

$$42.\quad \begin{cases} Q_{n+1} = Q_{n-1}.R_n, \\ P_{n+1} = -P_{n-1}.R_n + 2yz.P_n.Q_n.Q_{n-1}, \\ P'_{n+1} = -P'_{n-1}.R_n + 2y.P'_n.Q_n.Q_{n-1}, \\ P''_{n+1} = -P''_{n-1}.R_n + 2z.P''_n.Q_n.Q_{n-1}. \end{cases}$$

En posant $n = 1, 2$, on aura:

$$43.\quad \begin{cases} R_1 = Q_1^2 + e^2c^2x^2P_1^2 = 1 + e^2c^2x^4, \\ Q_2 = Q_0R_1 = 1 + e^2c^2x^4, \\ P_2 = -P_0R_1 + 2yzP_1.Q_1.Q_0 = 2xyz, \\ P'_2 = -P'_0R_1 + 2yP'_1.Q_1.Q_0 = -1 - e^2c^2x^4 + 2y^2, \\ P''_2 = -P''_0R_1 + 2zP''_1.Q_1.Q_0 = -1 - e^2c^2x^4 + 2z^2. \end{cases}$$

$$44.\quad \begin{cases} R_2 = Q_2^2 + e^2c^2x^2.P_2^2 = (1+e^2c^2x^4)^2 + e^2c^2x^2.4x^2y^2z^2, \\ Q_3 = Q_1R_2 = R_2, \\ P_3 = -P_1R_2 + 2yzP_2Q_2Q_1 = -xR_2 + 2y^2z^2x.Q_2 \\ \quad = x\{2y^2z^2.Q_2 - R_2\}, \\ P'_3 = -P'_1.R_2 + 2y.P'_2.Q_2Q_1 = -y.R_2 + 2yP'_2Q_2 \\ \quad = y\{2Q_2P'_2 - R_2\}, \\ P''_3 = z\{2Q_2P''_2 - R_2\}. \end{cases}$$

En

En continuant de cette sorte, et en remarquant que $y^2 = 1 - c^2x^2$, $z^2 = 1 + e^2x^2$, on verra aisément, que les quantités:

$$Q_n,\ \frac{P_{2n}}{xyz},\ \frac{P_{2n+1}}{x},\ P'_{2n},\ \frac{P'_{2n+1}}{y},\ P''_{2n},\ \frac{P''_{2n+1}}{z}$$

sont des fonctions entières des trois quantités x^2, y^2, z^2 et par conséquent aussi de l'une de ces quantités quelconque pour une valeur entière quelconque de n.

Cela fait voir que les expressions de $\Phi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ seront de la forme suivante:

$$45.\quad \begin{cases} \Phi(2n\beta) = \Phi\beta.f\beta.F\beta.T, & \Phi(2n+1)\beta = \Phi\beta.T', \\ f(2n\beta) = T_1, & f(2n+1)\beta = f\beta.T'', \\ F(2n\beta) = T_2, & F(2n+1)\beta = F\beta.T''', \end{cases}$$

où T etc. représentent des fonctions rationelles des quantités $(\Phi\beta)^2$, $(f\beta)^2$, $(F\beta)^2$.

§. III.

Résolution des équations

$$\Phi(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n},\ f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q_n},\ F(n\beta) = \frac{P''_n}{Q_n}.$$

10.

Suivant ce qu'on a vu, les fonctions $\Phi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ s'expriment rationellement en x, y, z. Le cas contraire n'a pas lieu, car les équations (35.) sont en général d'un degré très élevé. Elles ont par cette raison un certain nombre de racines. Nous allons voir, comment on peut aisement exprimer toutes ces racines au moyen des fonctions Φ, f, F.

A. Considérons d'abord l'équation $\Phi(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n}$, ou $Q_n.\Phi(n\beta) = P_n$, et cherchons toutes les valeurs de x.

Il faut distinguer deux cas, selon que n est pair ou impair:

1) Si n est un nombre pair.

D'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent (45.), on aura dans ce cas

$$\Phi(2n\beta) = \psi(x^2).x.y.z,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules

$$y = \sqrt{(1 - c^2x^2)},\ z = \sqrt{(1 + e^2x^2)},$$
$$\Phi(2n\beta) = x\psi(x^2).\sqrt{[(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)]}.$$

Donc l'équation en x deviendra,

$$\Phi^2(2n\beta) = x^2(\psi(x^2))^2.(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2).$$

En désignant le second nombre par $\theta(x^2)$, on aura

$$\Phi^2(2n\beta) = \theta(x^2).$$

$\Phi\beta$ étant une des valeurs de x, on aura

$$46.\quad \Phi^2(2n\beta) = \theta(\Phi^2\beta),$$

équation, qui a lieu, quelle que soit la valeur de β. Pour trouver les autres valeurs de x, soit $x = \Phi\alpha$ une racine quelconque, on doit avoir

$$\Phi^2(2n\beta) = \theta(\Phi^2\alpha).$$

Or, en mettant dans (46.) α au lieu de β, il viendra

$$\Phi^2(2n\alpha) = \theta(\Phi^2\alpha), \text{ donc:}$$

$$47.\quad \Phi^2(2n\beta) = \Phi^2(2nx);$$

équation, qui revient à ces deux-ci:

$$\Phi(2n\alpha) = \Phi(2n\beta) \text{ et } \Phi(2n\alpha) = -\Phi(2n\beta).$$

La première donne en vertu de (31.)

$$2n\alpha = 2n\beta.(-1)^{m+\mu} + m\omega + \mu\varpi i,$$

où m et μ sont deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, zéro y compris.

La seconde donne les mêmes valeurs de $2m\alpha$, mais de signe contraire, comme il est aisé de voir, en l'écrivant comme suit:

$$\Phi(-2n\alpha) = \Phi(2n\beta).$$

Toute valeur de $2n\alpha$, qui satisfait à l'équation (47.), peut donc être représentée par

$$2n\alpha = \pm\,(2n\beta.(-1)^{m+\mu} + m\omega + \mu\varpi i).$$

De là on tire la valeur de α, en divisant par $2n$, savoir:

$$\alpha = \pm\left((-1)^{m+\mu}.\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right).$$

Ayant la valeur de α, on aura

$$48.\quad \Phi\alpha = \pm\,\Phi\left((-1)^{m+\mu}.\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right) = x.$$

Donc toutes les valeurs de x sont contenues dans cette expression, et on les trouvera, en donnant aux nombres m et μ toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Or pour avoir toutes celles qui sont différentes entre elles, il suffit de donner à m et μ des valeurs entières moindres que $2n$. En effet, quels que soient ces nombres, on peut toujours les supposer réduits a la forme:

$$m = 2n.k + m',\ \mu = 2n.k' + \mu',$$

où k, k' sont des nombres entiers, et m', μ', des nombres entiers moindres que $2n$. En substituant ces valeurs dans l'expression de x, elle deviendra:

$$x = \pm \Phi\left\{(-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i + k\omega + k'\varpi i\right\},$$

or en vertu de (22.) cette expression se réduit à

$$49.\quad x = \pm \Phi\left\{(-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i\right\}.$$

Cette valeur de x est de la même forme que la précédente (48.), m et μ seulement sont remplacés par m' et μ', qui, tous les deux, sont positifs et moindres que $2n$; donc on obtiendra toutes les valeurs différentes de x, en donnant seulement à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ excl. Toutes ces valeurs sont nécessairement différentes entre elles. En effet, supposons par ex. qu'on ait

$$\pm \Phi\left\{(-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i\right\}$$
$$= \pm \Phi\left\{(-1)^{m+\mu}\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right\},$$

il s'en suivrait, d'après (31.):

$$(-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i = \pm\left\{(-1)^{m+\mu}.\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right\} + k\omega + k'\varpi i,$$

k et k' étant des entiers.

Cette équation donne:

$$\mu' = k'.2n \pm \mu,\ m' = k.2n \pm m,\ (-1)^{m'+\mu'} = \pm (-1)^{m+\mu}.$$

Les deux premières équations ne peuvent pas subsister à moins que $k' = 1$, $k = 1$, $\mu' = 2n - \mu$, $m' = 2n - m$, et alors la dernière deviendra:

$$(-1)^{4n-m-\mu} = -(-1)^{m+\mu},$$

d'où l'on tire:

$$(-1)^{2m+2\mu} = -1,$$

résultat absurde.

Donc toutes les valeurs de x, contenues dans la formule (48.), sont différentes entre elles, si m et μ sont positifs et moindres que m.

Le nombre total des valeurs de x est, comme il est aisé de voir, égal à $2(2n)^2 = 8n^2$, or l'équation $\Phi^2(2n\beta) = \theta(x^2)$ ne peut pas avoir des racines égales, car dans ce cas on auroit $\frac{\partial . \theta(x^2)}{\partial x} = 0$, ce qui donneroit pour x une valeur indépendante de β. Donc le degré de l'équation $\Phi^2(2n\beta) = \theta(x^2)$ est égal au nombre des racines, c'est-à-dire à $8n^2$. Si par ex. $n = 1$, on aura l'équation

$$\Phi^2(2\beta) = \theta(x^2) = \frac{4x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}{(+e^2c^2x^4)^2},$$

ou bien

$$(1+e^2c^2x^4)^2 . \Phi^2(2\beta) = 4x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2),$$

et d'après la formule (48.) les racines de cette équation, au nombre de huit, seront:

$$x = \pm \varphi\beta,\ x = \pm \varphi\left(-\beta + \frac{\omega}{2}\right),$$

$$x = \pm \varphi\left(-\beta + \frac{\varpi}{2} i\right),\ x = \pm \varphi\left(\beta + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right).$$

2) Si n est un nombre impair $= 2n + 1$.

Dans ce cas $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$ est, comme nous l'avons vu, une fonction rationnelle de x, et par conséquent l'équation en x sera:

$$50.\quad \varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Précisément comme dans le cas précédent, on trouvera, que toutes les racines de cette équation peuvent être représentées par

$$51.\quad x = \varphi\left((-1)^{m+\mu}.\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

où il faut donner à m et μ toutes les valeurs entières depuis $-n$ jusqu'à $+n$ incl. Donc le nombre des racines différentes est $(2n+1)^2$. C'est aussi le degré de l'équation en question. On peut aussi exprimer les racines par

$$x = (-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right).$$

Si par ex. $n = 1$, on aura une équation du degré $3^2 = 9$.

La formule (51.) donne pour x les 9 valeurs suivantes:

$$\varphi(\beta);$$

$$\varphi\left(-\beta - \frac{\omega}{3}\right);$$

$$\varphi\left(-\beta + \frac{\omega}{3}\right);$$

$$\varphi\left(-\beta - \frac{\varpi}{3} i\right);$$

$$\varphi\left(-\beta + \frac{\varpi}{3} i\right);$$

$$\varphi\left(\beta - \frac{\omega}{3} - \frac{\varpi}{3} i\right);$$

$$\varphi\left(\beta - \frac{\omega}{3} + \frac{\varpi}{3} i\right);$$

$$\varphi\left(\beta + \frac{\omega}{3} - \frac{\varpi}{3} i\right);$$

$$\varphi\left(\beta + \frac{\omega}{3} + \frac{\varpi}{3} i\right);$$

B. Considérons maintenant l'équation

$$52.\quad f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q_n}$$

et cherchons les valeurs de y, qui satisfont à cette équation. La fonction $\frac{P'_n}{Q_n}$ étant, comme on a vu plus haut, rationelle en y: l'équation en y, en faisant $\frac{P'_n}{Q_n} = \psi(y)$, sera

$$f(n\beta) = \psi(y).$$

Une des racines de cette équation est $y = f\beta$, donc, quelle que soit la leur de β:

$$53.\quad f(n\beta) = \psi(f\beta).$$

Pour trouver les autres valeurs de y, soit α une nouvelle inconnue, telle que $y = f\alpha$, on aura

$$f(n\beta) = \psi(f\alpha);$$

or, en vertu de (53.), le second membre est égal à $f(n\alpha)$, donc pour déterminer α, on aura l'équation:

$$f(n\alpha) = f(n\beta).$$

En vertu de (32.) cette équation donne pour expression générale de $n\alpha$:

$$n\alpha = \pm n\beta + 2m\omega + \mu\varpi i,$$

m et μ étant deux nombres entiers positifs ou négatifs, zéro y compris.

De là on tire

$$\alpha = \pm\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i,$$

et par conséquent:

$$f\alpha = f\left(\pm\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right) = y.$$

C'est la valeur générale de y. Maintenant pour avoir les valeurs différentes de y, je dis, qu'il suffit de prendre β avec le signe $+$ et de donner à m et μ toutes les valeurs entières, moindres que n. En effet, comme on a $f(+\alpha) = f(-\alpha)$, on aura d'abord:

$$f\left(-\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right) = f\left(\beta - \frac{2m}{n}\omega - \frac{\mu}{n}\varpi i\right).$$

Donc on peut toujours dans l'expression de y prendre β avec le signe $+$. Ainsi toutes les valeurs de y sont contenues dans l'expression

$$54.\quad y = f\left(\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right).$$

Maintenant quels que soient les nombres m et μ, on peut toujours supposer,

$$m = k.n + m', \quad \mu' = k'.n + \mu',$$

où k, k', m', μ' sont des nombres entiers, les deux derniers étant en même temps positifs et moindres que n.

En substituant, il viendra

$$y = f\left(\beta + \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i + 2k\omega + k'\varpi i\right).$$

Or, en vertu de (22.) le second membre de cette équation est égal à

$$55.\quad f\left(\beta + \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i\right) = y,$$

quantité de la même forme, que le second membre de (54.); seulement m' et μ' sont positifs et moindres que n. Donc etc.

En donnant à m et μ toutes les valeurs possibles, moindres que n, on trouvera un nombre n^2 de valeurs de y. Or, en général toutes ces quantités sont différentes entre elles. En effet, supposons par ex.

$$f\left(\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right) = f\left(\beta + \frac{2\mu'}{n} + \frac{\mu'}{n}\varpi i\right),$$

on aura en vertu de (32.), en désignant par k, k' deux nombres entiers:

$$\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i = \pm\left(\beta + \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i\right) + 2k\omega + k'\varpi i.$$

Puisque β peut avoir une valeur irrationelle quelconque, il est clair que cette équation ne peut pas subsister à moins qu'on ne préfère dans le second membre le signe supérieur. Alors il viendra

$$\frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i = \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i + 2k\omega + k'\varpi i,$$

d'où l'on tire, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires:

$$m = m' + kn;\quad \mu = \mu' + k'n,$$

équations absurdes, en remarquant que les nombres m, m', μ et μ' sont tous positifs et inférieurs à n. Donc en général l'équation

$$f(n\beta) = \psi(y)$$

a un nombre n^2 de racines différentes entre elles et non un plus grand nombre. Or généralement toutes les racines de cette équation sont différentes entres elles. En effet, si deux d'entre elles étoient égales, on auroit à la fois:

$$f(n\beta) = \psi(y)\ \text{ et }\ 0 = \psi'(y),$$

et cela est impossible, si l'on remarque que les coéfficiens de y dans $\psi(y)$ ne contiennent pas β. Donc généralement l'équation (52.) est nécessairement du degré n^2.

C. L'équation

$$56. \quad F(n\beta) = \frac{P''_n}{Q_n},$$

étant traitée absolument de la même manière par rapport à z, que l'équation $f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q_n}$ l'a été par rapport à y, donne pour expression générale des valeurs de z:

$$57. \quad z = F\left(\beta + \frac{m}{n}\omega + \frac{2\mu}{n}\varpi i\right),$$

où m et μ sont entiers, positifs et moindres que n. Le nombre des valeurs de z est n^2, et elles sont en général toutes différentes entre elles.

Donc généralement l'équation (56.) est du degré n^2.

11.

Nous avons trouvé ci-dessus toutes les racines des équations

$$\varphi(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n}, \quad f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q_n}, \quad F(n\beta) = \frac{P''_n}{Q_n},$$

racines, qui sont exprimées par les formules (48.), (51.), (54.), (57.). Toutes ces racines sont différentes entre elles, excepté les cas de valeurs particulières de β; mais pour ces valeurs, les racines différentes sont contenues dans les mêmes formules. — Dans ce dernier cas un certain nombre des valeurs des quantités x, y, z seront égales; mais il est clair, que toutes les valeurs égales ou inégales seront néanmoins les racines des équations, dont il s'agit. Cela se fait voir en faisant converger β vers une valeur particulière, qui donne pour x, ou y, ou z des valeurs égales.

En faisant dans la formule (48.) $\beta = \frac{\alpha}{2n}$, on aura l'équation

$$58. \quad \varphi^2\alpha = \frac{P^2_{2n}}{Q^2_{2n}}, \text{ dont les racines sont } x = \pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\frac{\alpha}{2n} + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right);$$

et où m et μ ont toutes les valeurs entières et positives moindres que $2n$.

En faisant de même dans la formule (50.) $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, on aura $\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, dont les racines sont

$$59. \quad x = (-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

m et μ ayant pour valeurs tous les nombres entiers depuis $-n$ jusqu'à $+n$.

Enfin en faisant dans (52.), (56.) $\beta = \frac{\alpha}{n}$, on aura l'équation $f\alpha = \frac{P'_n}{Q_n}$, dont les racines sont

$$60. \quad y = f\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right),$$

et l'équation

$F\alpha = \frac{P_n''}{Q_n}$, dont les racines sont

$$61.\quad z = F\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{m}{n}\omega + \frac{2\mu}{n}\varpi i\right),$$

où m et μ sont renfermés entre les limites 0 et $n-1$ incl. Si n est impair $= 2n+1$, on peut aussi supposer

$$y = (-1)^m . f\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

$$z = (-1)^\mu . F\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

m et μ ayant toutes les valeurs entières de $-n$ à $+n$.

Dans toutes ces équations la quantité α peut avoir une valeur quelconque.

Comme cas particuliers on doit remarquer les suivans:

1) En faisant dans (58.) et (59.) $\alpha = 0$, on aura les équations

$$62.\quad \begin{cases} P_{2n}^2 = 0, \text{ dont les racines sont } x = \pm\varphi\left(\frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right) \\ \qquad \text{(les limites de } m \text{ et } \mu \text{ étant 0 et } 2n-1), \\ P_{2n+1} = 0, \text{ dont les racines sont } x = \varphi\left(\frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right) \\ \qquad \text{(les limites de } m \text{ et } \mu \text{ étant } -n \text{ et } +n). \end{cases}$$

2) En faisant dans (60.) $\alpha = \frac{\omega}{2}$ et dans (61.) $\alpha = \frac{\varpi}{2}i$, et remarquant, que $f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, $F\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = 0$, on obtiendra les deux équations:

$$63.\ P_n' = 0, \text{ dont les racines sont } y = f\left((2m+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{n} + \frac{\mu}{n}\varpi i\right)$$

$$64.\ P_n'' = 0, \text{ dont les racines sont } z = F\left(\frac{m}{n}\omega + (2\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{n}\right)$$

(les limites de m et μ étant 0 et $n-1$).

3) En faisant dans (58.) $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i$, et en remarquant, que $\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}$, on aura l'équation

$$Q_{2n}^2 = 0,$$

dont les racines seront:

$$x = \pm\varphi\left((m + \tfrac{1}{2}(-1)^{m+\mu})\frac{\omega}{2n} + (\mu + \tfrac{1}{2}(-1)^{m+\mu}).\frac{\varpi i}{2n}\right).$$

Les valeurs de x, doivent être égales par paires, et l'on verra aisement, que les valeurs inégales peuvent être représentées par

$$65.\quad x = \varphi\left((m+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{2n} + (\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n}\right),$$

en

en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis 0 à $2n-1$. Donc ce sont les racines de l'équation

$$Q_{2n} = 0, \text{ par rapport à } x.$$

En faisant de même dans (59.) $a = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i$, on aura l'équation

$$Q_{2n+1} = 0,$$

dont les racines seront:

$$66. \begin{cases} x = (-1)^{m+\mu} . \varphi\left((m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1} + (\mu+\frac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \\ y = (-1)^{m} . f\left((m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1} + (\mu+\frac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \\ z = (-1)^{\mu} . F\left((m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1} + (\mu+\frac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \end{cases}$$

m et μ ayant pour valeurs tous les nombres entiers de $-n$ à $+n$.

Parmi les valeurs de x, y, z, il faut remarquer celle, qui répond à $m = n$, $\mu = n$. Alors on a

$$x = (-1)^n . \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{1}{0},$$

$$y = (-1)^n . f\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{1}{0},$$

$$z = (-1)^n . F\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{1}{0}.$$

Ces valeurs infinies font voir que l'équation $Q_{2n+1} = 0$ est d'un degré moindre d'une unité que celui des équations, dont elle sort. En écartant ces valeurs, les restantes, en nombre de $(2n+1)^2 - 1$, seront les racines de l'équation $Q_{2n+1} = 0$.

§. IV.

Résolution algébrique des équations

$$\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \; f\alpha = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \; F\alpha = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

12.

Nous avons vu dans le §. précédent, comment on peut exprimer aisément les racines des équations en question au moyen des fonctions φ, f, F. Nous allons maintenant en déduire la résolution de ces mêmes équations, ou la determination des fonctions $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{n}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{n}\right)$, en fonctions de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

Comme on a

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{m\mu}\right) = \varphi\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\right),$$

on peut supposer que n est un nombre premier. D'abord nous considérerons le cas, où $n=2$, et ensuite celui, où n est un nombre impair.

A. Expressions des fonctions $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

13.

Les valeurs de $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ peuvent être trouvées très facilement de la manière suivante. En supposant dans les formules (35.) $\beta = \frac{\alpha}{2}$, et faisant

$$x = \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ y = f\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ z = F\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

il viendra:

$$f(\alpha) = \frac{y^2 - c^2x^2z^2}{1+e^2c^2x^4},\ F(\alpha) = \frac{z^2 + e^2y^2x^2}{1+e^2c^2x^4},$$

ou bien, en substituant les valeurs de y^2 et z^2 en x^2:

$$f(\alpha) = \frac{1-2c^2x^2-c^2e^2x^4}{1+e^2c^2x^4},\ F(\alpha) = \frac{1+2e^2x^2-e^2c^2x^4}{1+e^2c^2x^4}.$$

Ces équations donnent

$$1+f\alpha = \frac{2(1-2c^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},\ 1-f\alpha = \frac{2c^2x^2(1+e^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},$$

$$F\alpha - 1 = \frac{2e^2x^2(1-c^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},\ F\alpha+1 = \frac{2(1+e^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},$$

d'où

$$\frac{F\alpha-1}{1+f\alpha} = e^2.x^2,\ \frac{1-f\alpha}{F\alpha+1} = c^2x^2,$$

et de là, en remarquant, que $y^2 = 1-c^2x^2$, $z^2 = 1+e^2x^2$:

$$z^2 = \frac{F\alpha+f\alpha}{1+f\alpha},\ y^2 = \frac{F\alpha+f\alpha}{1+F\alpha}.$$

De ces équations on tire, en extrayant la racine carrée, et remplaçant x, y, z par leurs valeurs $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

67.
$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{1-f\alpha}{1+F\alpha}\right)} = \frac{1}{e}\sqrt{\left(\frac{F\alpha-1}{f\alpha+1}\right)}, \\ f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{F\alpha+f\alpha}{1+F\alpha}\right)},\ F\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{F\alpha+f\alpha}{1+f\alpha}\right)} \end{cases}$$

Telles sont les formes les plus simples qu'on peut donner aux valeurs des fonctions $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. De cette manière on peut exprimer

algébriquement $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ en $f\alpha$, $F\alpha$. De la même manière $\varphi\left(\frac{\alpha}{4}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{4}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ s'exprimeront en $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, et ainsi de suite. Donc en général les fonctions $\varphi\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ peuvent être exprimées au moyen d'extractions de racines carrées en fonctions des trois quantités $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

Pour appliquer les formules trouvées ci-dessus pour la bissection à un exemple, supposons $\alpha = \frac{\omega}{2}$.

Alors on aura $f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, $F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{(e^2+c^2)}}{c}$, donc en substituant:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{c}\sqrt{(e^2+c^2)}}\right)} = \frac{1}{e}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{c}\sqrt{(e^2+c^2)}-1\right)},$$

$$f\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{c}\sqrt{(e^2+c^2)}}{1+\frac{1}{c}\sqrt{(e^2+c^2)}}\right)},$$

$$F\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{c}\sqrt{(e^2+c^2)}\right)},$$

ou bien

$$\varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{(c^2+c\sqrt{(e^2+c^2)})}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{(e^2+c^2)}-c)}}{ec},$$

$$f\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{\sqrt[4]{(e^2+c^2)}}{\sqrt{(c+\sqrt{(e^2+c^2)})}} = \frac{1}{e}\cdot\sqrt{(e^2+c^2-c\sqrt{(e^2+c^2)})}$$

$$F\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt[4]{\left(1+\frac{e^2}{c^2}\right)} = \sqrt{\left[F\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]}.$$

B. Expressions des fonctions $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, en fonctions algébriques des quantités $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

14.

Pour trouver les valeurs de $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, il faut résoudre les équations

$$\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\quad f\alpha = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\quad F\alpha = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}},$$

qui toutes sont du degré $(2n+1)^2$. Nous allons voir, qu'il est toujours possible, d'effectuer algébriquement cette résolution.

Soient

$$68.\quad \varphi_1\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_m \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right)$$

et

$$69.\quad \psi\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu . \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),\quad \psi_1\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu \varphi_1\left(\beta - \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

où θ est une racine imaginaire quelconque de l'équation $\theta^{2n+1} - 1 = 0$. Cela posé, je dis que les deux quantités

$$\psi\beta . \psi_1\beta \text{ et } (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1},$$

pourront être exprimées rationellement en $\varphi(2n+1)\beta$.

D'abord en écrivant $\varphi_1\beta$ comme suit:

$$\varphi_1\beta = \varphi\beta . \sum_1^n . \left\{\varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right) + \varphi\left(\beta - \frac{2m\omega}{2n+1}\right)\right\}$$

$$= \varphi\beta . \sum_1^n (-1)^m . \frac{2\varphi\beta . f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) . F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1 + e^2 c^2 \varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) . \varphi^2\beta},$$

on voit, que $\varphi_1\beta$ peut s'exprimer rationellement en $\varphi\beta$. Soit donc $\varphi_1\beta = \chi(\varphi\beta)$, on a de même:

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \chi\left(\varphi\left(\beta \pm \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right)$$

$$= \chi\left\{\frac{\varphi\beta . f\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) . F\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) \pm \varphi\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) . f\beta . F\beta}{1 + e^2 c^2 . \varphi^2\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) . \varphi^2\beta}\right\},$$

ou bien, en faisant $\varphi\beta = x$:

$$f\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) . F\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = a,\quad \varphi\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = b,$$

et en substituant pour $f\beta$ et $F\beta$ leurs valeurs $\sqrt{(1-c^2x^2)}$ et $\sqrt{(1+e^2x^2)}$:

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \chi\left(\frac{ax \pm b . \sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}{1 + e^2c^2b^2 . x^2}\right);$$

or, χ désignant une fonction rationelle, le second membre de cette équation peut se mettre sous la forme

$$R_\mu \pm R'_\mu . \sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]},$$

où R_μ et R'_μ sont des fonctions rationelles de x.

Donc on a

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) = R_\mu \pm R'_\mu . \sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}.$$

En substituant dans les expressions de $\psi\beta$ et $\psi_1\beta$, il viendra:

$$70.\quad \begin{cases} \psi\beta = \sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}(-\theta)^{\mu}.R_{\mu} + \sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}.\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}(-\theta)^{\mu}.R'_{\mu}, \\ \psi_1\beta = \sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}(-\theta)^{\mu}.R_{\mu} - \sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}.\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}(-\theta)^{\mu}.R'_{\mu}. \end{cases}$$

Maintenant R_μ et R'_μ étant des fonctions rationelles de x, les quantités $\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}(-\theta)^{\mu}.R_{\mu}$ et $\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}(-\theta)^{\mu}.R'_{\mu}$ le sont également. En élevant donc $\psi\beta$ et $\psi_1\beta$ à la $(2n+1)^{\text{ième}}$ puissance: les deux quantités $(\psi\beta)^{2n+1}$ et $(\psi_1\beta)^{2n+1}$ pourront se mettre sous la forme:

$$(\psi\beta)^{2n+1} = t + t'.\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]},$$
$$(\psi_1\beta)^{2n+1} = t - t'.\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]},$$

t et t' étant des fonctions rationelles de x. En prenant la somme des valeurs de $(\psi\beta)^{2n+1}$ et $(\psi_1\beta)^{2n+1}$, on aura

$$(\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1} = 2t.$$

Donc la quantité $(\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}$ peut être éxprimée rationellement en x. Il en est de même du produit $\psi\beta.\psi_1\beta$, comme on voit par les équations (70.).

Donc on peut faire

$$71.\quad \begin{cases} \psi\beta.\psi_1\beta = \lambda(x), \\ (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1} = \lambda_1(x), \end{cases}$$

$\lambda(x)$ et $\lambda_1(x)$ désignant des fonctions rationelles de x. Maintenant ces fonctions ont la propriété, de ne pas changer de valeur, lorsqu'on met à la place de x une autre racine quelconque de l'équation

$$\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Considérons d'abord la fonction $\lambda(x)$. En remettant la valeur de $x=\varphi\beta$, on aura

$$\psi\beta.\psi_1\beta = \lambda(\varphi\beta),$$

d'où l'on tire, en mettant $\beta + \frac{k\omega}{2n+1} + \frac{k'\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β:

$$\lambda\left(\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1} + \frac{2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right) = \psi\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right).\psi_1\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right).$$

Cela posé, en remarquant, que:

$$72.\quad \sum_{-n}^{+n}\psi(m+k) = \sum_{-n}^{+n}{}_{m}\psi(m) + \sum_{1}^{k}{}_{m}.(\psi(m+n) - \psi(m-n-1)),$$

on aura, en faisant dans l'expression de β, $\beta = \beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$:

$$\varphi_1\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\sum_{-n}^{+n}{}_m\varphi\left(\beta+\frac{2(k+m)}{2n+1}\omega\right)$$

$$=\varphi_1\beta+\sum_{1}^{k}{}_m\left\{\varphi\left(\beta+\frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right)-\varphi\left(\beta+\frac{2(m-n-1)\omega}{2n+1}\right)\right\},$$

or: $\varphi\left(\beta+\frac{2(m-n-1)}{2n+1}\omega\right)=\varphi\left(\beta+\frac{2(m+n)}{2n+1}\omega-2\omega\right)=\varphi\left(\beta+\frac{2(m+n)}{2n+1}\omega\right)$,
donc:

$$73.\quad \varphi_1\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\varphi_1\beta.$$

En mettant dans l'expression de $\psi\beta$, $\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β, on trouvera

$$\psi\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\sum_{-n'}^{+n}{}_\mu\theta^\mu.\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right),$$

or en vertu de (73.) on a:

$$\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right),$$

donc

$$\psi\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\sum_{-n'}^{+n}{}_\mu\theta^\mu.\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right).$$

En vertu de (72.) on a

$$\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\theta^\mu.\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$=\theta^{-k'}.\sum_{-n'}^{+n}{}_\mu\theta^\mu.\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\sum_{1}^{k'}{}_\mu.\theta^{n+\mu-k'}.\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$-\sum_{1}^{k'}{}_\mu\theta^{\mu-n-1-k'}.\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu-n-1)\varpi i}{2n+1}\right),$$

donc, en remarquant que $\theta^{n+\mu-k'}=\theta^{\mu-n-1-k'}$ et

$$\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu-n-1)\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}-2\varpi i\right)=\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}\right),$$

il viendra

$$74.\quad \psi\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\theta^{-k'}.\psi\beta.$$

De la même manière on trouvera aussi

$$\psi_1\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\theta^{k'}.\psi_1\beta.$$

Ces deux équations donneront

$$\psi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right).\psi_1\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)=\psi\beta.\psi_1\beta,$$

$$\left\{\psi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right\}^{2n+1}+\left\{\psi_1\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right\}^{2n+1}=(\psi\beta)^{2n+1}+(\psi,\beta)^{2n+1}.$$

En vertu de ces équations on obtiendra, en mettant dans les valeurs de $\lambda(\varphi\beta)$ et $\lambda_1(\varphi\beta)$, $\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β:

$$\lambda(\varphi\beta) = \lambda\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right],$$

$$\lambda_1(\varphi\beta) = \lambda_1\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right].$$

Or, $\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right)$ exprime une racine quelconque de l'équation

$$\varphi(2n+1) = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Donc comme nous avons dit, les fonctions $\lambda(x)$ et $\lambda_1(x)$ auront les mêmes valeurs, quelle que soit la racine, qu'on met à la place de x.

Soient donc x_0, x_1, $x_2 \ldots . x_{2n+1}$ ces racines, on aura

$$\lambda(x) = \frac{1}{2n+1}\{\lambda(x_0) + \lambda(x_1) + \ldots . + \lambda(x_{2n})\},$$

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{2n+1}\{\lambda_1(x_0) + \lambda_1(x_1) + \ldots . + \lambda_1(x_{2n})\}.$$

Or le second membre de ces équations est une fonction rationelle et symétrique des racines de l'équation $\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, donc $\lambda(x)$ et $\lambda_1(x)$ pourront s'exprimer rationellement en $\varphi(2n+1)\beta$. En faisant

$$\lambda(x) = B, \quad \lambda_1(x) = 2A,$$

les équations (71.) donneront

$$(\psi\beta)^{2n+1}.(\psi_1\beta)^{2n+1} = B^{2n+1}; \quad (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1} = 2A,$$

d'où l'on tire

$$75. \quad \psi\beta = \sqrt[2n]{[A + \sqrt{(A - B^{2n+1})}]} = \sum_{-n}^{+n}{}_{\mu}\, \theta^{\mu}.\varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

15.

Ayant trouvé la valeur de $\psi\beta$, on en déduira facilement celles de $\varphi_1\beta$.

En effet, en prenant pour θ successivement toutes les racines imaginaires de l'équation $\theta^{2n+1} - 1 = 0$, et désignant les valeurs correspondantes de A et B par A_1, B_1, A_2, B_2 etc., on obtiendra:

$$\sqrt[2n+1]{[A_1 + \sqrt{(A_1^2 - B_1^{2n+1})}]} = \sum_{-n}^{+n}{}_{\mu}\, \theta_1^{\mu}.\varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

$$\sqrt[2n+1]{[A_2 + \sqrt{(A_2^2 - B_2^{2n+1})}]} = \sum_{-n}^{+n}{}_{\mu}\, \theta_2^{\mu}.\varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

. . . . . .

$$\sqrt[2n+1]{[A_{2n} + \sqrt{(A_{2n}^2 - B_{2n}^{2n+1})}]} = \sum_{-n}^{+n}{}_{\mu}\, \theta_{2n}^{\mu}.\varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

De même on connoît la somme des racines:

$$\sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n} \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1} + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

qui est égale à $(2n+1)\varphi(2n+1)\beta$, comme nous le verrons dans la suite. En ajoutant ces équations membre à membre, après avoir multiplié la première par θ_0^{-k}, la seconde par θ_1^{-k}, la troisième par θ_2^{-k}.... et la $(2n)^{\text{ième}}$ par θ_{2n}^{-k}, il viendra:

$$\sum_{-n}^{+n}{}_\mu \cdot (\theta_0^{\mu-k} + \theta_1^{\mu-k} + \theta_2^{\mu-k} + \ldots + \theta_{2n}^{\mu-k} + 1) \cdot \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$= (2n+1)\cdot\varphi(2n+1)\beta + \sum_{1}^{2n}{}_\mu \theta_\mu^{-k} \cdot \sqrt[2n+1]{[A_\mu + \sqrt{(A_\mu^2 - B_\mu^{2n+1})}]};$$

or la somme

$$1 + \theta_1^{\mu-k} + \theta_2^{\mu-k} + \ldots + \theta_{2n}^{\mu-k}$$

se réduit à zéro pour toutes les valeurs de k, excepté pour $k = \mu$. Dans ce cas elle devient égale à $2n+1$. Donc le premier membre de l'équation précédente devient

$$(2n+1)\cdot\varphi_1\left(\beta + \frac{2k\varpi i}{2n+1}\right),$$

donc, en substituant et divisant par $(2n+1)$, on a:

$$76.\quad \varphi_1\left(\beta + \frac{2k\varpi i}{2n+1}\right) =$$

$$\varphi(2n+1)\beta + \frac{1}{2n+1}\cdot\left\{\theta_1^{-k}\sqrt[2n+1]{[A_1 + \sqrt{(A_1^2 - B_1^{2n+1})}]} + \theta_2^{-k}\sqrt[2n+1]{[A_2 + \sqrt{(A_2^2 - B_2^{2n+1})}]} + \ldots.\right.$$

$$\left. \ldots. + \theta_{2n}^{-k}\sqrt[2n+1]{[A_{2n} + \sqrt{(A_{2n}^2 - B_{2n}^{2n+1})}]}\right\}.$$

Pour $k = 0$, on a:

$$77.\ \varphi_1\beta = \varphi(2n+1)\beta + \frac{1}{2n+1}\left\{\sqrt[2n+1]{[A_1 + \sqrt{(A_1^2 - B_1^{2n+1})}]} + \sqrt[2n+1]{[A_2 + \sqrt{(A_2^2 - B_2^{2n+1})}]} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots. + \sqrt[2n+1]{[A_{2n} + \sqrt{(A_{2n}^2 - B_{2n}^{2n+1})}]}\right\}.$$

16.

Ayant ainsi trouvé la valeur de $\varphi_1\beta$, il s'agit, d'en tirer celle de $\varphi\beta$. Or cela peut se faire aisément comme suit:

Soit

$$78.\quad \psi_0\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_m \theta^m \cdot \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right);\quad \psi_3\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_m \theta^m \cdot \varphi\left(\beta - \frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$

on a

$$\varphi\left(\beta \pm \frac{2m\omega}{2n+1}\right) = \frac{\varphi\beta \cdot f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) \cdot F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) \pm f\beta \cdot F\beta \cdot \varphi\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1 + e^2c^2 \cdot \varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) \cdot \varphi^2\beta}.$$

De

De là suit, qu'on peut faire

$$\psi_2\beta = r + f\beta . F\beta . s; \quad \psi_3\beta = r - f\beta . F\beta . s,$$

où r et s sont des fonctions rationelles de $\varphi\beta$.

De là on tire

$$79. \quad \begin{cases} \psi_2\beta . \psi_3\beta = \chi(\varphi\beta), \\ (\psi_2\beta)^{2n+1} + (\psi_3\beta)^{2n+1} = \chi_1(\varphi\beta), \end{cases}$$

$\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ étant deux fonctions rationelles de $\varphi\beta$.

Cela posé je dis, que $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ pourront s'exprimer rationellement en $\varphi_1\beta$.

On a vu, que

$$80. \quad \varphi_1\beta = \varphi\beta + \sum_1^n{}_m . \left\{ \frac{2\varphi\beta . f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) . F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1 + e^2 c^2 . \varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta} \right\}.$$

En faisant $\varphi\beta = x$, on aura une équation en x du degré $(2n+1)$. Une racine de cette équation est $x = \varphi\beta$; or, en mettant $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β, $\varphi_1\beta$ ne change pas de valeur, donc $x = \varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)$ sera une racine, quel que soit le nombre entier k. Or, en donnant à k toutes les valeurs entières de $-n$ jusqu'á $+n$, $\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)$ prendra $2n+1$ valeurs différentes, donc ces $2n+1$ quantités seront précisément les $2n+1$ racines de l'équation en x.

Cela posé, en mettant $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β dans l'expression de $\psi_2\beta$, il viendra en vertu de (72.):

$$\begin{aligned} \psi_2\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) &= \sum_{-n}^{+n}{}_m \theta^m \varphi\left(\beta + \frac{2(k+m)\omega}{2n+1}\right) \\ &= \theta^{-k}\psi_2\beta + \sum_1^k{}_m \theta^{m+n-k} . \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right) \\ &\quad - \sum_1^k{}_m \theta^{m-n-1-k} . \varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)\omega}{2n+1}\right), \end{aligned}$$

donc en ayant attention, que $\theta^{m+n-k} = \theta^{m-n-1-k}$ et $\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)}{2n+1}\omega\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right)$, il en résultera

$$81. \quad \psi_2\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \theta^{-k} . \psi_2\beta.$$

De même on aura

$$\psi_3\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\theta^{+k}.\psi_3\beta.$$

On voit en vertu de ces relations, que les équations, qui donnent les valeurs des fonctions $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$, conduisent à ces deux égalités:

$$\chi_1\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right]=\chi_1(\varphi\beta),$$

$$\chi\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right]=\chi(\varphi\beta).$$

De là on tire

$$\chi(\varphi\beta)=\frac{1}{2n+1}.\sum_{-n}^{+n}{}_k.\chi\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right],$$

$$\chi_1(\varphi\beta)=\frac{1}{2n+1}.\sum_{-n}^{+n}{}_k.\chi_1\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right].$$

Or, ces valeurs de $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ sont des fonctions rationelles et symétriques de toutes les racines de l'équation (80.). Donc elles peuvent être exprimées rationellement par les coefficiens de la même équation, c'est-à-dire rationellement en $\varphi_1\beta$.

Soit

$$\chi(\varphi\beta)=2C,\quad \chi_1(\varphi\beta)=D,$$

les équations (79.) donneront

$$\psi_2\beta=\sqrt[2n+1]{[C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]},$$

d'où, en remettant la valeur de $\psi_2\beta$:

$$82.\quad \sqrt[2n+1]{[C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]}=\sum_{-n}^{+n}{}_m\theta^m.\Phi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right).$$

De là on tire, en mettant θ_μ au lieu de θ, et désignant les valeurs correspondantes de C et D par C_μ et D_μ:

$$\theta_\mu^{-k}\sqrt[2n+1]{[C_\mu+\sqrt{(C_\mu^2-D_\mu^{2n+1})}]}=\sum_{-n}^{+n}{}_m\theta_\mu^{m-k}.\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right).$$

En y joignant l'équation

$$\varphi_1\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_m\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$

on en tirera facilement:

$$83.\quad (2n+1).\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\varphi_1\beta+\sum_{1}^{2n}{}_\mu\theta_\mu^{-k}.\sqrt[2n+1]{[C_\mu+\sqrt{(C_\mu^2-D_\mu^{2n+1})}]}.$$

En supposant $k=0$, il viendra:

$$84.\quad \Phi\beta=\frac{1}{2n+1}\{\varphi_1\beta+\sqrt[2n+1]{[C_1+\sqrt{(C_1^2-D_1^{2n+1})}]}+\ldots+\sqrt[2n+1]{[C_{2n}+\sqrt{(C_{2n}-D_{2n}^{2n+1})}]}\}.$$

Cette équation donne $\Phi\beta$ en fonction algébrique de $\Phi_1\beta$, or précédemment nous avons trouvé $\Phi_1\beta$ en fonction algébrique de $\Phi(2n+1)\beta$. Donc en mettant $\frac{\alpha}{2n+1}$ au lieu de β, on aura $\Phi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en fonction algébrique de $\Phi\alpha$.

Par une analyse toute semblable on trouvera $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en $f\alpha$ et $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en $F\alpha$.

17.

Les valeurs, que nous venons de trouver des quantités $\Phi_1\beta$ et $\Phi\beta$, la première en $\Phi(2n+1)\beta$ et la seconde en $\Phi_1\beta$, contiennent chacune la somme de $2n$ radicaux différentes du $(2n+1)$ degré. Il en résultera pour $\Phi\beta$, $\Phi_1\beta$.... un nombre $(2n+1)^{2n}$ de valeurs, tandisque chacune de ces quantités est la racine d'une équation du $(2n+1)^{\text{ème}}$ degré. Or on peut donner aux expressions de $\Phi\beta$ et $\Phi_1\beta$ une telle forme, que le nombre des valeurs de ces quantités soit précisément égal à $2n+1$.

Pour cela soit

$$\theta = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1},$$

on peut faire

$$\theta_1 = \theta,\ \theta_2 = \theta^2,\ \theta_3 = \theta^3 \ldots . \theta_{2n} = \theta^{2n}.$$

Soient de même

$$85.\quad \begin{cases} \psi^k(\beta) = \sum_{-n}^{+n}{}_{\mu}\, \theta^{k\mu}.\Phi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ \psi_1^k(\beta) = \sum_{-n}^{+n}{}_{\mu}\, \theta^{k\mu}.\Phi_1\left(\beta - \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right), \end{cases}$$

on aura en vertu de (74.)

$$\psi^k\left(\beta + \frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{-k\nu}.\psi^k(\beta),$$

$$\psi_1^k\left(\beta + \frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{+k\nu}.\psi_1^k(\beta),$$

$$\psi^1\left(\beta + \frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{-\nu}.\psi^1(\beta),$$

$$\psi_1^1\left(\beta + \frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{+\nu}.\psi_1^1(\beta).$$

Soit maintenant

$$86.\quad \begin{cases} \frac{\psi^k(\beta)}{(\psi^1\beta)^k} + \frac{\psi_1^k(\beta)}{(\psi_1^1\beta)^k} = P(\Phi\beta), \\ \frac{\psi^k(\beta)}{(\psi^1\beta)^{k-2n-1}} + \frac{\psi_1^k(\beta)}{\psi_1^1(\beta)^{k-2n-1}} = Q(\Phi\beta), \end{cases}$$

$P(\varphi\beta)$ et $Q(\varphi\beta)$ seront des fonctions rationelles de $\varphi\beta$; or, en mettant $\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β, il est clair en vertu des formules, que P et Q ne changent pas de valeurs; donc on aura

$$P(\varphi\beta)=\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu . P\left[\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right];$$

or, le second membre étant une fonction symétrique et rationelle des racines de l'équation $\varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, $P(\varphi\beta)$ pourra s'exprimer rationellement en $\varphi(2n+1)\beta$. Il en est de même de $Q(\varphi\beta)$. Connoissant ces deux quantités, les équations (86.) donneront

$$\frac{\psi^k(\beta)}{(\psi^1\beta)^k}\left\{1-\left(\frac{\psi_1^1\beta}{\psi^1\beta}\right)^{2n+1}\right\}=P(\varphi\beta)-\frac{Q(\varphi\beta)}{(\psi_1^1\beta)^{2n+1}},$$

or

$$\psi_1^1\beta=A_1+\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})},$$
$$\psi_1^1\beta=A_1-\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})},$$

donc

$$\frac{\psi^k(\beta)}{(\psi^1\beta)^k}\cdot 2\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})}=Q(\varphi\beta)-[A_1-\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})}]\cdot P(\varphi\beta).$$

Donc on aura

$$\psi^k(\beta)=(\psi^1\beta)^k\cdot\{F_k+H_k\cdot\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})}\},$$

où F_k et H_k sont des fonctions rationelles de $\varphi(2n+1)\beta$. En remplaçant A_1 et B_1 et substituant les valeurs de $\psi^k(\beta)$ et $(\psi^1\beta)^k$, il viendra:

$$\sqrt[2n+1]{[A_k+\sqrt{(A_k^2-B_k^{2n+1})}]}=[A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}]^{\frac{k}{2n+1}}[F_k+H_k\cdot\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}],$$

donc la valeur de $\varphi_1\beta$ deviendra:

$$87.\quad \varphi_1\beta=\varphi(2n+1)\beta+\frac{1}{2n+1}\cdot\{[A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}]^{\frac{1}{2n+1}}$$
$$+[F_2+H_2\sqrt{(A^2-B_{2n}^{2n+1})}]\,[A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}]^{\frac{2}{2n+1}}$$
$$+\ldots.[F_{2n}+H_{2n}\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}]\,[A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}]^{\frac{2n}{2n+1}}\}.$$

Par un procédé tout semblable on trouvera

$$88.\quad \varphi\beta=\frac{1}{2n+1}\{\varphi_1\beta+[C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]^{\frac{1}{2n+1}}$$
$$+[K_2+L_2\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]\,[C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]^{\frac{2}{2n+1}}$$
$$+\ldots.[K_{2n}+L_{2n}\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]\,[C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]^{\frac{2n}{2n+1}}\},$$

où K_2, L_2, K_3, L_3.... K_{2n}, L_{2n} sont des fonctions rationelles de $\varphi_1\beta$.

Ces expressions de $\varphi_1\beta$ et $\varphi\beta$ n'ont que $2n+1$ valeurs différentes, qu'on obtiendra en attribuant aux radicaux leurs $2n+1$ valeurs. — Il suit de notre analyse, qu'on peut prendre $\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}$ et $\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}$ avec tel signe qu'on voudra.

18.

La valeur, que nous avons trouvée pour $\Phi(\beta)$ ou $\Phi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ contient, encore outre la fonction $\Phi\alpha$, les suivantes:

$$e,\ c,\ \theta,$$

$$\Phi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ \Phi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),\ f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),$$

$$f\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),\ F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ F\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),$$

pour des valeurs quelconques de m depuis 1 jusqu'à $2n$. Maintenant quelle que soit la valeur de m, on peut toujours exprimer algébriquement $\Phi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ en $\Phi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, et $\Phi\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)$ en $\Phi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. Tout est donc connu dans l'expression de $\Phi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, excepté les deux quantités indépendantes de α; $\Phi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\Phi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$.— Ces quantités dépendent seulement de c et e, et elles peuvent être trouvées par la résolution d'une équation du degré $(2n+1)^2-1$, savoir de l'équation $\frac{P_{2n+1}}{x}=0$. — Nous allons voir dans le paragraphe suivant, comment on peut en ramener la résolution à celle d'équations moins élévées.

§. V.

C. Sur l'équation $P_{2n+1}=0$.

19.

L'expression, que nous venons de trouver pour $\Phi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ contiendra, comme nous avons vu, les deux quantités constantes $\Phi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$ et $\Phi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. On trouvera ces quantités en résolvant l'équation

$$P_{2n+1}=0,$$

dont les racines seront représentées par

$$x=\Phi\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

$P(\Phi\beta)$ et $Q(\Phi\beta)$ seront des fonctions rationelles de $\Phi\beta$; or, en mettant $\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β, il est clair en vertu des formules, que P et Q ne changent pas de valeurs; donc on aura

$$P(\Phi\beta)=\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\cdot P\left[\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right];$$

or, le second membre étant une fonction symétrique et rationelle des racines de l'équation $\varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, $P(\Phi\beta)$ pourra s'exprimer rationellement en $\Phi(2n+1)\beta$. Il en est de même de $Q(\Phi\beta)$. Connoissant ces deux quantités, les équations (86.) donneront

$$\frac{\psi^k(\beta)}{(\psi^1\beta)^k}\left\{1-\left(\frac{\psi_1^1\beta}{\psi^1\beta}\right)^{2n+1}\right\}=P(\Phi\beta)-\frac{Q(\varphi\beta)}{(\psi_1^1\beta)^{2n+1}},$$

or

$$\psi_1^1\beta=A_1+\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})},$$
$$\psi_1^1\beta=A_1-\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})},$$

donc

$$\frac{\psi^k(\beta)}{(\psi^1\beta)^k}\cdot 2\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})}=Q(\Phi\beta)-[A_1-\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})}]\cdot P(\Phi\beta).$$

Donc on aura

$$\psi^k(\beta)=(\psi^1\beta)^k\cdot\{F_k+H_k\cdot\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})}\},$$

où F_k et H_k sont des fonctions rationelles de $\Phi(2n+1)\beta$. En remplaçant A_1 et B_1 et substituant les valeurs de $\psi^k(\beta)$ et $(\psi^1\beta)^k$, il viendra:

$$\sqrt[2n+1]{[A_k+\sqrt{(A_k^2-B_k^{2n+1})}]}=[A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}]^{\frac{k}{2n+1}}[F_k+H_k\cdot\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}],$$

donc la valeur de $\Phi_1\beta$ deviendra:

$$87.\quad \Phi_1\beta=\Phi(2n+1)\beta+\frac{1}{2n+1}\cdot\Big\{[A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}]^{\frac{1}{2n+1}}$$
$$+[F_2+H_2\sqrt{(A^2-B_{2n}^{2n+1})}]\,[A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}]^{\frac{2}{2n+1}}$$
$$+\ldots.[F_{2n}+H_{2n}\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}]\,[A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}]^{\frac{2n}{2n+1}}\Big\}.$$

Par un procédé tout semblable on trouvera

$$88.\quad \Phi\beta=\frac{1}{2n+1}\Big\{\Phi_1\beta+[C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]^{\frac{1}{2n+1}}$$
$$+[K_2+L_2\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]\,[C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]^{\frac{2}{2n+1}}$$
$$+\ldots.[K_{2n}+L_{2n}\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]\,[C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}]^{\frac{2n}{2n+1}}\Big\},$$

où K_2, L_2, K_3, L_3 .... K_{2n}, L_{2n} sont des fonctions rationelles de $\Phi_1\beta$.

Ces expressions de $\varphi_1\beta$ et $\varphi\beta$ n'ont que $2n+1$ valeurs différentes, qu'on obtiendra en attribuant aux radicaux leurs $2n+1$ valeurs. — Il suit de notre analyse, qu'on peut prendre $\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}$ et $\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}$ avec tel signe qu'on voudra.

18.

La valeur, que nous avons trouvée pour $\Phi(\beta)$ ou $\Phi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ contient, encore outre la fonction $\Phi\alpha$, les suivantes:

$$e,\ c,\ \theta,$$

$$\Phi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ \Phi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),\ f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),$$

$$f\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),\ F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ F\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),$$

pour des valeurs quelconques de m depuis 1 jusqu'à $2n$. Maintenant quelle que soit la valeur de m, on peut toujours exprimer algébriquement $\Phi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ en $\Phi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, et $\Phi\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)$ en $\Phi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. Tout est donc connu dans l'expression de $\Phi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, excepté les deux quantités indépendantes de α; $\Phi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\Phi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. — Ces quantités dépendent seulement de c et e, et elles peuvent être trouvées par la résolution d'une équation du degré $(2n+1)^2-1$, savoir de l'équation $\frac{P_{2n+1}}{x}=0$. — Nous allons voir dans le paragraphe suivant, comment on peut en ramener la résolution à celle d'équations moins élévées.

§. V.

C. Sur l'équation $P_{2n+1}=0$.

19.

L'expression, que nous venons de trouver pour $\Phi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ contiendra, comme nous avons vu, les deux quantités constantes $\Phi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$ et $\Phi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. On trouvera ces quantités en résolvant l'équation

$$P_{2n+1}=0,$$

dont les racines seront représentées par

$$x=\Phi\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

où m et μ pourront être tous les nombres entiers depuis $-n$ jusqu'à $+n$. Une de ces racines, qui répond à $m=0$, $\mu=0$, est égale à zéro. Donc P_{2n+1} est divisible par x. En écartant ce facteur, on aura une équation

$$R = 0, \text{ du degré } (2n+1)^2 - 1.$$

En faisant $x^2=r$, l'équation (90.) $R=0$, en r, sera du degré $\frac{(2n+1)^2-1}{2} = 2.n(n+1)$, et les racines de cette équation seront

$$91. \quad r = \Phi^2\left(\frac{m\omega \pm \mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

μ et m ayant toutes les valeurs positives, au dessous de n, en faisant abstraction de la racine zéro.

Nous allons voir maintenant, comment on peut ramener la résolution de l'équation $R=0$ à celle de deux équations, l'une du degré n et l'autre du degré $2n+2$.

D'abord, je dis, qu'on peut réprésenter toutes les valeurs de r par

$$92. \quad \Phi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right) \text{ et } \Phi^2\left(m\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)\ldots,$$

en donnant à μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$, et à m toutes celles depuis 1 jusqu'à n.

En effet $\Phi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ représente d'abord un nombre n de valeurs de r; or les autres peuvent être représentées par $\Phi^2\left(m.\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$. Soit, pour le démontrer, $m\mu=(2n+1)k+m'$, où m' est un nombre entier compris entre les limites $-n$ et $+n$. En substituant, on aura

$$\Phi^2\left(m.\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right) = \Phi^2\left(k.\omega + \frac{m'\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$= \Phi^2\left(\frac{m'\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \Phi^2\left(\frac{-m'\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

$\Phi^2\left(m.\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$ est donc une valeur de r; maintenant à chaque valeur de m, répond une valeur différente de m'. Car si l'on avoit

$$m_1\mu = (2n+1)k_1 + m',$$

il s'en suivrait

$$(m_1-m)\mu = (2n+1).(k-k_1),$$

ce qui est impossible, en remarquant que $2n+1$ est un nombre premier. Donc $\Phi^2\left(m.\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$ combiné avec $\Phi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ représente toutes les valeurs de r.

Cela posé, soit

$$93.\quad \left[r-\Phi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\right]\left[r-\Phi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\right]\ldots\left[r-\Phi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)\right]$$
$$= r^n + p_{n-1}.r^{n-1} + p_{n-2}.r^{n-2} + \ldots + p_1.r + p_0.$$

Les quantités $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}$, seront des fonctions rationelles et symétriques de $\Phi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\Phi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\ldots\Phi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)$; or ces fonctions peuvent être trouvées au moyen d'une équation de degré $2n+2$.

Soit p une fonction rationelle et symétrique quelconque de $\Phi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)$, $\Phi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right)\ldots\Phi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right)$, où ω' désigne la quantité $m\omega+\mu\varpi i$.

Par les formules que nous avons données plus haut pour exprimer $\Phi(n\beta)$ en $\Phi\beta$, il est clair, qu'on peut exprimer $\Phi^2\left(m'.\frac{\omega'}{2n+1}\right)$ en fonction rationelle de $\Phi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)$. Donc on peut faire

$$94.\quad p=\psi.\left[\Phi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)\right]=\theta\left[\Phi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right),\ \Phi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right),\ \ldots\ \Phi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right)\right],$$

θ désignant une fonction symétrique et rationelle. En mettant $\nu\omega'$ au lieu de ω', il viendra

$$95.\quad \psi\left[\Phi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right)\right]=\theta\left[\Phi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right),\ \Phi^2\left(\frac{2\nu\omega'}{2n+1}\right),\ \ldots\ \Phi^2\left(\frac{n\nu\omega'}{2n+1}\right)\right],$$

or, en faisant:

$$a.\nu = (2n+1).k'_a + k_a,$$

où k_a est entier et compris entre $-n$ et $+n$, la serie

$$k_1,\ k_2\ \ldots\ldots\ k_n$$

aura au signe près les mêmes termes que celle-ci:

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ n;$$

donc il est clair, que le second membre de l'équation (95.) aura la même valeur que p. Donc:

$$96.\quad \psi\left[\Phi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\Phi\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)\right],$$

équation, qui en faisant $\omega'=\omega$ et $\omega'=m\omega+\varpi i$, donnera ces deux-ci:

$$97.\quad \begin{cases}\psi\left[\Phi^2\left(\frac{\nu\omega}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\Phi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\right],\\ \psi\left[\Phi^2\left(\nu.\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\Phi^2\left(\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)\right],\end{cases}$$

ou bien, en faisant, pour abréger,

$$98.\quad \Phi^2\left(\frac{\nu\omega}{2n+1}\right)=r_\nu,\quad \Phi^2\left(\nu.\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)=r_{\nu,m},$$

il viendra:

$$99.\quad \psi . r_\nu = \psi r_1;\ \psi r_{\nu,m} = \psi r_{1,m}.$$

Cela posé, soit

$$100.\quad \begin{cases} (p-\psi r_1)(p-\psi r_{1,0})(p-\psi r_{1,1})(p-\psi r_{1,2}) \ldots . (p-\psi r_{1,2n}) \\ \qquad = q_0 + q_1 . p + q_2 . p^2 + \ldots . q_{2n+1} . p^{2n+1} + p^{2n}. \end{cases}$$

Je dis, qu'on peut exprimer les coefficiens q_0, q_1 etc. rationellement en e et c.

D'abord en vertu des formules connues on peut exprimer rationellement ces coefficiens en t_1, $t_2 \ldots . t_{2n}$, si l'on fait, pour abréger,

$$101.\quad t_k = (\psi r_1)^k + (\psi r_{1,0})^k + (\psi r_{1,1})^k + \ldots . + (\psi r_{1,2n})^k.$$

Il s'agit donc de trouver les quantités t_1, $t_2 \ldots .$, or cela se pourra aisément au moyen des relations (99.). En effet, en y faisant successivement $\nu = 1, 2 \ldots n$, après avoir élevé les deux membres à la $k^{\text{ème}}$ puissance, on en tirera sur le champ:

$$102.\quad \begin{cases} (\psi r_1)^k = \frac{1}{n}[(\psi r_1)^k + (\psi r_2)^k + \ldots . + (\psi r_n)^k], \\ (\psi r_{1,m})^k = \frac{1}{n}[(\psi r_{1,m})^k + (\psi r_{2,m})^k + \ldots . + (\psi r_{n,m})^k]. \end{cases}$$

Donc en mettant pour m tous les nombres entiers 0, 1, ... $2n$, et ensuite substituant dans l'expression de t_k, il viendra:

$$103.\quad \begin{cases} n . t_k = (\psi r_1)^k + (\psi r_2)^k + \ldots . + (\psi r_n)^k \\ \quad + (\psi r_{1,0})^k + (\psi r_{2,0})^k + \ldots . + (\psi r_{n,0})^k \\ \quad + (\psi r_{1,1})^k + (\psi r_{2,1})^k + \ldots . + (\psi r_{n,1})^k \\ \quad + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \quad + (\psi r_{1,2n})^k + (\psi r_{2,2n})^k + \ldots . + (\psi r_{n,2n})^k. \end{cases}$$

Cette valeur de t_k est, comme on voit, une fonction rationelle et symétrique des $2n+2$ quantités r_1, r_2, ... r_n; $r_{1,0}$, $r_{2,0}$, ... $r_{n,0}$ .... $r_{1,2n}$, $r_{2,2n}$ .... $r_{n,2n}$, qui sont les $2n+2$ racines de l'équation $R = 0$. Donc, comme on sait, t_k pourra s'exprimer rationellement par les coefficiens de cette équation, et par suite en fonction rationelle de e et c. Ayant ainsi trouvé les quantités t_k, on en tire les valeurs de q_0, q_1, ... q_{2n+1}; qui seront également des fonctions rationelles de e et c.

20.

Cela posé, en supposant

$$104.\quad 0 = q_0 + q_1 . p + q_2 . p^2 + \ldots . . + q_{2n+1} . p^{2n+1} + p^{2n+2},$$

on aura une équation du $(2n+2)^{\text{ème}}$ degré, dont les racines seront

$$\psi r_1;\ \psi r_{1,0};\ \psi r_{1,1};\ \psi r_{1,2} \ldots . . \psi r_{1,2n}.$$

La

La fonction ψr_1, c'est-à-dire, une fonction quelconque rationelle et symétrique des racines $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots r_n$ pourra donc être trouvée au moyen d'une équation du degré $2n+2$.

Donc on aura de cette manière les coefficiens $p_0, p_1, \ldots\ldots p_{n-1}$, en résolvant un nombre n d'équations, chacune du $(2n+2)^{\text{ème}}$ degré.

Ayant déterminé $p_0, p_1, \ldots\ldots$, on aura, en résolvant l'équation

$$105.\quad 0 = p_0 + p_1 r + \ldots\ldots + p_{n-1}.r^{n-1} + r^n,$$

la valeur des quantités

$$r_1, r_2, \ldots\ldots r_n;\quad r_{1,0}, r_{2,0}, \ldots\ldots r_{n,0};\quad r_{1,1}, r_{2,1}, \ldots\ldots r_{n,1} \text{ etc. etc.,}$$

dont la première est égale à $\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$. Donc la détermination de cette quantité, ou bien la résolution de l'équation $R = 0$, qui est du degré $(2n+2).n$, est réduite à celle d'équations du degré $(2n+2)$ et n.

Mais on peut encore simplifier le procédé précédent. En effet, comme nous le verrons, pour avoir les quantités $p_0, p_1, \ldots\ldots$, il suffit de connoître l'une quelconque d'entre elles, et alors on peut exprimer les autres rationellement par celle-là.

Soient généralement p, q deux fonctions rationelles et symétriques des quantités $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$, on peut faire, comme nous l'avons vu:

$$p = \psi r_1;\quad q = \theta r_1,$$

ψr_1 et θr_1 désignant deux fonctions rationelles de r_1, qui ont cette propriété: de rester les mêmes, si l'on change r_1 en une autre quelconque des quantités $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$.

Supposons maintenant:

$$s_k = (\psi r_1)^k.\theta r_1 + (\psi r_{1,0})^k.\theta r_{1,0} + (\psi r_{1,1})^k.\theta r_{1,1} + \ldots\ldots + (\psi r_{1,2n})^k.\theta r_{1,2n},$$

je dis que s_k pourra être éxprimé rationellement en e et c.

En effet, on a

$$(\psi r_1)^k.\theta r_1 = (\psi r_\nu)^k.\theta r_\nu = \frac{1}{n}\{(\psi r_1)^k.\theta r_1 + (\psi r_2)^k.\theta r_2 + \ldots\ldots + (\psi r_n)^k.\theta r_n\},$$

$$(\psi r_{1,m})^k.\theta r_{1,m} = (\psi r_{\nu,m})^k.\theta r_{\nu,m} = \frac{1}{n}\{(\psi r_{1,m})^k.\theta r_{1,m} + (\psi r_{2,m})^k.\theta r_{2,m} + \ldots + (\psi r_{n,m})^k.\theta r_{n,m}\}.$$

En faisant $m = 0, 1, 2, \ldots\ldots 2n$, et substituant dans l'expression de s_k, on verra, que s_k sera une fonction rationelle et symétrique des racines $r_0, r_1, \ldots\ldots r_{1,0}$ etc., etc. de l'équation $R = 0$; donc s_k pourra s'exprimer rationellement en e et c.

Connoissant s_k, on obtiendra, en faisant $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots 2n$, $2n+1$ équations, desquelles on tirera aisément la valeur de θr_1 en fonc-

tion rationelle de $\psi_1 r$. Donc, une fonction de la forme p étant donnée, on peut exprimer une autre fonction quelconque de la même forme en fonction rationelle de p. Donc, comme nous l'avons dit, on peut exprimer les coefficiens $p_0, p_1, \ldots\ldots p_{n-1}$ rationellement par l'un quelconque d'entre eux. Donc enfin, pour en avoir les valeurs, il suffit de résoudre une seule équation du degré $2n+2$, et par conséquent, pour avoir les racines de l'équation $R=0$, il suffit de résoudre une équation du degré $2n+2$, et $2n+2$ équations du degré n.

21.

Maintenant, parmi les équations, dont dépend la détermination des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{2m+1}\right)$; $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$, celles du degré n peuvent être résolues algébriquement. Le procédé, par lequel nous allons effectuer cette résolution est entièrement semblable à celui, qui est dû à M. Gaufs pour la résolution de l'équation

$$\theta^{2n+1} - 1 = 0.$$

Soit proposée l'équation

$$106. \quad 0 = p_1 + p_1 . r + p_2 . r^2 + \ldots\ldots + p_{n-1} . r^{n-1} + r^n,$$

dont les racines sont:

$$\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right);\ \varphi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right);\ \ldots\ldots\ \varphi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right),$$

où ω' a une des valeurs de ω, $m\omega + \varpi i$. Désignons par α une des racines primitives du nombre $2n+1$, c'est-à-dire, un nombre entier tel, que $\mu = 2n+1$ est le nombre le plus petit, qui rende $\alpha^\mu - 1$ divisible par $2n+1$, je dis, que les racines de l'équation (106.) peuvent aussi être représentées par

$$107. \quad \varphi^2(\varepsilon),\ \varphi^2(\alpha\varepsilon),\ \varphi^2(\alpha^2\varepsilon),\ \varphi^2(\alpha^3\varepsilon) \ldots . \varphi^2(\alpha^{n-1} . \varepsilon),$$

où $\varepsilon = \frac{\omega'}{2n+1}$.

Soit

$$\alpha^m = (2n+1)k_m \pm a_m,$$

où k est entier et a_m entier, positif et moindre que $n+1$, je dis, que les termes de la série

$$1,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_{n-1}$$

seront tous différens entre eux.

En effet, si l'on a

$$a_m = a_\mu,$$

il en résulte,

$$\text{ou } \alpha^m - \alpha^\mu = (2n+1)(k_m - k_\mu),$$
$$\text{ou } \alpha^m + \alpha^\mu = (2n+1)(k_m + k_\mu).$$

Il faut donc que l'une des quantités $\alpha^m - \alpha^\mu$, $\alpha^m + \alpha^\mu$ soit divisible par $2n+1$; or soit posé $m > \mu$, ce qui est permis, il faut que $\alpha^{m-\mu} - 1$ ou $\alpha^{m-\mu} + 1$ soit divisible par n; or cela est impossible, car $m - \mu$ est moindre que n.

Donc les quantités 1, a_1, $a_2 \ldots . a_{n-1}$ sont différentes entre elles et par conséquent elles coincident, mais dans un ordre différent, avec les nombres $1, 2, 3, 4 \ldots . n$.

Donc, en remarquant que

$$\varphi^2\{[(2n+1)k_m \pm a_m]\varepsilon\} = \varphi^2(a_m\varepsilon),$$

on voit que les quantités (107.) sont les mêmes que celles-ci:

$$\varphi^2(\varepsilon),\ \varphi^2(2\varepsilon) \ldots . \varphi^2(n\varepsilon),$$

c'est-à-dire les racines de l'équation (106.) c. q. f. d.

Il y a encore à remarquer, qu'ayant

$$\alpha^n = (2n+1)k_n - 1,$$

on aura

$$\alpha^{n+m} = (2n+1)k_n\alpha^m - \alpha^m,$$

donc

$$a_{n+m} = -a_m$$

et

$$\varphi^2(\alpha^{n+m}\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon).$$

Cela posé, soit θ une racine imaginaire quelconque de l'équation

$$\theta^n - 1 = 0$$

et

108. $$\psi(\varepsilon) = \varphi^2(\varepsilon) + \varphi^2(\alpha\varepsilon)\theta + \varphi^2(\alpha^2\varepsilon)\theta^2 + \ldots . + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)\theta^{n-1}.$$

En vertu de ce que nous avons vu précédemment, le second membre de cette équation peut être transformé en une fonction rationelle de $\varphi^2(\varepsilon)$. Faisons

109. $$\psi(\varepsilon) = \chi[\varphi^2(\varepsilon)].$$

En mettant dans la première expression de $\psi(\varepsilon)$, $\alpha^m\varepsilon$ aulieu de ε, il viendra:

$$\psi(\alpha^m\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) + \varphi^2(\alpha^{m+1}\varepsilon).\theta + \varphi^2(\alpha^{m+2}\varepsilon).\theta^2 + \ldots .$$
$$\ldots . + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).\theta^{n-m-1} + \varphi^2(\alpha^n\varepsilon).\theta^{n-m} + \ldots . + \varphi^2(\alpha^{n+m-1}\varepsilon)\theta^{n-1},$$

mais nous avons vu, que $\varphi^2(\alpha^{n+m}\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon)$; donc:

$$\psi(\alpha^m\varepsilon) = \theta^{n-m}.\varphi^2(\varepsilon) + \theta^{n-m+1}.\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \theta^{n-m+2}.\varphi^2(\alpha^2\varepsilon) + \ldots .$$
$$\ldots . + \theta^{n-1}.\varphi^2(\alpha^{m-1}\varepsilon) + \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) + \theta.\varphi^2(\alpha^{m+1}\varepsilon) + \ldots . + \theta^{n-m-1}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).$$

En multipliant par θ^m, le second membre deviendra égal a $\psi(\varepsilon)$, donc:

$$110.\quad \psi(\alpha^m\varepsilon) = \theta^{-m}.\psi(\varepsilon),$$

ou bien:

$$\psi(\varepsilon) = \theta^m.\chi[\varphi^2(\alpha^m\varepsilon)],$$

d'où, en élévant les deux à la $n^{\text{ème}}$ puissance, on tire en vertu de la relation $\theta^{-mn} = 1$:

$$111.\quad [\psi(\varepsilon)]^n = \{\chi[\varphi^2(\alpha^m\varepsilon)]\}^n.$$

Cette formule donne, en faisant successivement $m = 0, 1, 2, 3 \ldots \ldots n-1, n$ équations, qui, ajoutées membres à membres donneront la suivante:

$$112.\quad n[\psi(\varepsilon)]^n = \{\chi[\varphi^2(\varepsilon)]\}^n + \{\chi[\varphi^2(\alpha\varepsilon)]\}^n + \{\chi[\varphi^2(\alpha^2\varepsilon)]\}^n + \ldots + \{\chi[\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)]\}^n;$$

or, le second membre de cette équation est une fonction rationelle et symétrique des quantités $\varphi^2(\varepsilon)$, $\varphi^2(\alpha\varepsilon) \ldots \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)$, c'est-à-dire des racines de léquation (106.); donc $(\psi\varepsilon)^n$ peut être exprimé en fonction rationelle de $p_0, p_1 \ldots p_{n-1}$, par conséquent en fonction rationelle de l'une quelconque de ces quantités. Soit v la valeur de $\psi(\varepsilon)$, on aura

$$113.\quad \sqrt[n]{v} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta.\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \theta^2.\varphi^2(\alpha^2\varepsilon) + \ldots + \theta^{n-1}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).$$

Cela posé, soit $\theta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Les racines imaginaires de l'équation $\theta^n - 1$ peuvent être représentées par

$$\theta^1,\ \theta^2 \ldots\ldots \theta^{n-1}.$$

Donc en faisant successivement θ égal à chacune de ces racines et désignant les valeurs correspondantes de v par $v_1, v_2 \ldots v_{n-1}$, il viendra

$$\sqrt[n]{v_1} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta.\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \ldots\ldots + \theta^{n-1}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon),$$
$$\sqrt[n]{v_2} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta^2.\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \ldots\ldots + \theta^{2n-2}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sqrt[n]{v_{n-1}} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta^{n-1}.\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \ldots\ldots + \theta^{(n-1)^2}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).$$

En combinant ces équations avec la suivante:

$$-p_{n-1} = \varphi^2(\varepsilon) + \varphi^2(\alpha\varepsilon) + \ldots\ldots + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon),$$

on en tire aisément:

$$114.\quad \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) = +\frac{1}{n}\{-p_{n-1} + \theta^{-m}.\sqrt[n]{v_1} + \theta^{-2m}.\sqrt[n]{v_2} + \theta^{-3m}.\sqrt[n]{v_3} + \ldots$$
$$\ldots + \theta^{-(n-1)m}\sqrt[n]{v_{n-1}}\},$$

et pour $m = 0$:

$$115.\quad \varphi^2(\varepsilon) = \frac{1}{n}\{-p_{n-1} + \sqrt[n]{v_1} + \sqrt[n]{v_2} + \ldots + \sqrt[n]{v_{n-1}}\}.$$

22.

Toutes les racines de l'équation (106.) sont contenues dans la formule (115.), mais puisque leur nombre n'est que n, il reste encore à donner à $\Phi^2(\varepsilon)$ une forme, qui ne contienne pas des racines étrangères à la question. Or cela se fait aisément, comme suit:

Soit

$$s_k = \frac{\sqrt[n]{v_k}}{(\sqrt[n]{v_1})^k}.$$

En posant ici ε au lieu de $\alpha^m\varepsilon$, $\sqrt[n]{v_k}$ se changera en $\theta^{-km}.\sqrt[n]{v_k}$, et v_1 en $\theta^{-m}.v_1$, donc s_k se changera en:

$$\frac{\theta^{-km}.\sqrt[n]{v_k}}{(\theta^{-m}\sqrt[n]{v_1})^k} = \frac{\sqrt[n]{v_k}}{(\sqrt[n]{v_1})^k}.$$

La fonction s_k, comme on voit, ne change pas de valeur, en mettant $\alpha^m\varepsilon$ au lieu de ε. Or p_k est une fonction rationelle de $\Phi^2(\varepsilon)$. Donc, en désignant p_k par $\lambda[\Phi^2(\varepsilon)]$, on aura

$$s_k = \lambda[\Phi^2(\alpha^m\varepsilon)],$$

quel que soit le nombre entier m. De là on tirera de la même manière, et comme nous avons trouvé $(\psi\varepsilon)^n$, la valeur de s_k, en fonction rationelle de l'une des quantités $p_0, p_1, \ldots . p_{n-1}$. Connoissant s_k, on a:

$$\sqrt[n]{v_k} = s_k.(\sqrt[n]{v_1})^k.$$

Donc, en mettant v au lieu de v_1, l'expression de $\Phi^2(\alpha^m\varepsilon)$ deviendra:

116. $$\Phi^2(\alpha^m\varepsilon) = \frac{1}{n}\left\{-p_{n-1} + \theta^{-m}.v^{\frac{1}{n}} + s_2\theta^{-2m}.v^{\frac{2}{n}} + \ldots . + s_{n-1}\theta^{-(n-1)m}.v^{\frac{n-1}{n}}\right\},$$

pour $m = 0$:

117. $$\Phi^2(\varepsilon) = \frac{1}{n}\left\{-p_{n-1} + v^{\frac{1}{n}} + s_2.v^{\frac{2}{n}} + s_3.v^{\frac{3}{n}} + \ldots . + s_{n-1}.v^{\frac{n-1}{n}}\right\}.$$

Cette valeur n'a que n valeurs différentes, qui répondent aux n valeurs de $v^{\frac{1}{n}}$. Donc en dernier lieu la résolution de l'équation $P_{2n+1} = 0$ est réduite à celle d'une seule équation du degré $2n+2$; mais cette équation ne paraît pas en général être résoluble algébriquement. Néanmoins on peut la résoudre complètement dans plusieurs cas particuliers, p. ex., lorsque $e=c$, $e=c\sqrt{3}$, $e=c(2\pm\sqrt{3})$ etc. Dans le cours de ce mémoire je m'occuperai de ces cas, dont le premier surtout est remarquable, tant par la simplicité de la solution, que par sa belle application dans la géométrie.

En effet entre autres je suis parvenu à ce théorème:

„On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate par la „règle et le compas seuls, en m parties égales, si m est de la forme „2^n ou 2^{n+1}, le dernier nombre étant en même temps premier; ou „bien si m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes."

Ce théorème est, comme on voit, précisément le même que celui de M. Gaufs, relativement au cercle.

§. VI.

Expressions diverses des fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$.

23.

En faisant usage des formules connues, qui donnent les valeurs des coefficiens d'une équation algébrique en fonction des racines, on peut tirer plusieurs expressions des fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ des formules du paragraphe précédent.

Je vais considérer les plus remarquables.

Pour abréger les formules, je me servirai des notations suivantes: Je désignerai:

1) Par $\sum_{k}^{k'}{}_{m}\psi(m)$ la somme, et par $\prod_{k}^{k'}{}_{m}\psi(m)$ le produit de toutes les quantités de la forme $\psi(m)$, qu'on obtiendra, en donnant à m toutes les valeurs entières, depuis k jusqu'à k', les limites k et k' y compris.

2) Par $\sum_{k}^{k'}{}_{m}\sum_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\psi(m,\mu)$ la somme, et par $\prod_{k}^{k'}{}_{m}\prod_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\psi(m,\mu)$ le produit de toutes les quantités de la forme $\psi(m,\mu)$, qu'on obtiendra, en donnant à m toutes les valeurs entières de k à k', et à μ les valeurs entières de ν à ν', en y comprenant toujours les limites.

D'après cela il est clair, qu'on aura:

$$119.\quad \sum_{k}^{k'}{}_{m}\psi(m) = \psi(k)+\psi(k+1)+\ldots\ldots\psi(k'),$$

$$120.\quad \prod_{k}^{k'}{}_{m}\psi(m) = \psi(k)\,.\,\psi(k+1)+\ldots\ldots\psi(k'),$$

$$121.\quad \sum_{k}^{k'}{}_{m}\sum_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\psi(m,\mu) = \sum_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\psi(k,\mu)+\sum_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\psi(k+1,\mu)+\ldots\ldots+\sum_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\psi(k',\mu),$$

$$122.\quad \prod_{k}^{k'}{}_{m}\prod_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\psi(m,\mu) = \prod_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\psi(k,\mu)\,.\,\prod_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\psi(k+1,\mu)\ldots\ldots\ldots\prod_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\psi(k',\mu).$$

Cela posé, considérons les équations

$$123.\quad \begin{cases} \varphi(2n+1)\beta = \dfrac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \\ f(2n+1)\beta = \dfrac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \\ F(2n+1)\beta = \dfrac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}}. \end{cases}$$

Nous avons vu, que P_{2n+1} est une fonction rationelle de x du degré $(2n+1)^2$ et de la forme $x.\psi(x^2)$. De même P'_{2n+1} et P''_{2n+1} sont des fonctions de cette même forme, la première de y et la seconde de z. Enfin Q_{2n+1} est une fonction qui, exprimée indistinctement en x, y ou z, sera du degré $(2n+1)^2-1$, et contiendra seulement des puissances paires. Donc on aura

$$P_{2n+1} = A.x^{(2n+1)^2} + \ldots\ldots + B.x; \quad P'_{2n+1} = A'.y^{(2n+1)^2} + \ldots\ldots + B'.y;$$
$$P''_{2n+1} = A''.z^{(2n+1)^2} + \ldots\ldots + B''.z; \quad Q_{2n+1} = C.x^{(2n+1)^2-1} + \ldots\ldots + D;$$
$$Q_{2n+1} = C'.y^{(2n+1)^2-1} + \ldots\ldots + D'; \quad Q_{2n+1} = C''.z^{(2n+1)^2-1} + \ldots\ldots + D''.$$

En substituant ces valeurs dans (123.), il viendra

$$\{A.x^{(2n+1)^2} + \ldots\ldots + B.x\} - \varphi(2n+1)\beta.\{C.x^{(2n+1)^2-1} + \ldots\ldots + D\},$$
$$\{A'.y^{(2n+1)^2} + \ldots\ldots + B'.y\} - f(2n+1)\beta.\{C'.y^{(2n+1)^2-1} + \ldots\ldots + D'\},$$
$$\{A''.z^{(2n+1)^2} + \ldots\ldots + B''.z\} - F(2n+1)\beta.\{C''.z^{(2n+1)^2-1} + \ldots\ldots + D''\}.$$

Dans la première de ces équations A est le coefficient du premier terme, $-\varphi(2n+1)\beta.C$ celui du second et $-\varphi(2n+1)\beta.D$ le dernier terme. Donc $\frac{C}{A}\varphi(2n+1)\beta$ est égal à la somme et $\pm\frac{D}{A}\varphi(2n+1)\beta$ égal au produit des racines de l'équation dont il s'agit, équation, qui est la même, que celle-ci:

$$124.\quad \Phi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Donc en remarquant que A, C et D (et en général tous les coefficiens) sont indépendans de β, on voit que $\Phi(2n+1)\beta$ est (d'un coefficient constant près) égal à la somme et au produit de toutes les racines de l'équation (124.).

De la même manière on voit que $f(2n+1)\beta$ et $F(2n+1)\beta$ sont respectivement égaux au produit ou à la somme des racines des équations

$$f(2n+1)\beta = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \quad F(2n+1)\beta = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}},$$

en ayant attention de multiplier le résultat par un coefficient constant, choisi convenablement.

Maintenant les racines des équations (123.) d'après le No. 11. sont respectivement:

$$x = (-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

$$y = (-1)^{m}.f\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

$$z = (-1)^{\mu}.F\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

où les limites de m et μ sont $-n$ et $+n$.

Donc en vertu de ce qu'on vient de voir, et en faisant usage des notations adoptées, on aura les formules suivantes:

$$125.\quad \begin{cases} \varphi(2n+1)\beta = A.\sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\beta + \frac{m.\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ f(2n+1)\beta = A'.\sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{m}.f\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ F(2n+1)\beta = A''.\sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{\mu}.F\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right); \\ \varphi(2n+1)\beta = B.\prod_{-n}^{+n}{}_m \prod_{-n}^{+n}{}_\mu .\varphi\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ f(2n+1)\beta = B'.\prod_{-n}^{+n}{}_m \prod_{-n}^{+n}{}_\mu .f\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ F(2n+1)\beta = B''.\prod_{-n}^{+n}{}_m \prod_{-n}^{+n}{}_\mu .F\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right). \end{cases}$$

Pour déterminer les quantités constantes A, A', A'', B, B', B'', il faudra donner à β une valeur particulière. Ainsi en faisant dans les trois premières formules $\beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i$, après avoir divisé les deux membres par $\varphi\beta$, il viendra, en remarquant que $\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}$:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\varphi(2n+1)\beta}{\varphi\beta} \\ A' &= \frac{f(2n+1)\beta}{f\beta} \\ A'' &= \frac{F(2n+1)\beta}{f\beta} \end{aligned}\right\} \text{ pour } \beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i.$$

Soit

Soit $\beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i + \alpha$, on a:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\varphi\left((2n+1)\alpha + n\omega + n\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{\varphi\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} \\
&= \frac{\varphi\left((2n+1)\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{\varphi\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} = \frac{\varphi\alpha}{\varphi(2n+1)\alpha}, \\
A' &= \frac{f\left((2n+1)\alpha + n\omega + n\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{f\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} \\
&= (-1)^n \cdot \frac{f\left((2n+1)\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{f\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} = (-1)^n \cdot \frac{f\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}{f\left((2n+1)\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}, \\
A'' &= \frac{F\left((2n+1)\alpha + n\omega + n\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{F\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} \\
&= (-1)^n \cdot \frac{F\left((2n+1)\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{F\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} = (-1)^n \cdot \frac{F\left(\alpha + \frac{\varpi}{2} i\right)}{F\left((2n+1)\alpha + \frac{\varpi}{2} i\right)}.
\end{aligned}\right\} \text{pour } \alpha = 0.$$

Ces expressions de A, A', A'' deviendront de la forme $\frac{0}{0}$, en faisant $\alpha = 0$, donc on trouvera d'après les règles connues:

$$A = \frac{1}{2n+1}, \quad A' = A'' = \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

D'après cela les trois premières formules deviendront:

$$126. \quad \begin{cases}
\varphi(2n+1)\beta = \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{m+\mu} \cdot \varphi\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
f(2n+1)\beta = \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^m \cdot f\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
F(2n+1)\beta = \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^\mu \cdot F\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right).
\end{cases}$$

Pour avoir la valeur des constantes B, B', B'', je remarque, qu'on aura:

$$127.\quad \overset{+n}{\underset{-n}{\Pi_m}}\overset{+n}{\underset{-n}{\Pi_\mu}}\psi(m,\mu) = \psi(0,0).\overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\psi(m,0).\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}\psi(0,\mu)$$
$$\times \overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}\psi(m,\mu).\psi(-m,-\mu).\overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}\psi(m,-\mu).\psi(-m,\mu).$$

En appliquant cette transformation aux formules (126.), divisant la première par $\varphi\beta$, la seconde par $f\beta$ et la troisième par $F\beta$, faisant ensuite dans la première $\beta = 0$, dans la seconde $\beta = \frac{\omega}{2}$ et dans la troisième $\beta = \frac{\varpi}{2} i$, et remarquant que $\frac{\varphi(2n+1)\beta}{\varphi\beta} = 2n+1$, pour $\beta = 0$, que $\frac{f(2n+1)\beta}{f\beta} = 2n+1$, pour $\beta = \frac{\omega}{2}$, et que $\frac{F(2n+1)\beta}{F\beta} = 2n+1$, pour $\beta = \frac{\varpi}{2} i$: on trouvera:

$$128.\quad \begin{cases} (2n+1) = B.\overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right).\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) \\ \qquad \times \overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ (2n+1) = B'.\overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right).\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) \\ \qquad \times \overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ (2n+1) = B''.\overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right).\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) \\ \qquad \times \overset{n}{\underset{1}{\Pi_m}}\overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}}F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right) \end{cases}$$

En tirant de ces équations les valeurs de B, B', B'', et les substituant ensuite dans les formules transformées, il viendra:

129.
$$\left\{\begin{aligned}
&\varphi(2n+1)\beta = \\
&(2n+1)\varphi\beta.\prod_{1}^{n}{}_{m}\frac{q\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right).q\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}.\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{q\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right).q\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \\
&\times\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{q\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).q\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}.\frac{q\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right).q\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}, \\
&f(2n+1)\beta = \\
&(2n+1)f\beta.\prod_{1}^{n}{}_{m}\frac{f\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right).f\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}.\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{f\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right).f\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \\
&\times\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{f\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).f\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}.\frac{f\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right).f\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}, \\
&F(2n+1)\beta = \\
&(2n+1)F\beta.\prod_{1}^{n}{}_{m}\frac{F\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right).F\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}.\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{F\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right).F\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \\
&\times\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{F\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).F\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}.\frac{F\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right).F\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}.
\end{aligned}\right.$$

On peut donner à ces formules des formes plus simples, en faisant usage des formules suivantes:

$$\frac{\varphi(\beta+\alpha).\varphi(\beta-\alpha)}{\varphi^2\alpha} = -\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}},$$

$$\frac{f(\beta+\alpha).f(\beta-\alpha)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)} = -\frac{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}}{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}},$$

$$\frac{F^2(\beta+\alpha).F(\beta-\alpha)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)} = -\frac{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}}{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}},$$

qu'on verifiera aisément au moyen des formules (13.), (16.), (18.).

En vertu de ces formules il est clair, qu'on peut mettre les équations (129.) sous la forme:

130.
$$\left\{\begin{array}{l}
\varphi(2n+1)\beta = \\
(2n+1)\varphi\beta.\prod_1^n{}_m \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}.\prod_1^n{}_\mu \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\
\quad\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu \dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.\dfrac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}, \\
f(2n+1)\beta = \\
(2n+1)f\beta.\prod_1^n{}_m \dfrac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}+\frac{\omega}{2}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}.\prod_1^n{}_\mu \dfrac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\
\quad\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu \dfrac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.\dfrac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}, \\
F(2n+1)\beta = \\
(2n+1)F\beta.\prod_1^n{}_m \dfrac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}.\prod_1^n{}_\mu \dfrac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\
\quad\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu \dfrac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.\dfrac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.
\end{array}\right.$$

Ces formules donnent, comme on voit, les valeurs de $\varphi(2n+1)\beta$, $f(2n+1)\beta$ et $F(2n+1)\beta$, exprimées respectivement en fonctions rationelles de $\varphi\beta$, $f\beta$ et $F\beta$, sous la forme de produits.

Nous donnerons encore les valeurs de $f(2n+1)\beta$, $F(2n+1)\beta$ sous une autre forme, qui sera utile dans la suite.

On a $f^2\beta = 1 - c^2\varphi^2\beta$, donc

$$1 - \frac{f^2\beta}{f^2\alpha} = \frac{c^2(\varphi^2\beta - \varphi^2\alpha)}{f^2\alpha} = \frac{c^2}{f^2\alpha}\varphi^2\beta - \frac{c^2\varphi^2\alpha}{f^2\alpha}$$

et

$$1 - \frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)} = \frac{c^2\left[\varphi^2\beta - \varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\right]}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)},$$

or en vertu de (18.) on a:

$$f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = \frac{e^2+c^2}{e^2}\cdot\frac{1}{f^2\alpha};$$

donc:

$$\frac{1-\frac{f^2\beta}{f^2\alpha}}{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}} = \frac{1}{f^4\alpha}\cdot\frac{e^2+c^2}{e^2}\cdot\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}}.$$

On trouvera de même:

$$\frac{1-\frac{F^2\beta}{F^2\alpha}}{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}} = \frac{1}{F^4\alpha}\cdot\frac{e^2+c^2}{e^2}\cdot\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}}.$$

En vertu de ces formules, et en faisant $\beta = 0$, pour déterminer le facteur constant, il est clair, qu'on peut écrire les expressions de $f(2n+1)\beta$, $F(2n+1)\beta$, comme suit:

130.
$$\left\{\begin{aligned} f(2n+1)\beta = f\beta.\prod_{1}^{n}{}_{m}\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}.\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\ \times\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}, \\ F(2n+1)\beta = F\beta.\prod_{1}^{n}{}_{m}\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}.\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\ \times\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}. \end{aligned}\right.$$

Dans ce paragraphe nous n'avons considéré les fonctions $\Phi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$, que dans le cas des valeurs impaires de n. On pourroit trouver des expressions analogues de ces fonctions pour des valeurs paires de n; mais comme il n'y a dans cela aucune difficulté et que d'ailleurs les formules, aux quelles nous sommes parvenus, sont celles qui nous seront le plus utiles dans la suite, je ne m'en occuperai pas.

§. VII.

Développement des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en séries et en produits infinis.

24.

En faisant dans les formules du paragraphe précédent $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, on obtiendra des expressions des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, qui, à cause du nombre indéterminé n, peuvent être variées d'une infinité de manières.

Parmi toutes les formules, qu'on obtiendra ainsi, celles qui résultent de la supposition de n infini, sont les plus remarquables. Alors les fonctions φ, f, F disparaîtront des valeurs de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, et on obtiendra pour ces fonctions des expressions algébriques, mais composées d'une infinité de termes. Pour avoir ces expressions, il faut faire dans les formules (126.), (130.) $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et ensuite chercher la limite du second membre de ces équations pour des valeurs toujours croissantes de n. Pour abréger, soit v une quantité, dont la limite est zèro pour des valeurs toujours croissantes de n. Cela posé considérons successivement les trois formules (126.).

En faisant dans la première des formules (126.) $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et remarquant que

$$131.\quad \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta(m,\mu) = \theta(0,0) + \sum_{1}^{n}{}_m \theta(m,0) + \sum_{1}^{n}{}_\mu \theta(0,\mu)$$
$$+ \sum_{1}^{n}{}_m \sum_{1}^{n}{}_\mu \{\theta(m,\mu) + \theta(-m,-\mu) + \theta(m,-\mu) + \theta(-m,\mu)\},$$

il est clair, qu'on peut mettre la formule, dont il s'agit, sous la forme:

$$132.\quad \varphi\alpha = \frac{1}{2n+1}\cdot\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{n}{}_m(-1)^m\left\{\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right) + \varphi\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{n}{}_\mu(-1)^\mu\left\{\varphi\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right) + \varphi\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right\} - \frac{i}{ec}\cdot\sum_{1}^{n}{}_m\sum_{1}^{n}{}_\mu(-1)^{m+\mu}\cdot\psi(n-m, n-\mu)$$
$$+ \frac{i}{ec}\sum_{1}^{n}{}_m\sum_{1}^{n}{}_\mu(-1)^{m+\mu}\cdot\psi_1(n-m, n-\mu),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$133.\quad \begin{cases} \psi(m,\mu) = \frac{1}{2n+1}\cdot\left\{\frac{1}{q\left(\frac{\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)} + \frac{1}{q\left(\frac{\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}, \\ \psi_1(m,\mu) = \frac{1}{2n+1}\cdot\left\{\frac{1}{q\left(\frac{\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)} + \frac{1}{q\left(\frac{\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}. \end{cases}$$

Maintenant, en remarquant, que

$$\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right) + \varphi\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right) = \frac{2q\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\cdot f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)\cdot F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\cdot q^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)\cdot q^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)} = \frac{A_m}{2n+1},$$

$$\varphi\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right) + \varphi\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{2q\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\cdot f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot F\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\cdot q^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot q^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)} = \frac{B_\mu}{2n+1},$$

où A_m et B_μ sont des quantités finies, la partie de l'équation (132.) jusqu'au membre, qui a le signe —, prendra la forme:

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)+\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_1^n{}_v(-1)^m(A_m+B_\mu);$$

or la limite de cette quantité est évidemment zéro; donc, en prenant la limite de la formule (132.), on aura:

$$\varphi\alpha=-\frac{i}{ec}\lim.\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi(n-m,\ n-\mu)$$
$$+\frac{i}{ec}\lim.\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi_1(n-m,\ n-\mu),$$

ou bien:

$$134.\quad \varphi\alpha=-\frac{i}{ec}\lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi(m,\ \mu)$$
$$+\frac{i}{ec}\lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi_1(m,\ \mu).$$

Il suffit de connoître l'une de ces limites, car on aura l'autre, en changeant seulement le signe de i.

Cherchons la limite de

$$\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi(m,\ \mu).$$

Pour cela, il faut essayer de mettre la quantité précédente sous la forme

$$P+v,$$

où P est indépendant de n, et v une quantité, qui a zéro pour limite; car alors la quantité P sera précisement la limite, dont il s'agit.

25.

Considérons d'abord l'expression:

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu.\psi(m,\ \mu).$$

Soit

$$135.\quad \theta(m,\ \mu)=\frac{2\alpha}{\alpha^2-(m\omega+\mu\varpi i)^2},$$

et faisons

$$136.\quad \psi(m,\ \mu)-\theta(m,\ \mu)=\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}\cdot R_\mu,$$

on aura:

$$137.\quad \sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu.\psi(m,\mu)-\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu.\theta(m,\mu)=2\alpha.\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^n.\frac{R_\mu}{(2n+1)^2}.$$

Cela posé, je dis que le second membre de cette équation est une quantité de la forme $\frac{v}{2n+1}$.

D'après

D'après (12.), (13.) on aura

$$\frac{1}{\varphi(\beta+\varepsilon)}+\frac{1}{\varphi(\beta-\varepsilon)}=\frac{\varphi(\beta+\varepsilon)+\varphi(\beta-\varepsilon)}{\varphi(\beta+\varepsilon)\,.\,\varphi(\beta-\varepsilon)}=\frac{2\varphi\beta\,.\,f\varepsilon\,.\,F\varepsilon}{\varphi^2\beta-\varphi^2\varepsilon},$$

donc en faisant $\beta=\frac{\alpha}{2n+1}$ et $\varepsilon=\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}=\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ et $f\varepsilon\,.\,F\varepsilon=\theta\varepsilon$, on a:

$$\psi(m,\,\mu)=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\cdot\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}.$$

Maintenant on a:

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha}{2n+1}+\frac{A\alpha^3}{(2n+1)^3},$$

donc:

$$\psi(m,\,\mu)=\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}\cdot\left\{\frac{2A\alpha^3}{(2n+1)^4}+\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}\right\},$$

et par conséquent:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}\left\{\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}-\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)^2}\right\}$$
$$+\frac{2A\alpha^3}{(2n+1)^4}\cdot\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}.$$

Donc la valeur de R_μ deviendra

138. $$R_\mu=\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}\cdot\left\{1+\frac{A\alpha^2}{(2n+1)^2}\right\}-\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)^2}.$$

Cela posé, il y a deux cas à considérer, savoir si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a zéro pour limite ou non.

a) Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a zéro pour limite, on aura:

$$\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)=\frac{\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2}+\frac{B_\mu\,.\,\varepsilon_\mu^4}{(2n+1)^4},$$

$$\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)=\sqrt{\left[1-c^2\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)\right]}\cdot\sqrt{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)\right]}=1+\frac{C_\mu\,.\,\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2},$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}+\frac{D\,.\,\alpha^4}{(2n+1)^4},$$

ou B_μ, C_μ, D ont des limites finies; donc en substituant:

$$139.\quad R_\mu = A\alpha^2 \cdot \frac{\frac{1}{\varepsilon_\mu^2} + \frac{C_\mu}{(2n+1)^2}}{\frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2} - 1 + \frac{D\alpha^4}{(2n+1)^2 \cdot \varepsilon_\mu^2} - B_\mu \frac{\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2}}$$

$$+ \frac{C_\mu \cdot \frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2} - \frac{D\alpha^4}{\varepsilon_\mu^4} - C_\mu + B_\mu}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu}\right)^2 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2}\right)\left\{\frac{D\alpha^4}{(2n+1)^2 \cdot \varepsilon_\mu^2} - B_\mu \cdot \frac{\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2}\right\}},$$

or soit que ε_μ soit fini ou infini, il est clair, que cette quantité convergera toujours vers une quantité finie pour des valeurs toujours croissantes de n. Donc on aura

$$140.\quad R_\mu = r_\mu + v_\mu,$$

où r_μ est une quantité finie indépendante de n.

b) Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a pour limite une quantité finie, il est clair, qu'en nommant cette limite δ_μ, on aura:

$$141.\quad R_\mu = -\frac{\theta(\delta_\mu)}{\varphi^2(\delta_\mu)} + \frac{1}{\delta_\mu^2} + v_\mu^{\mathrm{I}}.$$

Cela posé, considérons l'expression $\sum_1^n{}_\mu (-1)^\mu \cdot \frac{R_\mu}{(2n+1)^2}$. On a

$$142.\quad \sum_1^n{}_\mu (-1)^\mu \cdot \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \{R_0 - R_1 + R_2 - R_3 + \ldots .$$

$$\ldots . + (-1)^{\nu-1} \cdot R_{\nu-1} + (-1)^{\nu+1}[R_{\nu+1} - R_{\nu+1} + R_{\nu+2} - R_{\nu+3} \ldots . + (-1)^{n-\nu-1} \cdot R_{n-1}]\}.$$

Supposons d'abord, que $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ ait pour limite une quantité finie, quelle que soit la valeur de μ. Alors en remarquant, que

$$\delta_{\mu+1} = \delta_\mu,$$

on aura

$$R_\mu - R_{\mu+1} = v_\mu^{\mathrm{I}} - v_{\mu+1}^{\mathrm{I}},$$

donc:

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \cdot \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2}(v_0^{\mathrm{I}} - v_1^{\mathrm{I}} + v_2^{\mathrm{I}} - v_3^{\mathrm{I}} + \ldots . + v_{k-2}^{\mathrm{I}} - v_{k-1}^{\mathrm{I}}) + \frac{B}{(2n+1)^2},$$

où $k = n$ ou $n-1$, selon que n est pair ou impair. La quantité B a toujours pour limite une quantité finie, savoir $B = 0$, si n est pair, et $B = R_{n-1}$, si n est impair.

Maintenant on sait, qu'une somme telle que

$$v_0^{\mathrm{I}} - v_1^{\mathrm{I}} + v_2^{\mathrm{I}} - \ldots . + v_{k-2}^{\mathrm{I}} - v_{k-1}^{\mathrm{I}},$$

peut être mise sous la forme $k \cdot v$, v ayant zéro pour limite. Donc en substituant:

$$\sum_{0}^{n-1}(-1)^{\mu}.\frac{R_{\mu}}{(2n+1)^{2}}=\frac{k.v+B}{(2n+1)^{2}};$$

or, k étant égal à n ou à $n-1$, et B fini, la limite de $\frac{k.v+B}{2n+1}$ sera zéro, donc:

$$143.\quad \sum_{0}^{n-1}(-1)^{\mu}.\frac{R_{\mu}}{(2n+1)^{2}}=\frac{v}{2n+1}.$$

Supposons maintenant, que $\frac{m}{2n+1}$ a zéro pour limite. Alors $\frac{\varepsilon_{\mu}}{2n+1}$ a également zéro pour limite, à moins qu'en même tems $\frac{\mu}{2n+1}$ n'ait pour limite une quantité finie. Soit dans ce cas ν le nombre entier immédiatement inferieur à $\sqrt{n}$, et considérons la somme

$$R_{0}-R_{1}+R_{2}-R_{3}+\ldots.+(-1)^{\nu-1}R_{\nu-1}.$$

En supposant, que μ est un des nombres 0, 1, $\ldots.\nu$, il est clair, que $\frac{\varepsilon_{\mu}}{(2n+1)}=\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}$ a zéro pour limite; donc, selon ce qu'on a vu, R_{μ} sera une quantité finie, et par conséquent

$$R_{0}-R_{1}+R_{2}-\ldots.+(-1)^{\nu-1}R_{\nu-1}=\nu.R,$$

où R est également une quantité finie.

Considérons maintenant la somme

$$(-1)^{\nu}\{R_{\nu}-R_{\nu+1}+R_{\nu+2}-\ldots.+(-1)^{n-\nu-1}.R_{n-1}\}.$$

Si $\frac{\varepsilon_{\mu}}{2n+1}$ a pour limite une quantité différente de zéro, on a, comme on verra:

$$R_{\mu}-R_{\mu+1}=v_{\mu}^{1}-v_{\mu+1}^{1};$$

si au contraire $\frac{\varepsilon_{\mu}}{2n+1}$ a pour limite zéro, on a:

$$R_{\mu}=\nu_{\mu}+v_{\mu}^{1};$$

or, si en même tems $\mu>\sqrt{n}$, il est clair, qu'en vertu de la valeur de R_{μ},

$$\nu_{\mu}=B_{\mu}-C_{\mu};$$

or il est clair, que B_{μ} et C_{μ}, tous deux, ont pour limites des quantités indépendantes de μ, donc en nommant ces limites B et C, on aura:

$$R_{\mu}=B-C+v_{\mu},$$

et par suite, aussi dans ce cas,

$$R_{\mu}-R_{\mu+1}=v_{\mu}-v_{\mu+1}.$$

Donc comme dans le cas où $\frac{\varepsilon_{\mu}}{2n+1}$ auroit une limite différente de zéro pour toutes les valeurs de μ, on démontrera que

$$\frac{(-1)^{\nu}}{(2n+1)^{2}}\{R_{\nu}-R_{\nu+1}+\ldots.+(-1)^{n-\nu-1}R_{n-1}\}=\frac{v}{(2n+1)}.$$

Maintenant en combinant les équations ci-dessus, on en tirera

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\frac{R_{\mu}}{(2n+1)^2}=\frac{1}{(2n+1)^2}.(\nu R)+\frac{v}{2n+1};$$

or $\frac{v}{2n+1}$ a zéro pour limite, donc

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\frac{R_{\mu}}{(2n+1)^2}=\frac{v}{2n+1}.$$

Donc cette formule a toujours lieu, et par conséquent la formule (137.) deviendra:

$$144.\quad \sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\psi(m,\mu)-\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\theta(m,\mu)=\frac{v}{2n+1}.$$

Cela posé, il s'agit de mettre $\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu)$ sous la forme $P+\frac{v}{2n+1}$.

Or c'est ce qu'on peut faire comme il suit. On a:

$$145.\quad \begin{cases} \sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu)=\sum_{0}^{\frac{1}{0}}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu)-\sum_{n}^{\frac{1}{0}}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu) \text{ et} \\ \sum_{n}^{\frac{1}{0}}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\theta(m,\mu)=(-1)^{n}\{\theta(m,n)-\theta(m,n+1)+\theta(m,n+2)-\ldots\ldots\text{etc.}\}. \end{cases}$$

Or d'après une formule connue on a:

$$\theta(m,n)-\theta(m,n+1)+\theta(m,n+2)-\ldots\ldots$$
$$=\tfrac{1}{2}\theta(m,n)+A\frac{\partial\theta(m,n)}{\partial n}+B.\frac{\partial^3\theta(m,n)}{\partial^3 n}+\ldots\ldots,$$

où A, B.... sont des nombres; or

$$\theta(m,n)=\frac{2\alpha}{\alpha^2-(m\omega+n\varpi i)^2},$$

donc en substituant:

$$\theta(m,n)-\theta(m,n+1)+\ldots.=\frac{\alpha}{\alpha^2-(m\omega+n\varpi i)^2}+\frac{4A\alpha\varpi i.n}{\{\alpha^2-(m\omega+n\varpi i)^2\}^2}+\ldots.$$

De là il suit, que

$$\theta(m,n)-\theta(m,n+1)+\ldots.=\frac{\alpha}{\varpi^2.n^2}+\frac{v}{n^2}=\frac{v}{2n+1}.$$

Donc en vertu des équations (145.)

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu)=\sum_{0}^{\frac{1}{0}}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\theta(m,\mu)+\frac{v}{2n+1},$$

et par conséquent

$$146.\quad \sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\psi(m,\mu)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\theta(m,\mu)+\frac{v}{2n+1}.$$

26.

Ayant transformé de cette sorte la quantité $\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\psi(m,\mu)$, on tire de l'équation (146.):

147. $$\sum_{0}^{n-1}{}_{m}\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu) = \sum_{0}^{n-1}(-1)^{m}.\varrho_{m} + \sum_{0}^{n-1}.\frac{v_{m}}{2n+1},$$

en faisant

148. $$\varrho_{m} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\theta(m,\mu);$$

or

$$\sum_{0}^{n-1}.\frac{v_{m}}{2n+1} = \frac{v_{0}+v_{1}+v_{2}\ldots.v_{n-1}}{2n+1} = \frac{nv}{2n+1} = \frac{v}{2},$$

v ayant zéro pour limite. Donc l'équation (147.) donnera, en faisant n infini:

149. $$\lim.\sum_{0}^{n-1}{}_{m}\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{m+\mu}.\psi(m,\mu) = \sum_{0}^{\infty}(-1)^{m}.\varrho_{m}.$$

De même, si l'on fait, pour abréger:

150. $$\begin{cases}\theta_{1}(m,\mu) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^{2}-(m\omega-\mu\varpi i)^{2}},\\ \varrho'_{m} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\theta_{1}(m,\mu),\end{cases}$$

on aura:

151. $$\lim.\sum_{0}^{n-1}{}_{m}\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{m+\mu}.\psi_{1}(m,\mu) = \sum_{0}^{\infty}(-1)^{m}.\varrho'_{m}.$$

Ayant trouvé ces deux quantités, dont l'expression de $\varphi\alpha$ est composée, on aura, en substituant:

$$\varphi\alpha = -\frac{i}{ec}.\sum_{0}^{\infty}(-1)^{m}.\varrho_{m} + \frac{i}{ec}.\sum_{0}^{\infty}(-1)^{m}.\varrho'_{m} = \frac{i}{ec}.\sum_{0}^{\infty}(-1)^{m}\{\varrho'_{m}-\varrho_{m}\},$$

ou bien, en remettant les valeurs de ϱ'_{m} et ϱ_{m},

152. $$\varphi\alpha =$$

$$\frac{i}{ec}.\sum_{0}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\left\{\frac{2\alpha}{(\alpha^{2}-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^{2}} - \frac{2\alpha}{\alpha^{2}-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^{2}}\right\}\right\}.$$

Maintenant

$$\frac{2\alpha}{\alpha^{2}-[(m+\frac{1}{2})\omega\pm(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^{2}} = \frac{1}{\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega\mp(\mu+\frac{1}{2})\varpi i} + \frac{1}{\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega\pm(\mu+\frac{1}{2})\varpi i},$$

donc:

$$\frac{2\alpha}{\alpha^{2}-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^{2}} - \frac{2\alpha}{\alpha^{2}-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^{2}}$$

$$= +\frac{(2\mu+1)\varpi i}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^{2}+(\mu+\frac{1}{2})^{2}\varpi^{2}} - \frac{(2\mu+1)\varpi i}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^{2}+(\mu+\frac{1}{2})^{2}\varpi^{2}},$$

donc l'expression de $\varphi\alpha$ deviendra sous une forme réelle:

153. $$\varphi\alpha =$$

$$\frac{1}{ec}.\sum_{0}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}.\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\left\{\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^{2}+(\mu+\frac{1}{2})^{2}\varpi^{2}} - \frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^{2}+(\mu+\frac{1}{2})^{2}\varpi^{2}}\right\}\ldots,$$

c'est-à-dire, on aura:

$$154.\quad \varphi\alpha = \frac{\varpi}{e\,c}(\delta_0 - \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 + \ldots + (-1)^m \delta_m - \ldots)$$
$$- \frac{\varpi}{e\,c}(\delta'_0 - \delta'_1 + \delta'_2 - \delta'_3 + \ldots + (-1)^m \delta'_m - \ldots),$$

ou bien:

$$155.\begin{cases}\delta_m = \dfrac{1}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{\varpi^2}{4}} - \dfrac{3}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{9\varpi^2}{4}} + \dfrac{5}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{25\varpi^2}{4}} - \ldots \\ \delta'_\mu = \dfrac{1}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{\varpi^2}{4}} - \dfrac{3}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{9\varpi^2}{4}} + \dfrac{5}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{25\varpi^2}{4}} - \ldots\end{cases}$$

Si l'on commence la recherche de la limite de la fonction $\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^{m+\mu}.\psi(m,\mu)$ par celle de $\sum_0^{n-1}(-1)^m\psi(m,\mu)$ aulieu de celle de $\sum_0^{n-1}(-1)^\mu\psi(m,\mu)$, comme nous l'avons fait, on trouvera aulieu de la formule (53.) la suivante:

$$156.\quad \varphi\alpha =$$
$$\frac{1}{e\,c}.\sum_0^\infty{}_\mu(-1)^\mu.\sum_0^\infty{}_m(-1)^m.\left\{\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right\},$$

c'est-à-dire:

$$157.\quad \varphi\alpha = \frac{\varpi}{e\,c}(\varepsilon_0 - 3\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 - 7\varepsilon_3 + \ldots + (-1)^\mu.(2\mu+1)\varepsilon_\mu - \ldots)$$
$$- \frac{\varpi}{e\,c}(\varepsilon'_0 - 3\varepsilon'_1 + 5\varepsilon'_2 - 7\varepsilon'_3 + \ldots + (-1)^\mu.(2\mu+1)\varepsilon_\mu - \ldots),$$

où

$$158.\begin{cases}\varepsilon_\mu = \dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{3\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} + \dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{5\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \ldots. \\ \varepsilon'_\mu = \dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{3\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} + \dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{5\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \ldots.\end{cases}$$

27.

Cherchons maintenant l'expression de $f\alpha$, au moyen de la deuxième des formules (126.). En y faisant $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et remarquant, qu'alors la limite des quantités contenues dans les deux premières lignes, devient égale à zéro, on aura:

$$159.\quad f\alpha = \lim.(-1)^n \sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu (-1)^m.\psi(n-m,\, n-\mu)$$
$$+ \lim.(-1)^n \sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu (-1)^m.\psi_1(n-m,\, n-\mu),$$

ou l'on a fait pour abréger:

$$\psi(n-m,\ n-\mu) = \frac{1}{2n+1}\left\{f\left(\frac{\alpha+m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right\},$$

$$\psi_1(n-m,\ n-\mu) = \frac{1}{2n+1}\left\{f\left(\frac{\alpha+m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right\}.$$

Maintenant on a:

$$f(\beta-\varepsilon)+f(\beta-\varepsilon) = \frac{2f\beta.f\varepsilon}{1+e^2c^2\varphi^2\varepsilon.\varphi^2\beta} = \frac{f\varepsilon}{e^2c^2\varphi^2\varepsilon}\cdot\frac{f\beta}{\varphi^2\beta+\frac{1}{e^2c^2\varphi^2\varepsilon}}.$$

Soit

$$\varepsilon = \frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1},$$

on aura:

$$\frac{1}{\varphi\varepsilon} = -iec.\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i-\varepsilon\right) = -iec.\varphi\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right),$$

$$\frac{f\varepsilon}{\varphi\varepsilon} = -\frac{i\sqrt{(e^2+c^2)}}{F\left(\varepsilon-\frac{\varpi}{2}i\right)} = -i\sqrt{(e^2+c^2)}\cdot\frac{c}{\sqrt{(e^2+c^2)}}.F\left(\varepsilon-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)$$

$$= -ci.F.\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right).$$

Donc on aura, en substituant et mettant m et μ respectivement au lieu de $n-m$ et $n-\mu$:

$$\psi(m,\mu) = \frac{1}{e}\cdot\frac{2\varphi\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right).F\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}{(2n+1)\left[\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)\right]}.$$

On aura la valeur de $\psi_1(m,\mu)$, en changeant seulement le signe de i. En faisant maintenant

$$\theta(m,\mu) = \frac{(2m+1)\omega+(2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}$$

et

$$\theta_1(m,\mu) = \frac{(2m+1)\omega-(2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2},$$

et cherchant ensuite la limite de la fonction

$$\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^m.\psi(m,\mu),$$

de la même manière que précédemment, on trouvera:

$$\lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^m.\psi(m,\mu) = \frac{1}{e}.\sum_0^{\infty}{}_\mu\left\{\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m.\theta(m,\mu)\right\}$$

et

$$\lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^m.\psi_1(m,\mu) = \frac{1}{e}.\sum_0^{\infty}{}_\mu\left\{\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m.\theta_1(m,\mu)\right\};$$

donc en substituant dans (159.), et remettant les valeurs de $\theta(m, \mu)$ et $\theta_1(m, \mu)$, on a:

160. $f\alpha =$

$$\frac{1}{e}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\sum_{0}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}\left\{\frac{(2m+1)\omega+(2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}+\frac{(2m+1)\omega-(2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}\right\}.$$

La quantité renfermée entre les crochets peut aussi se mettre sous la forme:

$$\frac{2[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\frac{2[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})\varpi^2},$$

donc aussi:

161. $f\alpha =$

$$\frac{1}{e}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}\cdot\frac{2[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\sum_{0}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}\frac{2[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right\}.$$

On aura de la même manière:

162. $F(\alpha) =$

$$\frac{1}{e}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{m}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})\varpi^2}+\sum_{0}^{\infty}(-1)^{\mu}\cdot\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})\varpi^2}\right\}.$$

28.

Venons maintenant aux formules (130.). Pour trouver la valeur du second membre, après avoir fait $\beta=\frac{\alpha}{2n+1}$, et supposé n infini, nous allons d'abord chercher la limite de l'expression suivante:

$$163.\quad t=\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\left\{\frac{1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right)}}\right\},$$

où k et l sont deux quantités indépendantes de n, m, μ.

En prenant le logarithme, et faisant, pour abréger:

$$164.\quad \psi(m,\mu)=\log\left\{\frac{1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right)}}\right\},$$

on

on aura:

$$165.\quad \log t = \sum_{1}^{n}{}_{m} \sum_{1}^{n}{}_{\mu} \cdot \psi(m,\mu).$$

Considérons d'abord l'expression: $\sum_{1}^{n}{}_{\mu} \psi(m,\mu)$. Soit

$$166.\quad \theta(m,\mu) = \log \left\{ \frac{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega + \mu\varpi i + k)^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega + \mu\varpi i + l)^2}} \right\},$$

on aura:

$$\psi(m,\mu) - \theta(m,\mu) = \log \left\{ \frac{1 - \frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i + k}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega + \mu\varpi i + k)^2}} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega + \mu\varpi i + l)^2}}{1 - \frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i + l}{2n+1}\right)}} \right\}.$$

Cela posé, je dis que le second membre de cette équation est pour toute valeur de m et μ de la forme:

$$\psi(m,\mu) - \theta(m,\mu) = \frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Pour démontrer cela, il faut distinguer deux cas, si la limite de $\frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}$ est une quantité différente de zéro, et si elle est égale à zéro.

a) Dans le premier cas on aura, en nommant a la limite, dont il s'agit:

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i + k}{2n+1}\right) = \varphi^2 a + v,$$

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i + l}{2n+1}\right) = \varphi^2 a + v',$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) = \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2} + \frac{v'}{(2n+1)^2},$$

donc:

$$1 - \frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i + k}{2n+1}\right)} = 1 - \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2 \varphi^2 a} + \frac{v}{(2n+1)^2},$$

$$1 - \frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i + l}{2n+1}\right)} = 1 - \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2 . \varphi^2 a} + \frac{v'}{(2n+1)^2}.$$

On a de même

$$1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}=1-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2\left\{\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{(2n+1)}\right\}}=1-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2a^2}+\frac{v}{(2n+1)^2},$$

$$1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}=1-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2a^2}+\frac{v'}{(2n+1)^2}.$$

En substituant ces valeurs, l'expression de $\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)$ prendra la forme:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\left\{\frac{1-\frac{v}{(2n+1)^2}}{1-\frac{v'}{(2n+1)^2}}\cdot\frac{1-\frac{v_1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{v'_1}{(2n+1)^2}}\right\},$$

les quantités v, v', v_1, v'_1 ayant toutes zéro pour limite.

On a donc:

$$\log\left(1-\frac{v}{(2n+1)^2}\right)=\frac{v}{(2n+1)^2}\text{ etc.},$$

et par conséquent:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{v}{(2n+1)^2}.$$

b) Si la limite de la quantité $\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}$ est égale à zéro, on aura:

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)=\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}{(2n+1)^2}+A.\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^4}{(2n+1)^4}+\ldots,$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}+A'.\frac{\alpha^4}{(2n+1)^4}+\ldots,$$

donc:

$$1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}=1-\frac{\alpha^2+A'.\frac{\alpha^4}{(2n+1)^2}+\ldots.}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2+A.\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^4}{(2n+1)^2}}.$$

Si maintenant $m\omega+\mu\varpi i$ ne va pas indéfiniment en augmentant avec n, on aura:

$$1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+m\varpi i+k}{2n+1}\right)}=1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}+\frac{B}{(2n+1)^2},$$

de même:

$$1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}=1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}+\frac{C}{(2n+1)^2},$$

donc dans ce cas:

$$\psi(m, \mu) - \theta(m, \mu) = \log\left\{\frac{1 - \dfrac{B'}{(2n+1)^2}}{1 - \dfrac{C'}{(2n+1)^2}}\right\},$$

B' et C' ayant des limites finies, ou bien:

$$\psi(m, \mu) - \theta(m, \mu) = \frac{D}{(2n+1)^2},$$

la limite de D étant également une quantité finie.

Si au contraire la quantité $m\omega + \mu\varpi i$ augmente indéfiniment avec n, on a:

$$\frac{1 - \dfrac{\varphi^2\left(\dfrac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\dfrac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}} = 1 + \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2} \cdot \left\{\frac{A - A'\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}{1 + A\left(\dfrac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)^2}\right\} \times \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}};$$

or les quantités $\dfrac{1}{m\omega+\mu\varpi i+k}$, $\dfrac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}$ ont zéro pour limite; donc la quantité précédente sera de la forme:

$$1 + \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2} \cdot A'',$$

A'' ayant une quantité finie pour limite. En changeant k en l, et désignant la valeur correspondante de A'' par A''_1, la valeur de $\psi(m,\mu) - \theta(m,\mu)$ deviendra:

$$\psi(m, \mu) - \theta(m, \mu) = \log\left\{\frac{1 + \dfrac{\alpha^2}{(2n+1)^2}A''}{1 + \dfrac{\alpha^2}{(2n+1)^2}A''_1}\right\} = \frac{\alpha^2(A'' - A''_1)}{(2n+1)^2} + \frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Maintenant la limite de A'' est la même que celle de A; or il est clair, que cette dernière limite est indépendante de k, m, μ (elle est en effet égale au coefficient de α^4 dans le développement de $\varphi^2\alpha$). Donc on aura:

$$A'' = M + v,$$

et en changeant k en l:

$$A''_1 = M + v',$$

d'où $A'' - A''_1 = v - v' = v$. Donc $A'' - A''_1$ a zéro pour limite, et par conséquent on a:

$$\psi(m, \mu) - \theta(m, \mu) = \frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Donc nous avons démontré, qu'en faisant

$$167.\quad \psi(m,\mu) - \theta(m,\mu) = \frac{A_{m,\mu}}{(2n+1)^2},$$

la limite de $A_{m,\mu}$ sera égale à zéro toutes les fois que $m\omega + \mu\varpi i$ augmente indéfiniment avec n, et qu'elle sera égale à une quantité finie dans le cas contraire.

29.

Cela posé, considérons la quantité

$$\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\psi(m,\mu).$$

En substituant la valeur de $\psi(m,\mu)$, il viendra:

$$168.\quad \sum_{1}^{n}{}_{\mu}\psi(m,\mu) = \sum_{1}^{n}{}_{\mu}\theta(m,\mu) + \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_{1}^{n}{}_{\mu}(A_{m,\mu}).$$

Soit ν le plus grand nombre entier, contenu dans $\sqrt{n}$, on peut faire:

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{n}{}_{\mu}A_{m,\mu} = {} & A_{m,1} + A_{m,2} + \ldots\ldots + A_{m,\nu} \\ & + A_{m,\nu+1} + A_{m,\nu+2} + \ldots\ldots + A_{m,n}.\end{aligned}$$

Or, d'après la nature des quantités $A_{m,\mu}$, la somme contenue dans la première ligne sera égale à $\nu . A_m$, et la seconde égale à $A'_m(n-\nu-1)$, où A_m est une quantité finie et A'_m une quantité, qui a zéro pour limite, donc:

$$\sum_{1}^{n}{}_{\mu}A_{m,\mu} = \nu . A_m + (n-\nu-1)\,A'_m = (2n+1).B_m,$$

où

$$B_m = \frac{\nu}{2n+1}A_m + \frac{n-\nu-1}{2n+1}A'_m.$$

Donc la quantité B_m a zéro pour limite, en remarquant, que ν ne surpasse pas $\sqrt{n}$.

Par là l'expression de $\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\psi(m,\mu)$ se change en:

$$169.\quad \sum_{1}^{n}{}_{\mu}\psi(m,\mu) = \sum_{1}^{n}{}_{\mu}\theta(m,\mu) + \frac{B_m}{2n+1}.$$

Pour avoir la limite de $\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\theta(m,\mu)$, j'écris

$$\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\theta(m,\mu) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\theta(m,\mu) - \sum_{n+1}^{\infty}{}_{\mu}\theta(m,\mu) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\theta(m,\mu) - \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\theta(m,\mu+n).$$

Or on peut trouver la valeur de $\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\theta(m,\mu+n)$ comme suit.

On a:

$$\theta(m,\ \mu+n) = \log\left\{\frac{1-\dfrac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+k]^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+l]^2}}\right\}$$

$$= \alpha^2\left\{\frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+l]^2} - \frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+k]^2}\right\}$$

$$- \tfrac{1}{2}\alpha^4\left\{\frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+l]^2} - \frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+k]^2}\right\}$$

$$+ \text{etc.}$$

De là on tire:

$$\sum_1^\mu{}_\mu\,\theta(m,\mu+n) = \frac{\alpha^2}{n}\cdot\Sigma\frac{1}{n}\cdot\theta\left(\frac{\mu}{n}\right) - \frac{\alpha^4}{2n^3}\cdot\Sigma\frac{1}{n}\cdot\theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right) + \ldots,$$

où

$$\theta\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{1}{\left(\dfrac{m\omega+l}{n}+\varpi i+\dfrac{\mu}{n}\varpi i\right)^2} - \frac{1}{\left(\dfrac{m\omega+k}{n}+\varpi i+\dfrac{\mu}{n}\varpi i\right)^2},$$

$$\theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{1}{\left(\dfrac{m\omega+l}{n}+\varpi i+\dfrac{\mu}{n}\varpi i\right)^4} - \frac{1}{\left(\dfrac{m\omega+k}{n}+\varpi i+\dfrac{\mu}{n}\varpi i\right)^4},$$

etc.

Or on sait que la limite de

$$\sum_1^\mu{}_\mu\,\frac{1}{n}\,\theta\left(\frac{\mu}{n}\right) \text{ est égale à } \int_0^x\theta(x)\,\partial x,$$

donc:

$$\sum_1^\mu{}_\mu\,\frac{1}{n}\,\theta\left(\frac{\mu}{n}\right) = \int_0^x\theta(x)\,\partial x + v,$$

$$\sum_1^\mu{}_\mu\,\frac{1}{n}\,\theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right) = \int_0^x\theta_1(x)\,\partial x + v_1,$$

etc,

et par conséquent, en substituant:

$$\sum_1^\mu{}_\mu\,\theta(m,\mu+n) = \frac{\alpha^2}{n}\cdot\int_0^x\theta(x) - \frac{\alpha^4}{2n^3}\cdot\int_0^x\theta_1(x) + \ldots. + \frac{v\alpha^2}{n} - \frac{v_1\alpha^3}{2n^3} + \ldots.$$

or

$$\theta(x) = \frac{1}{\left(\dfrac{m\omega+l}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)^2} - \frac{1}{\left(\dfrac{m\omega+k}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)^2}$$

etc.

donc on aura:

$$\int_0^x \theta(x)\partial x = \frac{1}{\varpi i}\cdot\left\{\frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)} - \frac{1}{\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)}\right\}$$

$$- \frac{1}{\varpi i}\cdot\left\{\frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i\right)} - \frac{1}{\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\varpi i}\cdot\frac{k-l}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)}$$

$$- \frac{1}{\varpi i}\cdot\frac{k-l}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i\right)\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i\right)}.$$

La limite de cette expression de $\int_0^x \theta(x)\partial x$ est zéro pour une valeur quelconque de x. De même on trouvera, que la limite de $\int_0^x \theta_1(x)\partial x$ est zéro, donc:

$$\sum_1^\mu{}_\mu \theta(m, \mu+n) = \frac{\alpha^2}{n}\cdot v - \frac{\alpha^4}{2n^3}\cdot v' + \frac{\alpha^6}{3n^5}\cdot v'' - \ldots.$$

$$= \frac{\alpha^2}{2n+1}\cdot\left\{v - \frac{\alpha^2}{2n^2}v' + \frac{\alpha^4}{3n^4}v'' - \ldots.\right\}\frac{2n+1}{n} = \frac{v}{2n+1},$$

donc aussi, en faisant $\mu = \infty$:

$$\sum_1^\infty{}_\mu \theta(m, \mu+n) = \frac{v}{2n+1},$$

d'où:

$$\sum_1^n{}_\mu \psi(m, \mu+n) = \sum_1^\infty{}_\mu \theta(m, \mu) - \frac{v}{2n+1}, \text{ et}$$

$$170.\quad \sum_1^n{}_\mu \psi(m, \mu) = \sum_1^\infty{}_\mu \theta(m, \mu) + \frac{v_m}{2n+1},$$

v_m ayant zéro pour limite. De là on tire

$$\sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu \psi(m, \mu) = \sum_1^n{}_m \left\{\sum_1^\infty{}_\mu \theta(m, \mu)\right\} + \sum_1^n \frac{v_m}{2n+1}.$$

En prenant la limite des deux membres et remarquant, que

$$\sum_1^n \frac{v_m}{2n+1} = \frac{v_1 + v_2 + \ldots. v_m}{2n+1} = v,$$

on aura:

$$171.\quad \text{lim.}\ \sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu \psi(m, \mu) = \sum_1^\infty{}_m \left\{\sum_1^\infty{}_\mu \theta(m, \mu)\right\}.$$

En remettant les valeurs de $\psi(m, \mu)$ et $\theta(m, \mu)$, et passant des logarithmes aux nombres, on en tire:

$$172.\quad \lim. \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \left\{ \frac{1 - \frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right)}} \right\} = \prod_1^\infty{}_m \left\{ \prod_1^\infty{}_\mu \left(\frac{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}} \right) \right\}.$$

Par une analyse toute semblable à la précédente, mais plus simple, on trouvera de même:

$$173.\quad \lim. \prod_1^n{}_m \left\{ \frac{1 - \frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+k}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+l}{2n+1}\right)}} \right\} = \prod_1^\infty{}_m \left\{ \frac{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega+k)^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{(m\omega+l)^2}} \right\},$$

$$174.\quad \lim. \prod_1^n{}_\mu \left\{ \frac{1 - \frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}} \right\} = \prod_1^\infty{}_\mu \left\{ \frac{1 - \frac{\alpha^2}{(\mu\varpi i+k)^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{(\mu\varpi i+l)^2}} \right\}.$$

30.

Maintenant rien n'est plus facile, que de trouver les valeurs de $\Phi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

Considérons d'abord la première formule (130.). On a:

$$e^2c^2\Phi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right) = -\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1} - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi}{2}i\right)}$$

$$= -\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)},$$

donc:

$$\prod_1^n{}_m \prod_1^\mu \left\{ \frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1+e^2c^2.\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi^2\beta} \right\} = \frac{\prod_1^n{}_m \prod_1^\mu . \left\{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}}{\prod_1^n{}_m \prod_1^\mu . \left\{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}}$$

$$= \prod_1^n{}_m \prod_1^\mu{}_\mu \left\{ \frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i}{2n+1}\right)}} \right\}.$$

Cela posé, si l'on fait $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$ et qu'on suppose n infini, il viendra, en faisant usage des formules (172.), (173.), (174.), et remarquant que α est la limite de $(2n+1)\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ et égale à α:

$$175.\quad \varphi\alpha = \alpha \prod_1^\infty{}_m \left\{1-\frac{\alpha^2}{(m\omega)^2}\right\}.\prod_1^\infty \left\{1+\frac{\alpha^2}{(\mu\varpi)^2}\right\}$$
$$\times \prod_1^\infty{}_m \left\{ \prod_1^\infty{}_\mu \left(\frac{1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i)^2}}{1-\frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right).\prod_1^\infty{}_\mu \left(\frac{1-\frac{\alpha^2}{(m\omega-\mu\varpi i)^2}}{1-\frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega-(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right) \right\}.$$

Les deux formules (130.) donneront de la même manière, en faisant $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et remarquant, que $f(0) = 1$, $F(0) = 1$:

$$176.\quad f\alpha = \prod_1^\infty{}_m \left\{ \prod_1^\infty{}_\mu \left(\frac{1-\frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+\mu\varpi i]^2}}{1-\frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right)\left(\frac{1-\frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega-\mu\varpi i]^2}}{1-\frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega-(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right) \right\}$$
$$\times \prod_0^\infty{}_\mu \left\{1-\frac{\alpha^2}{(m+\frac{1}{2})^2\omega^2}\right\},$$

$$177.\quad F\alpha =$$
$$\prod_0^\infty{}_\mu \left\{1+\frac{\alpha^2}{(\mu+\frac{1}{2})\varpi^2}\right\}.\prod_1^\infty{}_m \left\{ \prod_1^\infty{}_\mu \left(\frac{1-\frac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}{1-\frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right)\left(\frac{1-\frac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}{1-\frac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right) \right\}.$$

On peut aussi donner une forme réelle aux expressions précédentes comme suit:

178. $$\varphi\alpha = \alpha.\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\left(1+\frac{\alpha^2}{\mu^2\varpi^2}\right).\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left(1-\frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}\right)$$
$$\times\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1+\frac{(\alpha+m\omega)^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\varpi^2}}.\frac{1+\frac{(\alpha-m\omega)^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\varpi^2}}.\left(\frac{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\frac{m^2\omega^2}{\mu^2\varpi^2}}\right)^2,$$

179. $$f\alpha = \prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left(1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)$$
$$\times\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}.\frac{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}.\left(\frac{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\mu^2\varpi^2}}\right)^2,$$

180. $$F\alpha = \prod_{0}^{\infty}{}_{\mu}\left(1+\frac{\alpha^2}{(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right)$$
$$\times\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1+\frac{(\alpha+m\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}.\frac{1+\frac{(\alpha-m\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}.\left(\frac{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\frac{m^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\right)^2.$$

Ces transformations s'opèrent aisément au moyen de la formule:

$$\left(1-\frac{\alpha^2}{(a+bi)^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{(a-bi)^2}\right)=\left(1+\frac{\alpha}{a+bi}\right)\left(1+\frac{\alpha}{a-bi}\right)\left(1-\frac{\alpha}{a+bi}\right)\left(1-\frac{\alpha}{a-bi}\right)$$
$$=\frac{(\alpha+a)^2+b^2}{a^2+b^2}.\frac{(\alpha-a)^2+b^2}{a^2+b^2}=\left(1+\frac{(\alpha+a)^2}{b^2}\right)\left(1+\frac{(\alpha-a)^2}{b^2}\right).\frac{1}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

31.

Dans ce qui précède nous sommes parvenus à deux espèces d'expressions des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$: les unes donnent ces fonctions décomposées en fractions partielles, dont la totalité forme des séries infinies doubles, les autres donnent ces mèmes fonctions décomposées en un nombre infini de facteurs, dont chacun est à son tour composé d'une infinité de facteurs.

Or on peut beaucoup simplifier les formules précédentes au moyen des fonctions exponentielles et circulaires. C'est ce que nous allons voir par ce qui suit:

Considérons d'abord les équations (178.), (179.), (180.). En vertu des formules connues, on a:

$$\frac{\sin y}{y} = \prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\left(1 - \frac{y^2}{\mu^2\pi^2}\right);\quad \cos y = \prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\left(1 - \frac{y^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2\pi^2}\right);$$

donc:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\left(1-\frac{z^2}{\mu^2\pi^2}\right)}{\left(1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})\pi^2}\right)} = \frac{\sin z}{z\cos y};\quad \prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\left(\frac{1-\frac{z^2}{(\mu-\frac{1}{2})\pi^2}}{1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})\pi^2}}\right) = \frac{\cos z}{\cos y}.$$

En vertu de cette formule il est clair, que les expressions de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ peuvent être mises sous la forme:

$$\varphi\alpha = \frac{\varpi}{\pi}\cdot\frac{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{\varpi}i\right)}{i}\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left(1-\frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}\right)$$

$$\times\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left\{\frac{\sin(\alpha+m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\sin(\alpha-m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\cos[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\sin^2 m\omega\frac{\pi}{\varpi}i}\cdot\frac{\left(m\omega\frac{\pi}{\varpi}i\right)^2}{(\alpha+m\omega)(\alpha-m\omega)\,.\,\frac{\pi^2}{\omega^2}i^2}\right\},$$

$$f\alpha = \prod_{1}^{\alpha}{}_{m}\left(1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)$$

$$\times\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left(\tang[\alpha+(m-\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\tang[\alpha-(m-\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\cot^2(m-\tfrac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\alpha^2-(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right),$$

$$F\alpha = \cos\left(\alpha\frac{\pi}{\varpi}i\right)\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left\{\frac{\cos(\alpha+m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\cos(\alpha-m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\cos[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\cos^2 m\omega\,.\,\frac{\pi}{\varpi}i}\right\}.$$

On trouvera des expressions réelles, en substituant au lieu des fonctions circulaires leurs expressions en fonctions exponentielles.

On a:

$$\sin(a-b)\,.\,\sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b,$$
$$\cos(a+b)\,.\,\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b,$$

donc:

$$\frac{\sin(\alpha+m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\sin(\alpha-m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2 m\omega\frac{\pi}{\varpi}i} = -\left\{1-\frac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2 m\omega\frac{\pi}{\varpi}i}\right\},$$

$$\frac{\cos[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\cos[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i} = 1-\frac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i},$$

$$\text{tang}\left[\alpha+(m-\tfrac{1}{2})\omega\right]\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\text{tang}\left[\alpha-(m-\tfrac{1}{2})\omega\right]\frac{\pi}{\varpi}i\,.\,\cot^2(m-\tfrac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i$$

$$= -\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}.$$

Daprès cela et en remarquant, que

$$\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2-m^2\omega^2} = -\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}} \text{ et}$$

$$\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\alpha^2-(m-\frac{1}{2})^2\omega^2} = -\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}},$$

il est clair, qu'on aura:

$$181.\quad \varphi\alpha = \frac{\pi}{\varpi}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{\varpi}\pi i\right)}{i}\cdot\prod_1^\infty{}_m\cdot\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2 m\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}},$$

$$182.\quad f\alpha = \prod_0^\infty{}_m\cdot\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2(m+\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m+\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}},$$

$$183.\quad F\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{\varpi}\pi i\right)\cdot\prod_1^\infty{}_m\cdot\frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{\varpi}\pi i}{\cos^2 m\frac{\omega}{\varpi}\pi i}}{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{\varpi}\pi i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi i}}.$$

En substituant aulieu des cosinus et sinus d'arcs imaginaires leurs valeurs en quantités exponentielles, ces formules deviendront:

$$184.\quad \varphi\alpha = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varpi}{\pi}\left(h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}\right).\prod_{1}^{\infty}{}_m\cdot\frac{1-\left(\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{m\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-m\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right)^2}{1+\left(\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right)^2},$$

$$185.\quad f\alpha = \prod_{0}^{\infty}{}_m\cdot\frac{1-\left(\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right)^2}{1+\left(\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right)^2},$$

$$186.\quad F\alpha = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}+e^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}\right).\prod_{1}^{\infty}{}_m\frac{1+\left(\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{m\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-m\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right)^2}{1+\left(\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right)^2},$$

où h est le nombre 2,1718218.....

On peut encore transformer cette formule de la manière suivante:

Si l'on remplace α par αi, on aura les valeurs de $\varphi(\alpha i)$, $f(\alpha i)$, $F(\alpha i)$. En changeant maintenant c en e et e en c, les quantités:

$$\omega;\ \varpi;\ \varphi(\alpha i);\ f(\alpha i);\ F(\alpha i)$$

se changeront respectivement en:

$$\varpi;\ \omega;\ i\varphi\alpha;\ F\alpha;\ f\alpha,$$

donc les formules précédentes donneront:

$$187.\quad \varphi\alpha = \frac{\omega}{\pi}\cdot\sin\frac{\alpha\pi}{\omega}\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_m\cdot\frac{1+\dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{m\varpi\pi}{\omega}}-h^{-\frac{m\varpi\pi}{\omega}}\right)^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}+h^{-\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}\right)^2}},$$

$$188.\quad F\alpha = \prod_{0}^{\infty}{}_m \frac{1+\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}} - h^{-\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}\right)^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}} + h^{-\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}\right)^2}},$$

$$189.\quad f\alpha = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right).\prod_{1}^{\infty}{}_m \cdot \frac{1-\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{m\varpi\pi}{\omega}} + h^{-\frac{m\varpi\pi}{\omega}}\right)^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}} + h^{-\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}\right)^2}},$$

32.

Considérons maintenant les formules (160.), (161.), (162.). On a:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_\mu (-1)^\mu \cdot \frac{(2\mu+1)\pi}{y^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\pi^2} = \frac{2}{h^y + h^{-y}},$$

donc, en faisant

$$y = [\alpha \pm (m+\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}:$$

$$\sum_{0}^{\infty}{}_\mu (-1)^\mu \cdot \frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} = \frac{2\pi}{\varpi}\cdot\frac{1}{h^{[\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}} + h^{-[\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}}.$$

En vertu de cette formule il est aisé de voir, que les expressions (153.), (162.) de $\varphi\alpha$ et $F\alpha$ deviendront:

$$190.\quad \varphi\alpha =$$

$$\frac{2}{cc}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m (-1)^m \cdot \left\{\frac{1}{h^{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}} + h^{-[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}} - \frac{1}{h^{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}} + h^{-[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}}\right\},$$

$$191.\quad F\alpha =$$

$$\frac{2}{c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m \left\{\frac{1}{h^{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}} + h^{-[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}} + \frac{1}{h^{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}} + h^{-[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}}\right\}.$$

Les expressions précédentes de $\varphi\alpha$, $F\alpha$, peuvent être mises encore sous beaucoup d'autres formes: je vais rappeller les plus remarquables. D'abord en réunissant les termes du second membre, on trouvera:

$$192.\quad \varphi\alpha = \frac{2}{ec}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m(-1)^m\cdot\left\{\frac{\left(h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}}-h^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}}\right)\left(h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}-h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}\right)}{h^{\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{-\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}+h^{-(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}}\right\},$$

$$193.\quad F\alpha = \frac{2}{c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m\cdot\left\{\frac{\left(h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}}+h^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}}\right)\left(h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}+h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}\right)}{h^{\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{-\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}+h^{-(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}}\right\}.$$

Si, pour abréger, on suppose:

$$194.\quad h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}} = \varepsilon \quad\text{et}\quad h^{\frac{\omega\pi}{\varpi}} = r^2,$$

ces formules, en développant le second membre, deviendront:

$$195.\quad \varphi\alpha = \frac{2}{ec}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\left(\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot\left\{\frac{r-\frac{1}{r}}{r^2+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^2}}-\frac{r^3-\frac{1}{r^3}}{r^6+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^6}}+\frac{r^5-\frac{1}{r^5}}{r^{10}+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^{10}}}-\ldots\right\},$$

$$196.\quad F\alpha = \frac{2}{c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot\left\{\frac{r+\frac{1}{r}}{r^2+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^2}}+\frac{r^3+\frac{1}{r^3}}{r^6+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^6}}+\frac{r^5+\frac{1}{r^5}}{r^{10}+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^{10}}}-\ldots\right\}.$$

En mettant αi au lieu de α dans les formules (192.), (193.), changeant ensuite c en e et e en c, et remarquant, que les quantités

$$\omega,\ \varpi,\ \varphi(\alpha i),\ F(\alpha i),\ h^{\alpha i\frac{\pi}{\varpi}}-h^{-\alpha i\frac{\pi}{\varpi}},\ h^{\alpha i\frac{\pi}{\varpi}}+h^{\alpha i\frac{\pi}{\varpi}},$$

se changeront respectivement en:

$$\varpi,\ \omega,\ i\varphi(\alpha),\ f\alpha,\ 2i.\sin\alpha\frac{\pi}{\omega},\ 2\cos\alpha\frac{\pi}{\omega},$$

il viendra:

$$197.\quad \varphi\alpha = \frac{4}{ec}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m(-1)^m\cdot\left\{\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{\omega}.\left(h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}-h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}\right)}{h^{(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}+2\cos 2\alpha\frac{\pi}{\omega}+h^{-(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}}\right\},$$

$$198.\quad f\alpha = \frac{4}{e}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m\cdot\left\{\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{\omega}.\left(h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}+h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}\right)}{h^{(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}+2\cos 2\alpha\frac{\pi}{\omega}+h^{-(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}}\right\}.$$

En faisant pour abréger

$$199.\quad h^{\frac{\varpi\pi}{2\omega}} = \varrho,$$

et développant, on obtiendra:

200. $$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right) =$$

$$\frac{4}{e\,c}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left\{\frac{\varrho-\frac{1}{\varrho}}{\varrho^2+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^2}}-\frac{\varrho^3-\frac{1}{\varrho^3}}{\varrho^6+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^6}}+\frac{\varrho^5-\frac{1}{\varrho^5}}{\varrho^{10}+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^{10}}}-\ldots\right\},$$

201. $$f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right) =$$

$$\frac{4}{e}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left\{\frac{\varrho+\frac{1}{\varrho}}{\varrho^2+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^2}}+\frac{\varrho^3+\frac{1}{\varrho^3}}{\varrho^6+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^6}}+\frac{\varrho^5+\frac{1}{\varrho^5}}{\varrho^{10}+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^{10}}}+\ldots\right\}.$$

En substituant dans les formules (190.), (191.) au lieu de $h^{\alpha\frac{\pi i}{\varpi}}$ et $h^{\frac{\omega i}{2\varpi}}$ leurs valeurs ε et r, il viendra:

202. $$\varphi\alpha = \frac{2}{e\,c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m(-m)\cdot\left\{\frac{1}{\varepsilon\,.\,r^{-(2m+1)}+\varepsilon^{-1}\,.\,r^{2m+1}}-\frac{1}{\varepsilon\,.\,r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}\,.\,r^{-(2m+1)}}\right\},$$

203. $$F'\alpha = \frac{2}{c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m\left\{\frac{1}{\varepsilon\,.\,r^{-2m-1}+\varepsilon^{-1}\,.\,r^{2m+1}}+\frac{1}{\varepsilon\,.\,r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}\,.\,r^{-2m-1}}\right\}.$$

En supposant maintenant $\alpha < \frac{\omega}{2}$, on aura:

$$\frac{1}{\varepsilon\,.\,r^{-2m-1}+\varepsilon^{-1}\,.\,r^{2m+1}} = \frac{\varepsilon^{-1}\,.\,r^{-2m-1}}{1+\varepsilon^2\,.\,r^{-4m-2}} = \varepsilon\,.\,r^{-2m-1}-\varepsilon^3\,.\,r^{-6m-3}+\varepsilon^5\,.\,r^{-10m-5}-\ldots,$$

$$\frac{1}{\varepsilon\,.\,r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}\,.\,r^{-2m-1}} = \frac{\varepsilon^{-1}\,.\,r^{-2m-1}}{1+\varepsilon^{-2}\,.\,r^{-4m-2}} = \varepsilon^{-1}\,.\,r^{-2m-1}-\varepsilon^{-3}\,.\,r^{-6m-3}+\varepsilon^{-5}\,.\,r^{-10m-5}-\ldots,$$

donc:

$$\varphi\alpha = \frac{2}{e\,c}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_m(-1)^m\left\{(\varepsilon-\varepsilon^{-1})\,.\,r^{-2m-1}-(\varepsilon^3-\varepsilon^{-3})\,.\,r^{-6m-3}+(\varepsilon^5-\varepsilon^{-5})\,r^{-10m-5}-\ldots\right\}\right\}$$

$$= \frac{2}{e\,c}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\left\{(\varepsilon-\varepsilon^{-1})\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m(-1)^m\,.\,r^{-2m-1}-(\varepsilon^3-\varepsilon^{-3})\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_m(-1)^m\,.\,r^{-6m-3}+\ldots\right\}.$$

Or:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_m(-1)^m\,.\,r^{-2m-1} = r^{-1}-r^{-3}+r^{-5}-\ldots = \frac{r^{-1}}{1+r^{-2}} = \frac{r}{r^2+1},$$

$$\sum_{0}^{\infty}{}_m(-1)^m\,.\,r^{3m-3} = r^{-3}-r^{-6}+r^{-9}-\ldots = \frac{r^{-3}}{1+r^{-6}} = \frac{r^3}{r^6+1}$$

etc., donc:

204. $$\varphi\alpha = \frac{2}{e\,c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\left\{\frac{\varepsilon-\varepsilon^{-1}}{r+r^{-1}}-\frac{\varepsilon^3-\varepsilon^{-3}}{r^3+r^{-3}}+\frac{\varepsilon^5-\varepsilon^{-5}}{r^5+r^{-5}}-\ldots\right\}.$$

De la même manière on trouvera:

205. $$F\alpha = \frac{2}{c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\left\{\frac{\varepsilon+\varepsilon^{-1}}{r-r^{-1}}-\frac{\varepsilon^3+\varepsilon^{-3}}{r^3-r^{-3}}+\frac{\varepsilon^5+\varepsilon^{-5}}{r^5-r^{-5}}-\ldots\right\}.$$

En mettant $\alpha\frac{\varpi}{2}i$ au lieu de α, et changeant ensuite e en c et c en e,

$$\varepsilon;\ \varpi;\ \varphi\left(\alpha\frac{\varpi}{2}i\right);\ F\left(\alpha\frac{\varpi}{2}i\right);\ r;\ \varepsilon^m+\varepsilon^{-m};\ \varepsilon^m-\varepsilon^{-m}$$

se changent en:

$$\varpi;\ \omega;\ i\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right);\ f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right);\ \varrho;\ 2\cos\left(m\alpha\frac{\pi}{2}\right);\ 2i\sin\left(m\alpha\frac{\pi}{2}\right);$$

donc:

$$206.\quad \varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4}{ec}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\left\{\frac{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\varrho+\frac{1}{\varrho}}-\frac{\sin\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\varrho^3+\frac{1}{\varrho^3}}+\frac{\sin\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\varrho^5+\frac{1}{\varrho^5}}-\ldots.\right\},$$

$$207.\quad f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4}{e}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\left\{\frac{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\varrho-\frac{1}{\varrho}}-\frac{\cos\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\varrho^3-\frac{1}{\varrho^3}}+\frac{\cos\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\varrho^5-\frac{1}{\varrho^5}}-\ldots.\right\}.$$

Ces quatre dernières formules offrent d'expressions très simples des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Par les différentiations et intégrations on peut en déduire une foule d'autres plus ou moins remarquables.

33.

Dans le cas, $e=c$, les formules précédentes prennent une forme plus simple, à cause de la relation $\omega=\varpi$, qui a lieu dans ce cas. Soit pour plus de simplicité $e=c=1$. On a:

$$r=h^{\frac{\omega\pi}{2\varpi}}=h^{\frac{\pi}{2}},\quad \varrho=h^{\frac{\varpi\pi}{2\omega}}=h^{\frac{\pi}{2}},$$

donc en substituant, et faisant dans (204.), (205.) $\alpha=\alpha\frac{\varpi}{2}$, il vient:

$$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=2\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{\pi}{2}}+h^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{h^{\frac{3\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{3\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{3\pi}{2}}+h^{-\frac{3\pi}{2}}}+\frac{h^{\frac{5\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{5\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{5\pi}{2}}+h^{-\frac{5\pi}{2}}}-\ldots.\right\},$$

$$F\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=2\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{\pi}{2}}-h^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{h^{\frac{3\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{3\alpha\pi}{2}}}{h_1^{\frac{3\pi}{2}}-h^{-\frac{3\pi}{2}}}+\frac{h^{\frac{5\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{5\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{5\pi}{2}}-h^{-\frac{5\pi}{2}}}-\ldots.\right\},$$

$$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4\pi}{\omega}\left\{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{1+h^{\pi}}-\sin\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{3\frac{\pi}{2}}}{1+h^{3\pi}}+\sin\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{5\frac{\pi}{2}}}{1+h^{5\pi}}-\ldots.\right\},$$

$$f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4\pi}{\omega}\left\{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}-1}-\cos\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{3\frac{\pi}{2}}}{h^{3\pi}-1}+\sin\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{5\frac{\pi}{2}}}{h^{5\pi}-1}-\ldots.\right\}.$$

Les

Les fonctions φ, f, F sont déterminées par les équations

$$\alpha.\frac{\omega}{2}=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}};\ \frac{\omega}{2}=\int_0^1\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}};$$

$$x=\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{(1-x^2)}=f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{(1+x^2)}=F\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right).$$

Si dans les deux dernières formules on fait $\alpha=0$, et qu'on remarque, qu'alors la valeur de $\dfrac{\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}$ est $=\dfrac{\omega}{\pi}$, et celle de $\dfrac{\sin\left(m\,\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}=m$, on trouvera:

$$\frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{2}.\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}-1}-\frac{h^{\frac{3\pi}{2}}}{h^{3\pi}-1}+\frac{h^{\frac{5\pi}{2}}}{h^{5\pi}-1}-\ldots\right\}=\int_0^1\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

$$\frac{\omega^2}{4}=\pi^2.\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}+1}-3.\frac{h^{\frac{3\pi}{2}}}{h^{3\pi}+1}+5.\frac{h^{\frac{5\pi}{2}}}{h^{5\pi}+1}-\ldots\right\}=\left(\int_0^1\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}\right)^2.$$

(La continuation dans le cahier suivant.)

13.
Gleichungen der zweiten Ordnung in der Geometrie.

(Vom Herrn *Joseph L. Raabe.*)

1.

Die allgemeine Gleichung der zweiten Ordnung, zwischen zwei veränderlichen Gröfsen, ist im allgemeinen von der Form:

$$\text{I.}\quad Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + 1 = 0,$$

und diese Gleichung stellt eine ebene Curve vor, die auch hervorgeht, wenn eine Ebene und ein Kegel sich schneiden.

Die Gröfsen A, B, C, D, E, nennt man die Constanten der Curve, d. h., wenn diese Gröfsen als bekannt vorausgesetzt werden, dann ist die Curve der Gröfse und Lage nach vollkommen bestimmt, und x, y, stellen die Coordinaten irgend eines Punctes der Curve gegen irgend ein festgesetztes rechtwinkliges Coordinatensystem vor.

Transformirt man aber das Coordinatensystem, auf welches die Gleichung (I) bezogen ist, dafs man nemlich den Ursprung der Coordinaten beibehält, und die Axe der x um einen Winkel α verschiebt, so dafs:

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{C}{A-B},$$

dann nimmt die Gleichung (I) folgende Form an:

$$\text{II.}\quad A'x^2 + B'y^2 + C'x + D'y + 1 = 0.$$

In dieser Gleichung kömmt das Product beider Coordinaten eines Punctes nicht mehr vor. Da nun der Winkel α immer eine mögliche Gröfse ist, und die Gleichungen (I) und (II) dieselbe Curve vorstellen, so werden diese beiden Gleichungen nur rücksichtlich der Lage des Coordinatensystems von einander verschieden sein. Wir wollen uns daher damit beschäftigen, den Unterschied dieser beiden Gleichungen auszumitteln.

Zu diesem Zwecke wollen wir die Gleichungen der zweiten Ordnung aus dem Gesichtspuncte ableiten, dafs sie als Folgen des Durchschnittes eines Kegels mit einer Ebene angesehen werden.

2.

Es stellen X, Y, Z, drei sich senkrecht schneidende Coordinatenaxen vor. In der Ebene der XY, befinde sich ein Punct, dessen Coor-

dinaten, parallel mit den Axen der X und Y, durch A und B vorgestellt werden. In der senkrechten Distanz m dieses Punctes sei der Mittelpunct eines Kreises, welcher parallel mit der Ebene der XY ist, und dessen Halbmesser R sein soll.

Ist nun der Punct, dessen Coordinaten wir durch A und B bezeichnet haben, der Scheitel eines Kegels, und der zuletzt erwähnte Kreis die leitende Curve, so ist die Gleichung des Kegels:

$$(x-A)^2+(y-B)^2=\frac{R^2}{m^2}z^2.$$

Nun ist $\frac{R}{m}$ die Tangente des Winkels der Seite des Kegels mit dessen Axe, und nennen wir diesen Winkel φ, dann ist die letzte Gleichung:

$$\text{III.}\quad (x-A)^2+(y-B)^2=z^2\operatorname{tang}^2\varphi.$$

Ferner ist die Gleichung einer Ebene, die durch den Ursprung des Coordinatensystems geht, von der Form:

$$ax+by+cz=0.$$

Ist n der Neigungswinkel dieser Ebene gegen die Ebene der XY, und k der Winkel der Knotenlinie derselben Ebene in der Ebene der XY mit der Axe der X, so geht die letze Gleichung, die man hat:

$$\frac{a}{c}=\operatorname{tang}n\sin k;\ \frac{b}{c}=\operatorname{tang}n\cos k,$$

in folgende über:

$$\text{IV.}\quad (x\sin k+y\cos k)\operatorname{tang}n+z=0.$$

Die Gleichungen (III) und (IV) gehören der Durchschnittslinie der Ebene (IV) mit dem Kegel (III) zu. Wir wollen die Gleichung dieser Linie in der Ebene selbst, in welche sie fällt, suchen.

Denkt man sich das zuerst festgesetzte Coordinatensystem X, Y, Z, transformirt, dafs die Axe der X in der alten Ebene der XY den Winkel k beschreibt, wodurch die neue Axe der x mit der Knotenlinie der Ebene (IV) in der Ebene der XY zusammenfällt, und sind die Coordinaten eines Punctes, dessen Coordinaten im vorigen Systeme x, y, z waren, in dem jetzigen x', y', z', so hat man:

$$x=x'\cos k+y'\sin k,$$
$$y=y'\cos k-x'\sin k,$$
$$z=z'.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht die Gleichung (III) in folgende über:

$$(x'\cos k + y'\sin k - A)^2 + (y'\cos k - x'\sin k - B)^2 = z'^2\tang^2\varphi,$$

und die Gleichung (IV) nimmt folgende Gestalt an:

$$y'\tang n + z' = 0.$$

Es sind daher die Gleichungen der Curve gegen das so eben festgesetzte Coordinatensystem:

$$(x'\cos k + y'\sin k - A)^2 + (y'\cos k - x'\sin k - B)^2 - y'^2\tang^2 n\tang^2\varphi = 0,$$
$$z' + y'\tang n = 0.$$

Dreht man ferner die Ebene der XY um die neue Axe der x, bis sie mit der Ebene (IV) zusammenfällt, dann sind, wenn x'', y'', z'' die Coordinaten eines jeden Punctes der Ebene (IV) gegen das so eben festgesetzte Coordinatensystem sind, da man hat $z'' = 0$:

$$x' = x'',$$
$$y' = y''\cos n,$$
$$z' = -y''\sin n,$$

und diese Resultate in die zwei letzten Gleichungen der Curve substituirt, erhält man die einzige Gleichung:

$$(x''\cos k + y''\sin k\cos n - A)^2 + (y''\cos n\cos k - x''\sin k - B)^2 = y''^2\sin^2 n\tang^2\varphi,$$

für einen jeden Kegelschnitt.

Setzt man in der letzten Gleichung statt x'', y'', dieselben Buchstaben ohne die Zeiger, und reducirt sie gehörig, so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$x^2 + y^2(\cos^2 n - \sin^2 n\tang^2\varphi) - 2(A\cos k - B\sin k)x$$
$$- 2\cos n(A\sin k + B\cos k)y + A^2 + B^2 = 0,$$

oder, wenn man sie durch $A^2 + B^2$ dividirt, wird sie von der Form:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'x + D'y + 1 = 0,$$

welche identisch mit der Gleichung (II) ist.

3.

Diejenige Gerade, welche durch den Scheitel und den Brennpunct einer Curve der zweiten Ordnung geht, nennt man Hauptaxe der Curve, und wenn der Schnitt des Kegels (III), welcher ein Kreis ist, die Basis des Kegels genannt wird, so fällt die Hauptaxe eines jeden Kegelschnittes mit der Geraden zusammen, welche die gröfste Neigung gegen die Basis hat. Nun gehört die Gleichung (II), nach dem so eben Gezeigten, dann einem Kegelschnitte zu, wenn das Coordinatensystem so gewählt wurde, dafs die Axe der x mit der Knotenlinie der Ebene (IV) in der zuerst festgesetzten

Coordinatenebene XY zusammenfällt. Da aber die Ebene der XY parallel mit der Basis des Kegels ist, so steht die neue Axe der x senkrecht auf der Linie, welche in der Ebene (IV) liegt, und die gröfste Neigung gegen die Basis des Kegels hat. Ist aber die Linie der gröfsten Neigung zugleich Hauptaxe, oder wenigstens parallel mit der Hauptaxe der Curve, so bildet die Axe der x, auf welche die Gleichung (II) bezogen ist, mit der Hauptaxe der Curve einen rechten Winkel.

Verwechselt man die Axe der x mit der Axe der y, so ist auch die Axe der y auf der Hauptaxe des Kegelschnittes senkrecht. Da ferner jede auf der so eben betrachteten Hauptaxe gezogene Senkrechte parallel mit der zweiten Hauptaxe des Kegelschnittes ist, so läfst sich folgender Satz aussprechen: Wenn die Gleichung einer Curve der zweiten Ordnung von der Form (II) ist, dann liegen die Coordinatenaxen parallel mit den Hauptaxen der Curve *).

4.

Die allgemeine Gleichung der zweiten Ordnung zwischen drei veränderlichen Gröfsen ist von der Form:

V. $$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+1=0.$$

Diese Gleichung gehört jenen Flächen an, die unter dem Namen: Flächen der zweiten Ordnung, bekannt sind. Es läfst sich aber mit den drei Coordinatenebenen, auf welche die Gleichung (V) bezogen ist, eine solche Transformation vornehmen, dafs diejenigen Glieder der letzten Gleichung, welche die Producte je zweier der Coordinaten eines Punctes der Fläche enthalten, verschwinden, wodurch dann die Gleichung (V) in folgende übergeht:

VI. $$A'x^2+B'y^2+C'z^2+D'x+E'y+F'z+1=0.$$

Setzt man in der Gleichung (V) $x=\alpha$, oder $y=\beta$, oder $z=\gamma$, so erhält man für einen jeden dieser Fälle, der Ordnung nach, folgende Gleichungen:

$$a.\quad\begin{cases}By^2+Cz^2+Fyz+(D\alpha+H)y+(E\alpha+I)z+A\alpha^2+G\alpha+1=0,\\ Ax^2+Bz^2+Exz+(D\beta+G)x+(F\beta+I)z+B\beta^2+H\beta+1=0,\\ Ax^2+By^2+Dxy+(E\gamma+G)x+(F\gamma+H)y+C\gamma^2+I\gamma+1=0.\end{cases}$$

*) Zwei wirkliche Hauptaxen hat nun die Ellipse; die Hyperbel und Parabel hingegen haben nur eine Hauptaxe. Man kann aber jede, auf dieser einen gezogene Senkrechte als fingirte zweite Hauptaxe ansehen. Im Kreise sind alle Durchmesser Hauptaxen, daher besteht der ausgesprochene Satz für alle Curven der zweiten Ordnung.

Diese drei Gleichungen stellen Curven der zweiten Ordnung vor, und zwar sind diese Curven Schnitte der Fläche (V) mit Ebenen, die in den senkrechten Distanzen α, β, γ, von den Coordinatenebenen yz, xz, xy, angebracht sind. Da eine jede dieser Gleichungen (a) das Product der Coordinaten eines Punctes der Curven, welche sie vorstellen, enthält, so laufen daher, nach dem vorhergehenden Paragraph, die Coordinatenaxen, auf welche die Gleichung (V) bezogen ist, nicht parallel mit den Hauptaxen der Curven (a).

Läfst man hingegen in der Gleichung (VI) nach und nach x in α', y in β' und z in γ' übergehen, dann stellen die so erhaltenen drei Gleichungen:

$$b.\quad \begin{cases} B'y^2 + C'z^2 + E'y + F'z + A'\alpha'^2 + 1 = 0, \\ A'x^2 + C'z^2 + D'x + F'z + B'\beta'^2 + 1 = 0, \\ A'x^2 + B'y^2 + D'x + E'y + C'\gamma'^2 + 1 = 0, \end{cases}$$

ebenfalls die Schnitte derselben Fläche mit den drei Ebenen, die mit den Coordinatenebenen, auf welche die Gleichung (VI) bezogen ist, in den Abständen α', β', γ', parallel laufen, vor.

Die Curven der Gleichungen (b) sind von der Art, dafs ihre Hauptaxen parallel mit den Coordinatenaxen laufen. Man kann daher den Unterschied der Gleichungen (V) und (VI), die derselben Fläche angehören, folgendermafsen ausdrücken: Ein jeder parallele Schnitt einer Fläche der zweiten Ordnung mit einer der Coordinatenebenen, die der Gleichung (V) zu Grunde liegen, hat seine Hauptaxen nicht parallel mit den Coordinatenaxen; während dafs ein ähnlicher Schnitt der Fläche, wo das Coordinatensystem der Gleichung (VI) zu Grunde liegt, seine Hauptaxen parallel mit den Coordinatenaxen hat.

5.

Stellt $[x, y, z]$ das senkrechte Coordinatensystem vor, auf welches die Gleichung (VI) bezogen, jede Fläche der zweiten Ordnung vorstellt, und (x, y, z) jedes andere senkrechte Coordinatensystem, das denselben Anfangspunct als das vorhergehende hat, so ergiebt sich, wenn man auf die Entstehung des Coordinatensystems $[x, y, z]$ aus dem (x, y, z) Rücksicht nimmt, dafs nur ein einziges Coordinatensystem von der Art möglich ist, dafs wenn man eine Fläche der zweiten Ordnung darauf bezieht, die

Gleichung dieser Fläche jene Glieder nicht enthält, die die Producte zweier Coordinaten eines Punctes der Fläche enthalten; oder es giebt nur eine bestimmte Lage für ein senkrechtes Coordinatensystem, auf welches eine Fläche der zweiten Oudnung bezogen ist, dafs wenn man zu den Coordinatenebenen parallele Ebenen führt, diese Ebenen mit der Fläche, Curven zu Schnitten geben, deren Hauptaxen parallel mit zwei Coordinatenaxen sind.

Erinnert man sich, was unter Hauptschnitten einer Fläche der zweiten Ordnung verstanden wird, so ist klar, dafs wenn man diese drei Hauptschnitte oder je drei mit ihnen parallele Ebenen als ein Coordinatensystem ansieht, der so eben erwähnte Fall statt finden wird, nemlich: ein jeder mit einem dieser Hauptschnitte parallel geführte Schnitt zu der Fläche, wird auf der Oberfläche derselben eine Curve erzeugen, deren Hauptaxen parallel mit den Hauptaxen des parallelen Hauptschnittes sein werden. Da es aber nur ein einziges Coordinatensystem dieser Art geben kann, so mufs das Coordinatensystem $[x, y, z]$ parallel mit den Hauptschnitten der Fläche sein, oder: Wenn die Gleichung (VI) eine Fläche der zweiten Ordnung vorstellt, müssen die Coordinatenaxen parallel mit den Hauptaxen der Fläche sein.

14.
Euleri formulae de transformatione coordinatarum.

(Auct. Dr. *J. G. Jacobi*, *Regiom.*)

1. Cum nuper animi causa plurima commentariorum Academiae Petropolitanae volumina perlustrarem, incidi in commentationem Eulerianam inscriptam:

Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum,

quae in tom. XX. nov. comm. a. 1775 legitur. Quas ibi exhibet ille de transformatione coordinatarum formulas, cum nec inelegantes sint et minus cognitae esse videantur, hoc loco referam.

Duo coordinatarum systemata rectangularia esse supponuntur, quae initio gaudent communi; vocentur alterius coordinatae x, y, z; alterius p, q, r; atque sit:

$$x = \alpha p + \beta q + \gamma r,$$
$$y = \alpha' p + \beta' q + \gamma' r,$$
$$z = \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r.$$

Notum est, inter novem coëfficientes α, β, etc. sex intercedere relationes, ita ut per quantitates tres exprimere liceat omnes. Eulerus in commentatione memorata novem illas quantitates hunc in modum a tribus angulis η, η', η'' pendere docet. Ponit ille:

$$\alpha = \sin\zeta \qquad \alpha' = \cos\zeta \sin\eta \qquad \alpha'' = \cos\zeta \cos\eta$$
$$\beta = \sin\zeta' \qquad \beta' = \cos\zeta' \sin\eta' \qquad \beta'' = \cos\zeta' \cos\eta'$$
$$\gamma = \sin\zeta'' \qquad \gamma' = \cos\zeta'' \sin\eta'' \qquad \gamma'' = \cos\zeta'' \cos\eta''.$$

Posito $\cos(\eta-\eta')\cos(\eta'-\eta'')\cos(\eta''-\eta) = -\triangle\triangle$,

probat, fieri:

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{-\triangle}{\cos(\eta'-\eta'')}, \quad \operatorname{tg}\zeta' = \frac{-\triangle}{\cos(\eta''-\eta)}, \quad \operatorname{tg}\zeta'' = \frac{-\triangle}{\cos(\eta-\eta')};$$

fieri etiam:

$$\sin\zeta = -\sqrt{\operatorname{cotg}(\eta''-\eta)\operatorname{cotg}(\eta-\eta')},$$
$$\sin\zeta' = -\sqrt{\operatorname{cotg}(\eta-\eta')\operatorname{cotg}(\eta'-\eta'')},$$
$$\sin\zeta'' = -\sqrt{\operatorname{cotg}(\eta'-\eta'')\operatorname{cotg}(\eta''-\eta)}.$$

2. In eadem commentatione Eulerus demonstrat, semper dari axem, qui et ipse per initium commune transit, circa quem ita rotari possit alterum systema, ut in situm alterius perveniat. Neque tamen in illa commentatione formulas huc pertinentes exhibere valet, sed rem in alia commentatione inscripta:

Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi re-

retractat; invitaverat etiam ad suscipiendum negotium ingeniosum eius amicum Lexell, qui de eadem re agit in commentatione inscripta:

Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum.

Utraque commentatio in eodem Tomo XX legitur. Sit angulus gyrationis φ; axis, circa quem gyratio fit, cum axibus coordinatarum x, y, z resp. formet angulos a, b, c, unde

$$\cos a \cos a + \cos b \cos b + \cos c \cos c = 1.$$

Gyratione transacta axem $\tau\tilde{\omega}\nu\ x$ ad axem $\tau\tilde{\omega}\nu\ p$, axem $\tau\tilde{\omega}\nu\ y$ ad axem $\tau\tilde{\omega}\nu\ q$, axem $\tau\tilde{\omega}\nu\ z$ ad axem $\tau\tilde{\omega}\nu\ r$ pervenisse supponitur, ita ut axis gyrationis cum axibus coordinatarum p, q, r eosdem formet angulos a, b, c. Nec non ubi per axem gyrationis duo ducantur plana, quae per axes $\tau\tilde{\omega}\nu\ x$ et $\tau\tilde{\omega}\nu\ p$ transeunt, duo, quae per axes $\tau\tilde{\omega}\nu\ y$ et $\tau\tilde{\omega}\nu\ q$, duo, quae per axes $\tau\tilde{\omega}\nu\ z$ et $\tau\tilde{\omega}\nu\ r$ transeunt, bina eiusmodi plana formabunt eundem angulum φ.

Uterque invenit post calculos satis prolixos formulas sequentes:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\varphi \sin a^2 + \cos a^2,\\
\alpha' &= \sin\varphi \cos c + \cos a \cos b\,(1-\cos\varphi),\\
\alpha'' &= -\sin\varphi \cos b + \cos a \cos c\,(1-\cos\varphi),\\
\beta' &= \cos\varphi \sin b^2 + \cos b^2,\\
\beta'' &= \sin\varphi \cos a + \cos b \cos c\,(1-\cos\varphi),\\
\beta &= -\sin\varphi \cos c + \cos b \cos a\,(1-\cos\varphi),\\
\gamma'' &= \cos\varphi \sin c^2 + \cos c^2,\\
\gamma &= \sin\varphi \cos b + \cos a \cos c\,(1-\cos\varphi),\\
\gamma' &= -\sin\varphi \cos a + \cos b \cos c\,(1-\cos\varphi).
\end{aligned}$$

Notentur adhuc relationes sequentes:

$$\alpha + \beta' + \gamma'' = 1 + 2\cos\varphi,$$

quam formulam ex elegantissimis esse censeo;

$$\begin{aligned}
\alpha' - \beta &= 2\sin\varphi \cos c, \quad & \alpha' + \beta &= 2\cos a \cos b\,(1-\cos\varphi),\\
\beta'' - \gamma' &= 2\sin\varphi \cos a, \quad & \beta'' + \gamma' &= 2\cos b \cos c\,(1-\cos\varphi),\\
\gamma - \alpha'' &= 2\sin\varphi \cos b, \quad & \gamma + \alpha'' &= 2\cos c \cos a\,(1-\cos\varphi),
\end{aligned}$$

$$\alpha'\alpha' - \beta\beta = \beta''\beta'' - \gamma'\gamma' = \gamma\gamma - \alpha''\alpha'' = 4\cos a \cos b \cos c \sin\varphi\,(1-\cos\varphi),$$

$$\frac{(\alpha'-\beta)(\beta''-\gamma')}{\gamma+\alpha''} = \frac{(\beta''-\gamma')(\gamma-\alpha'')}{\alpha'+\beta} = \frac{(\gamma-\alpha'')(\alpha'-\beta)}{\beta''+\gamma'} = 2(1+\cos\varphi) = 1+\alpha+\beta'+\gamma''$$

etc. etc.

Demonstrationes, quas illi VV. Cll. dederunt, hodie elegantiores reddi possunt. Hic tamen rem tantummodo indicatam volo, atque iuvat, formulas maxime memorabiles oblivioni eripuisse. — Regiom. Junii 1827.

15.
Aufgaben und Lehrsätze,
erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

Geometrische Lehrsätze von Herrn J. Steiner,

(Verfasser der Abhandlungen No. 5., 18., 25., 31., 32. im ersten und No. 5. und 6. im zweiten Bande dieses Journals.)

25. Lehrsatz. Wenn auf einer Kugelfläche drei beliebige Kreise gegeben sind, so giebt es, im Allgemeinen, 8 Puncte, aus deren jedem die stereographischen Projectionen der drei Kreise einander gleich sind.

26. Lehrsatz. Wenn in einer Ebene vier beliebige Kreise gegeben sind, so kann im Allgemeinen eine Kugel so gelegt werden, dafs wenn man die vier Kreise nach der stereographischen Projection auf dieselbe projicirt, alle Projectionen einander gleich sind.

27. Lehrsatz. Des Pappus „alter" Satz (Band I. S. 260. dieses Journals) findet ähnlicherweise auf der Kugelfläche Statt, nemlich, wenn M, M_1 (Fig. 1.) zwei beliebige Kugelkreise sind, die einander in B berühren, und man beschreibt irgend zwei andere Kreise m, m_1, von denen jeder jene beiden berührt, und die einander berühren, und man fället aus den Polen m, m_1 auf den Hauptkreis BMM_1, der durch die Pole M, M_1 geht, sphärische Lothe p, p_1, so ist, wenn man die sphärischen Radien der Kreise m, m_1 durch r, r_1 bezeichnet, allemal:

$$\frac{\sin p_1}{\sin r_1} = \frac{\sin p}{\sin r} + 2.$$

28. Lehrsatz. Wenn irgend ein sphärisches Dreieck ABC (Fig. 2.) gegeben ist, und man ziehet aus seinen Winkeln durch irgend einen Punct P Hauptkreise (gröfste Kreise. D. H.) APA_1, BPB_1, CPC_1, welche die gegenüberliegenden Seiten in den Puncten A_1, B_1, C_1 treffen, so hat man, wenn M der Pol und R der Radius des um das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises ist,

$$\frac{\sin PA_1}{\sin AA_1} + \frac{\sin PB_1}{\sin BB_1} + \frac{\sin PC_1}{\sin CC_1} = \frac{\cos MP}{\cos R}.$$

Soll daher die Summe der drei Quotienten zur Linken constant bleiben, so ist der Ort des Puncts P die Peripherie eines mit dem genannten umschriebenen Kreise parallelen Kreises.

29. Lehrsatz. Die Leitlinien aller Parabeln in einer Ebene, von denen jede drei beliebige Geraden berührt, schneiden einander in einem und demselben Punct, und zwar in dem nemlichen Puncte, in welchem die aus den Winkeln des von den 3 Geraden eingeschlossenen Dreiecks auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten Lothe einander schneiden.

30. Lehrsatz. Berührt irgend eine Parabel drei Geraden, welche ein gleichseitiges Dreieck einschliefsen, so treffen die drei Geraden aus den Ecken des Dreiecks nach den Berührungspuncten einander im Brennpuncte der Parabel.

31. Lehrsatz. *a*) Berührt irgend eine Fläche zweiten Grades die 6 Kanten einer dreiseitigen Pyramide, oder ihre Verlängerungen, so schneiden die drei Geraden durch die Berührungspuncte der gegenüberliegenden Kanten, einander allemal in einem Puncte; und umgekehrt.

b) Berührt von zwei beliebigen Flächen zweiten Grades jede die sechs Kanten einer dreiseitigen Pyramide, oder ihre Verlängerungen, so liegen die 12 Berührungspuncte allemal in irgend einer dritten Fläche desselben Grades.

32. Lehrsatz. Jeder beliebige Punct in der Ebene eines gegebenen Dreiecks *ABC* (Fig. 3.) kann einer der Brennpuncte eines Kegelschnitts sein, welcher die drei Seiten des Dreiecks, oder ihre Verlängerungen, berührt, und zwar ist der Kegelschnitt entweder *a*) eine Parabel, oder *b*) eine Ellipse, oder *c*) eine Hyperbel, je nachdem der genannte Punct entweder *a*) in der Peripherie des um das Dreieck beschriebenen Kreises, oder *b*) in einem der vier Räume E, E_1, E_2, E_3, oder *c*) in einem der sechs Räume H_1, H_2, H_3, h_1, h_2, h_3 liegt. (S. 5. Aufg.)

Wenn im Falle (*c*.) der gegebene Brennpunct z. B. in dem Raume h_1 liegt, so liegt der andere Brennpunct in dem entsprechenden Raume H_1; u. s. w.

33. Lehrsatz. 1) Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien *AB*, *CD* (Fig. 4.) einander schneiden, so giebt es zwei andere Geraden *EF*, *GH*, die ihre Winkel halbiren.

2) Sind drei Geraden *AB*, *CD*, *EF* (Fig. 5.) gegeben, so wird jede, z. B. *AB*, von den zwei Geraden *GH* und *IK*, welche (nach 1.) zu den beiden übrigen gehören, in zwei Puncten geschnitten. Zusammen giebt es also 6 solcher Durchschnittspuncte, und von diesen 6 Puncten liegen 4 mal 3 in einer Geraden.

3) Sind 4 Geraden gegeben, so wird jede von den 4 Geraden, welche zu den drei übrigen gehören (2.), in 4 Puncten geschnitten. Solcher Puncte sind also zusammen 16, und von diesen 16 Puncten liegen 8 mal 4 in einer Geraden.

4) Sind 5 Geraden gegeben, so wird jede derselben von den 8 Geraden, welche zu den 4 übrigen gehören (3.) in 8 Puncten geschnitten: dieses sind zusammen 40 Puncte, und von diesen 40 Puncten liegen 16 mal 5 in einer Geraden; u. s. w. Ueberhaupt bei n gegebenen Geraden wird jede von den 2^{n-2} Geraden, welche zu den $n-1$ übrigen gehören, in 2^{n-2} Puncten geschnitten, welches zusammen $n.2^{n-2}$ Puncte ausmacht, und von diesen Puncten liegen 2^{n-1} mal n in einer Geraden.

Dieser Satz ist nur ein specieller Fall von einem allgemeineren Satze.

34. Lehrsatz. Wenn in einer Ebene zwei beliebige Kreise K, K_1 (Fig. 6.) gegeben sind, so giebt es eine Schaar, und zwar unzählige andere Kreise, von denen jeder jene beiden berührt, (diese anderen Kreise dürfen nicht nothwendig einer den anderen, sondern nur die Kreise K und K_1 berühren. D. H.) und die Mittelpuncte dieser Schaar Kreise liegen in irgend einem Kegelschnitt. Dreht man jeden Kreis der genannten Schaar um einen seiner Durchmesser, so erhält man eine Schaar Kugeln, und dann giebt es eine zweite Kugelschaar, von denen jede alle Kugeln der ersten Schaar berührt, und deren Mittelpuncte ebenfalls in einem Kegelschnitte liegen; und zwar steht die Ebene des letzteren Kegelschnitts auf der gegebenen Ebene senkrecht, und schneidet sie in der Geraden KK_1; auch haben die beiden Kegelschnitte solche Beziehung zu einander, dafs die Brennpuncte eines jeden derselben mit den Hauptscheiteln des anderen zusammenfallen, dafs daher nothwendig entweder beide Kegelschnitte congruente Parabeln sind, oder dafs der eine eine Ellipse und der andere eine Hyperbel ist.

Nimmt man nun unter der ersten Kugelschaar eine Reihe Kugeln m, m_1, m_2, m_3 ..... an, welche einander der Ordnung nach berühren, so findet, wie im ersten Bande dieses Journals, S. 256., bewiesen, wenn die Reihe commensurabel ist, d. h., nach einem oder nach mehreren Umläufen in sich zurückkehrt, das Nemliche allemal Statt, an welcher beliebigen Stelle man auch das erste Glied m der Reihe annehmen mag.

Es findet nun ferner folgendes Gesetz Statt: „dafs es, wenn in der ersten Kugelschaar eine commensurable Reihe $m, m_1, m_2,$

m_3 ..... möglich ist, allemal auch in der zweiten Kugelschaar eine commensurable Reihe M, M_1, M_2, M_3 ..... giebt," und zwar sind beide Reihen dem folgenden sehr merkwürdigen gemeinschaftlichen Gesetz unterworfen:

„Bezeichnet man nemlich die Zahl der Umläufe der ersten Reihe durch u, und die Zahl ihrer Glieder (Kugeln) durch n, und ferner die Zahl der Umläufe und Glieder der zweiten Reihe durch U und N, so ist allemal:

$$\frac{u}{n} + \frac{U}{N} = \tfrac{1}{2}."$$

Ein specieller Fall dieses Satzes steht im ersten Bande dieses Journals, S. 272., wo nemlich $u = 1$, $n = 3$, $U = 1$ und $N = 6$ ist.

Aufgaben von Anderen.

35. Die Zahl der Primzahlen zu finden, welche kleiner sind, als eine gegebene Zahl.

36. Zu beweisen, dafs sich alle imaginaire Gröfsen-Formen durch $\sqrt{-1}$ und reelle Gröfsen ausdrücken lassen.

37. Die Unterscheidungszeichen der gröfsten und kleinsten Werthe gegebener beliebiger Functionen von zwei und mehr unabhängig veränderlichen Gröfsen zu finden.

38. Eine bestimmte, keiner Ausnahme unterworfene Definition stetiger Functionen zu geben.

39. Wenn alle Glieder einer unendlichen Reihe reelle Gröfsen sind, und die Reihe convergirt, so ist die Summe der Reihe nothwendig reell. (Man sehe auch die Abhandlung 4. im vorigen Heft dieses Journals.) Wenn alle Glieder der unendlichen Reihe reell sind, die Reihe divergirt aber, so kann die Summe sowohl reell als imaginair sein. Es fragt sich, ob aus dem Gesetz der Fortschreitung der Glieder der Reihe erkannt werden könne, ob die Summe reell sei oder imaginair, und wie.

40. Diejenige unbekannte Function, z. B. von a und n, welche die Eigenschaft hat, dafs sie für ein ganzzahliges n ein Kettenbruch, z. B. für $n = 3$, gleich $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a}}}$ ist, und die aufserdem für jedes n die nemlichen Eigenschaften hat, wie für ein ganzzahliges n, in eine Reihe

zu entwickeln. Die Function wird in die Classe derjenigen gehören, welche Euler inexplicable nennt.

41. *ADE, BFD, AGF, BHG, AIH, BKI,* etc. (Fig. 7.) sind gerade Linien, und *ED* ist gleich $DF = GF = HG = IH = KI$ etc. Man soll den geometrischen Ort der Puncte *D, G, I* ..... und *E, F, H, K* ..... finden.

42. Wenn man die 4 dreieckigen Seiten-Ebenen einer beliebigen dreiseitigen Pyramide und die 6 Winkel an den Kanten, welche sie einschliefsen, zu bestimmenden Stücken der Pyramide nimmt, so wird die Pyramide auf 8 verschiedene Arten durch diese Stücke, theils unbedingt, theils bedingt, bestimmt, nemlich:

1) durch drei Seiten-Ebenen, unbedingt;
2) durch zwei Seiten-Ebenen und den eingeschlossenen Kanten-Winkel, unbedingt;
3) durch zwei Seiten-Ebenen und einen an der einen liegenden Kanten-Winkel, bedingt;
4) durch zwei Seiten-Ebenen, nebst dem ihnen beiden gegenüberliegenden Kanten-Winkel, unbedingt;
5) durch eine Seiten-Ebene und die drei daran liegenden Kanten-Winkel, unbedingt;
6) durch eine Seiten-Ebene und die drei Kanten-Winkel an einer daran liegenden Seiten-Ebene, bedingt;
7) durch eine Seiten-Ebene, einen anliegenden und zwei abliegende Kanten-Winkel, unter welchen der dem anliegenden Winkel gegenüber, bedingt;
8) durch eine Seiten-Ebene und die drei abliegenden Kanten-Winkel, bedingt.

Die Fälle 1., 2., 3., 5., 6., 7. lassen sich ohne Rechnung, durch blofse Anschauung, oder geometrisch, aus der Figur, beweisen. (Man sehe des Herausgebers Lehrbuch der Geometrie, 2. Band, §. 525.) Es wird das Gleiche für die Fälle 4. und 8. verlangt.

43. Mit gegebenen Seiten-Ebenen ist nur ein Polyëder möglich. Cauchy hat bekanntlich diesen Satz zuerst allgemein bewiesen, und zwar mit Hülfe des Eulerschen Satzes, dafs die Summe der Zahlen der Ecken und der Seiten-Ebenen jedes Polyëders um 2 gröfser ist, als die Zahl seiner Kanten, und mit Hülfe des eigenthümlichen Satzes, dafs,

wenn sich die Winkel einer beliebigen körperlichen Ecke mit unveränderlichen Seiten verändern, dieselben nur theils ab, theils zunehmen können, und dafs die Zahl der Wechsel des Abnehmens und Zunehmens nicht kleiner sein kann, als 4. (Man findet diesen Beweis unter Anderem vollständig in dem oben (bei 8.) erwähnten Lehrbuch der Geometrie, §. 555.) Es ist die Frage, ob kein anderer, wenn auch nicht directer, so doch noch einfacherer Beweis möglich sei? Auch wäre zu untersuchen, ob nicht allgemein, wie es scheint, ein beliebiges Polyëder schon durch seine Seiten-Ebenen weniger eine, bestimmt wird.

44. Eine Curve durch zwei gegebene Puncte zu legen, von der Art, dafs sie in den beiden Puncten gegebene Tangenten hat, und die Krümmungs-Halbmesser Gleichvielfache von den zunehmenden Bogen sind.

45. Eine Curve in der Ebene durch 5 gegebene Puncte zu legen, von der Art, dafs, wenn man die Länge der Bogen der Curve und ihre Krümmungs-Halbmesser als die rechtwinkligen Abscissen und Ordinaten einer anderen Curve betrachtet, diese zweite Curve einer mit der Abscissen-Axe parallelen geraden Linie so nahe kommt als möglich.

46. Wenn zwei Ecken eines geradlinigen Vielecks in der Ebene fest sind, und die Länge aller Seiten des Vielecks unveränderlich dieselbe bleibt, den geometrischen Ort der übrigen Ecken zu finden. Dieser geometrische Ort wird zum Theil nicht blofs eine Curve, sondern eine umschlossene Figur sein.

47. Die Bewegung einer sogenannten fliegenden Brücke (Gier-Brücke), d. h. eines Schiffes zu untersuchen, welches in einem Strome, mittelst eines langen Seiles, durch einen festliegenden Anker gehalten, und schief gegen den Strom gerichtet, durch den Stofs des Wassers von einem Ufer zum anderen getrieben wird. Der Vereinfachung wegen wird das Schiff von rechtwinklig-parallelepipedischer Form, das Ankerseil als eine gerade Linie, ohne Dicke, und die Geschwindigkeit des Wassers in allen Puncten des Querschnitts des Stromes gleich grofs angenommen. Gesucht wird die Geschwindigkeit des Schiffes in den verschiedenen Puncten seiner kreisförmigen Bahn für gegebene Neigungen seiner Wände gegen die Richtung des Stromes, desgleichen diejenigen Neigungen der Wände gegen die Stromrichtung, unter welchen das Schiff in der kürzesten Zeit von einem Ufer zum anderen gelangt.

48. An einer der ältesten Arten von Tisch-Uhren bewegt sich das Pendel nicht hin und her, sondern im Kreise herum, das heifst: es beschreibt den Mantel eines Kegels mit kreisförmiger Grundfläche und lothrechter Axe, dessen Spitze im Aufhängepuncte liegt. Die Pendel solcher Uhren sind etwa wie der Compafs in einem Schiff aufgehängt, nemlich wie es (Fig. 8. *a.b.c.d*) vorstellen. (Gleiche Theile in den Figuren sind mit gleichen Buchstaben bezeichnet). Der festunterstützte Ring *ABCD* trägt eine Schneide *EF*, welche daran befestigt ist. Diese Schneide trägt einen losen, darauf ruhenden Ring *PQRS*, und dieser Ring eine zweite Schneide *GH*, die an dem Pendel *IK* befestigt ist, und welche die erste Schneide genau rechtwinklig durchkreuzt. Die Pendelstange *IK* geht durch die Schneiden *GH* und *EF* und durch die Ringe *ABCD* und *PQRS* hindurch. Unten an derselben ist ein starkes Gewicht befestigt. Die Länge des Pendels vom Ruhepunct bis zum Schwerpunct desselben und des daran befestigten Gewichts, ist ungefähr 20mal so grofs als die Länge der Schneiden *EF* und *GH*. Unterhalb des Schwunggewichts endigt das Pendel in einen Stift, welcher von einem, über einen Steeg ausgespannten Haar herumgeführt wird. Der Winkel an der Spitze des Kegelmantels, welchen das Pendel beschreibt, beträgt $\frac{1}{15}$ bis $\frac{3}{15}$ eines Rechten. Den Steeg mit dem Haar setzt unmittelbar die Uhr vermöge ihrer Feder in Bewegung, und das Schwung-Pendel dient, die Bewegung der Uhr gleichförmig zu erhalten.

Es wird eine Untersuchung der Bewegung des beschriebenen Pendels verlangt. Zur Erleichterung der Rechnung wird von dem Widerstande des Mittels, so wie von aller Reibung abstrahirt, und die Kraft der Uhrfeder, oder die Kraft, mit welcher das Haar auf dem Steege das Pendel umherführt, unveränderlich angenommen. Es wird gefragt, wie stark diese Kraft sein müsse, damit das Pendel beständig in dem Mantel eines und desselben Kegels, oder doch sehr nahe sich so bewege; desgleichen, welche Linie sein Schwerpunct beschreibe, wenn die Kraft der Uhrfeder gleich Null gesetzt wird. Die beschriebene Art der Aufhängung des Pendels kommt bei der Untersuchung wesentlich in Betracht.

16.

Ueber Interpolations-Formeln, desgleichen über Anwendung derselben auf die Auflösung algebraischer Gleichungen von beliebigen Graden.

(Von Herrn *Louis Olivier*.)

1.

Es sei fz irgend eine Function der Gröfse z. Die Function fz für Werthe von z berechnen, welche zwischen bestimmten Werthen von z liegen, für welche man vielleicht die zugehörigen Werthe von fz schon kennt, heifst bekanntlich: Interpoliren.

Es giebt zwei Fälle. Die Form oder das Gesetz f der Function fz kann bekannt sein oder nicht.

Im ersten Falle giebt der entwickelte Ausdruck von fz ebensowohl die eingeschalteten Werthe von fz, als die, zwischen welchen sie einzuschalten sind, und jene sind eben so bestimmt, wie diese. Es kommt also alsdann blofs auf eine allgemeine Entwickelung von fz an.

Im zweiten Fall hingegen sind die einzuschaltenden Werthe von fz unbestimmt, und können, strenge genommen, gar nicht gefunden werden, so viele Werthe von fz auch für bestimmte Werthe von z, zwischen welchen jene liegen, gegeben sein mögen. Denn da das Gesetz der Abhängigkeit der Gröfse fz von z nicht bestimmt ist, so kann man die eingeschalteten Werthe willkürlich annehmen, und die Aufgabe vom Einschalten existirt unter diesen Umständen im Allgemeinen gar nicht. Insofern aber, der Natur des Gegenstandes nach, ein Gesetz f für fz wenigstens vorhanden ist, welches man nur nicht kennt, so kann man sich demselben dadurch nähern, dafs man statt fz irgend eine Function Fz von z willkürlich setzt, welche die Eigenschaft hat, dafs sie für die bestimmten Werthe von z die zugehörigen bekannten Werthe von fz ebenfalls giebt. Man legt gleichsam, wenn man sich z. B. die bestimmten Werthe von z, deren n sein mögen, als die Absci-

sen einer unbekannten Curve, und die zugehörigen Werthe von $fz = y$ als die zugehörigen rechtwinkligen Ordinaten vorstellt, durch die, nach der Voraussetzung auf diese Weise gegebenen n Puncte der unbekannten Curve irgend eine willkürliche Curve, deren Ordinaten $Fz = v$ sind, und welche die Eigenschaft hat, dafs sie durch die gegebenen n Puncte gehet; und diese Curve nimmt man für die gegebene. Aber auch diese Näherung ist noch willkürlich. Es können unzählige Functionen Fz die Eigenschaft haben, dafs sie für n bestimmte Werthe von z gegebene Werthe annehmen. Denn es können unzählige Curven, deren Ordinaten $v = Fz$ sind, durch die n gegebenen Puncte gehen. Allein, wenn man anders versichert ist, dafs die unbekannte Function fz continuirlich ist, das heifst, dafs die Curve, deren Gleichung $fz = y$ ist, stetig, oder ohne Unterbrechung fortläuft, und man nimmt willkürlich eine Function Fz, die ebenfalls continuirlich ist, oder eine Curve $Fz = v$ an, die ebenfalls stetig fortläuft, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die beiden Functionen fz und Fz, oder die beiden Curven $fz = y$ und $Fz = v$ einander nahe kommen, und dafs folglich die, nach der willkürlichen Gleichung $Fz = v$, eingeschalteten und für die, zu den nemlichen z gehörigen y, genommenen Werthe von v den zugehörigen y nahe kommen, um so gröfser, je gröfser n ist, oder je mehr Werthe von fz, für bestimmte z, gegeben sind. Von den willkürlichen Functionen Fz, welche man statt der unbekannten fz setzen kann, nimmt man zur Erleichterung der Rechnung gewöhnlich die einfachste an, welche die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt.

In diesem zweiten Falle giebt es aber wieder zwei einzelne Fälle. Entweder nemlich können die z, für welche die zugehörigen $y = fz$ gegeben oder bekannt sind, gleichviel, oder ungleichviel von einander verschieden sein.

Zusammengenommen also sind die Fälle folgende:

Erster Fall, wenn die Form f der Function fz gegeben ist. Alsdann ist blofs fz zu entwickeln nöthig.

Zweiter Fall, wenn f nicht bekannt, sondern nur fz für einzelne bestimmte Werthe von z gegeben ist, und zwar:

α) wenn diese bestimmten z gleichviel von einander verschieden sind,

β) wenn sie ungleichweit von einander entfernt sind.

Wir wollen die allgemeinen Formeln für diese verschiedenen Fälle entwickeln, mit der Formel für (α) im zweiten Falle anfangen, und über die Ausdrücke und ihre Entwickelungen einige Bemerkungen machen.

I. Interpolations-Formel für fz, wenn nicht f, sondern nur einzelne Werthe von fz, für gleichweit von einander entfernte z, gegeben sind.

2.

Man setze

1. $f(z+k) = f_0 z + kf_1 z + k(k-\lambda)f_2 z + k(k-\lambda)(k-2\lambda)f_3 z \ldots .$
$\ldots . + k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots .[k-(n-1)\lambda]f_n z + R,$

wo k und λ beliebige Gröfsen sind, hingegen von $f_0 z$, $f_1 z$, $f_2 z$ etc. vorausgesetzt wird, dafs sie von k nicht mehr abhängen, sondern nur von z und λ. Ob das Letztere möglich sei, mufs das Resultat der Entwicklung zeigen. Ferner werde vorausgesetzt, dafs die Reihe für $f(z+k)$ (1.), in sofern sie ohne Ende fortläuft, convergire, und für kein z und k unendlich grofs sei, oder vielmehr, die Gleichung (1.) werde auf diese Fälle beschränkt. Da alsdann der Rest R, wenn die Reihe unendlich ist, nothwendig Null sein mufs, so sind, für $k=0$, alle Glieder, bis auf das erste, Null, weil alle Glieder k zum Factor haben. Also ist

2. $fz = f_0 z.$

Um so mehr sind, für $k=\lambda$, alle Glieder, bis auf die beiden ersten, gleich Null, weil alle $k-\lambda$ zum Factor haben. Für $k=2\lambda$ sind alle Glieder bis auf die drei ersten gleich Null, weil alle $k-2\lambda$ zum Factor haben, und so weiter.

Nun setze man in (1.) $z+\lambda$ statt z, und $k+\lambda$ statt k, so findet man

3. $f(z+k+\lambda) = f(z+\lambda) + kf_1(z+\lambda) + k(k-\lambda)f_2(z+\lambda)\ldots .$
$\ldots . + k.(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots .[k-(n-1)\lambda]f_n(z+\lambda) + R_1$ und

4. $f(z+k+\lambda) = fz + (k+\lambda)f_1 z + (k+\lambda)kf_2 z + \ldots .$
$\ldots . + (k+\lambda)k(k-\lambda)\ldots .[k-(n-2)\lambda]f_n z + R_2,$

wo R_1 und R_2 ebensowohl Null sind als R.

Man ziehe die Gleichung (1.) von den Gleichungen (3. und 4.) ab, und setze die gleichen Reste einander gleich, so findet man:

$$
\begin{aligned}
& f(z+\lambda) - fz && = && fz - fz \\
& + k[f_1(z+\lambda) - f_1 z] && && + (k+\lambda-k) f_1 z \\
& + k(k-\lambda)[f_2(z+\lambda) - f_2 z] && && + [(k+\lambda)k - k(k-\lambda)] f_2 z \\
& + k(k-\lambda)(k-2\lambda)[f_3(z+\lambda) - f_3 z] && && + [(k+\lambda)k(k-\lambda) - k(k-\lambda)(k-2\lambda)] f_3 z \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots && && \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + k(k-\lambda)\ldots[k-(n-1)\lambda][f_n(z+\lambda) - f_n z] && && + [(k+\lambda)k(k-\lambda)\ldots(k-(n-2)\lambda) \\
& + R_1 - R && && \quad - k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots k-(n-1)\lambda] f_n z \\
& && && + R_2 - R
\end{aligned}
$$

oder:

$$
\begin{aligned}
5.\ & f(z+\lambda) - fz && = && \lambda f_1 z \\
& + k[f_1(z+\lambda) - f_1 z] && && + 2\lambda k f_2 z \\
& + k(k-\lambda)[f_2(z+\lambda) - f_2 z] && && + 3\lambda k(k-\lambda) f_3 z \\
& + k(k-\lambda)(k-2\lambda)[f_3(z+\lambda) - f_3 z] && && + 4\lambda k(k-\lambda)(k-2\lambda) f_4 z \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots && && \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + k(k-\lambda)\ldots[k-(n-1)\lambda][f_n(z+\lambda) - f_n z] && && + n\lambda k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots[k-(n-2)\lambda] f_n z \\
& \quad + R_1 && && \quad + R_2.
\end{aligned}
$$

Man setze in dieser Gleichung $k = 0$, so bleiben rechts und links nur die ersten Glieder. Also ist:

$$6.\quad f(z+\lambda) - fz = \lambda f_1 z.$$

Man ziehe die Gleichung (6.) von der Gleichung (5.) ab, dividire den Rest durch k, und setze hierauf $k = \lambda$, so bleiben wieder nur rechts und links die ersten Glieder des Restes, weil alle übrigen $k - \lambda$ zum Factor haben. Also findet man:

$$7.\quad f_1(z+\lambda) - f_1 z = 2\lambda f_2 z.$$

Man ziehe die Gleichung (6.) und die Gleichung (7.), letztere mit k multiplicirt, von der Gleichung (5.) ab, dividire den Rest mit $k(k-\lambda)$, und setze alsdann $k = 2\lambda$, so findet man auf gleiche Weise, wie leicht zu sehen:

$$8.\quad f_2(z+\lambda) - f_2 z = 3\lambda f_3 z.$$

So kann man immer fortfahren, und findet zusammengenommen:

$$
9.\quad \begin{cases}
f(z+\lambda) - fz = \lambda f_1 z, \\
f_1(z+\lambda) - f_1 z = 2\lambda f_2 z, \\
f_2(z+\lambda) - f_2 z = 3\lambda f_3 z, \\
f_3(z+\lambda) - f_3 z = 4\lambda f_4 z, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_{n-1}(z+\lambda) - f_{n-1} z = n\lambda f_n z.
\end{cases}
$$

Nun bezeichne man die Differenzen

$$10.\quad \begin{cases} f(z+\lambda)-fz \text{ durch } \Delta_\lambda fz, \\ f_1(z+\lambda)-f_1z \text{ durch } \Delta_\lambda f_1z, \\ f_2(z+\lambda)-f_2z \text{ durch } \Delta_\lambda f_2z, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n-1}(z+\lambda)-f_{n-1}z \text{ durch } \Delta_\lambda f_nz, \end{cases}$$

so ist, zufolge (9.),

$$11.\quad \begin{cases} \Delta_\lambda fz = \lambda f_1z, \text{ also } f_1z = \dfrac{\Delta_\lambda fz}{\lambda}, \\ \Delta_\lambda f_1z = 2\lambda f_2z, \text{ also } f_2z = \dfrac{\Delta_\lambda f_1z}{2\lambda}, \\ \Delta_\lambda f_2z = 3\lambda f_3z, \text{ also } f_3z = \dfrac{\Delta_\lambda f_2z}{3\lambda}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta_\lambda f_{n-1}z = n\lambda f_nz, \text{ also } f_nz = \dfrac{\Delta_\lambda f_{n-1}z}{n\lambda}. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$12.\quad \begin{cases} f_1z = \Delta_\lambda fz, \\ f_2z = \dfrac{\Delta_\lambda^2 fz}{2\lambda^2}, \\ f_3z = \dfrac{\Delta_\lambda^3 fz}{2.3.\lambda^3}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_nz = \dfrac{\Delta_\lambda^n fz}{2.3....n\lambda^n}, \end{cases}$$

oder auch, vermöge (9.), weil z. B. $f_1(z+\lambda)-f_1z = 2\lambda f_2z$, nichts Anderes ist, als $f_1z = \frac{f(z+\lambda)-fz}{\lambda}$, wenn man darin $z+\lambda$ statt z setzt, und f_1z wieder abziehet, folglich nichts Anderes als:

$$2\lambda f_2z = \frac{f(z+2\lambda)-f(z+\lambda)-[f(z+\lambda)-fz]}{\lambda} = \frac{f(z+2\lambda)-2f(z+\lambda)+fz}{\lambda},$$

so dafs

$$f_2z = \frac{f(z+2\lambda)-2f(z+\lambda)+fz}{2\lambda^2},$$

wenn man auf diese Weise fortfährt, die Gleichungen (9.) jede in die folgende zu setzen:

$$13.\quad \begin{cases} f_1 z = \dfrac{f(z+\lambda)-fz}{\lambda}, \\ f_2 z = \dfrac{f(z+2\lambda)-2f(z+\lambda)+fz}{2\lambda^2}, \\ f_3 z = \dfrac{f(z+3\lambda)-3f(z+2\lambda)+3f(z+\lambda)-fz}{2.3.\lambda^3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n z = \dfrac{f(z+n\lambda)-nf[z+(n-1)\lambda]+\frac{n.n-1}{2}f[z+(n-2)\lambda]\ldots.\pm fz}{2.3\ldots.n\lambda^n}, \end{cases}$$

welches das Nemliche ist wie (12.), indem

$$14.\quad \begin{cases} \Delta_\lambda fz = f(z+\lambda)-fz, \\ \Delta_\lambda^2 fz = f(z+2\lambda)-2f(z+\lambda)+fz, \\ \Delta_\lambda^3 fz = f(z+3\lambda)-3f(z+2\lambda)+3f(z+\lambda)-fz, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_\lambda^n fz = f(z+n\lambda)-nf[z+(n-1)\lambda]+\frac{n.n-1}{2}f[z+(n-2)\lambda]\ldots.\pm fz. \end{cases}$$

Setzt man nun die gefundenen Ausdrücke von $f_0 z$, $f_1 z$, $f_2 z \ldots . f_n z$ (2. und 12.) oder (2. und 14.) in die vorausgesetzte Reihe (1.), so erhält man:

$$15.\quad f(z+k) = fz + \frac{k}{\lambda}\Delta_\lambda fz + \frac{k(k-\lambda)}{2\lambda^2}\Delta_\lambda^2 fz + \frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)}{2.3.\lambda^3}\Delta_\lambda^3 fz \ldots . + \frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots.[k-(n-1)\lambda]}{2.3\ldots.n\lambda^n}\Delta_\lambda^n fz + R,$$

oder:

$$16.\quad \begin{aligned} f(z+k) = fz &+ \frac{k}{\lambda}[f(z+\lambda)-fz] \\ &+ \frac{k(k-\lambda)}{2\lambda^2}[f(z+2\lambda)-2f(z+\lambda)+fz] \\ &+ \frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)}{2.3\lambda^3}[f(z+3\lambda)-3f(z+2\lambda)+3f(z+\lambda)-fz] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots.[k-(n-1)\lambda]}{2.3\ldots.n\lambda^n}\Big[f(z+n\lambda)-nf[z+(n-1)\lambda] \\ &\qquad + \frac{n.n-1}{2}f[z+(n-2)\lambda]\ldots.\pm fz\Big] \\ &+ R. \end{aligned}$$

3.

Dieses ist eine Interpolations-Formel, vermittelst welcher sich aus den gegebenen Werthen fz, $f(z+\lambda)$, $f(z+2\lambda)$, $f(z+3\lambda)\ldots.f(z+n\lambda)$

von fz, für gleich viel von einander verschiedene Werthe z, $z+\lambda$, $z+2\lambda$, $z+3\lambda \ldots\ldots z+n\lambda$ von z, wie man siehet, der Werth $f(z+k)$ von fz, für einen beliebigen Werth $z+k$ von z finden, also der Werth von fz für einen beliebigen Werth $z+k$ von z einschalten läfst.

Ist k ein Vielfaches von λ, z. B. $m\lambda$, so ist $f(z+k)$ entweder, wenn $m<n$, einer der gegebenen Werthe von z selbst, nemlich $f(z+m\lambda)$, oder kann doch vermittelst der Formel genau gefunden werden; denn in beiden Fällen bricht die Reihe, wie leicht zu sehen, mit dem $m$ten Gliede ab. Ist hingegen k kein aufgehendes Vielfache von λ, sondern ein Bruch gegen λ, oder incommensurabel mit λ, so laufen die Reihen (15. oder 16.) ohne Ende fort. In diesem Falle mufs die Reihe, wenn sie Statt finden soll, convergiren; denn auf dieser Bedingung beruhet ihre Herleitung.

Zufolge einer früheren Abhandlung (No. 1. in diesem Bande) convergirt eine Reihe, wenn das $n$te Glied derselben mit n multiplicirt, für $n=\infty$, Null ist. Es mufs also, wenn die Reihe (15. oder 16.) convergiren soll,

$$17.\quad n.\frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots\ldots[k-(n-1)\lambda]}{2.3\ldots\ldots\tau.n\lambda^n}\Delta_\lambda^n fz$$

gleich Null sein, für $n=\infty$. Der Coefficient von $\Delta_\lambda^n fz$ in dem Ausdruck (17.) ist der Quotient zweier Factoriellen, also der Ausdruck so viel als:

$$18.\quad n.\frac{k^{n,-\lambda}}{1^{n,+1}\lambda^n}\Delta_\lambda^n fz.$$

Nun ist, zufolge der Formel (12.), in der oben benannten Abhandlung:

$$19.\quad \frac{a^{p,b}}{\alpha^{q,\beta}}=\frac{1^{p,1}}{1^{q,1}}.\frac{\left(\frac{1}{p}+1\right)^{\frac{a}{b}-1,\frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{q}+1\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1,\frac{1}{q}}}.\frac{p^{\frac{a}{b}-1}}{q^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}.\frac{b^p}{\beta^q}.\frac{1^{\frac{\alpha}{\beta}-1,1}}{1^{\frac{a}{b}-1,1}}.$$

Will man $\frac{k^{n,-\lambda}}{1^{n,+1}}$ mit $\frac{a^{p,b}}{\alpha^{q,b}}$ vergleichen, so mufs man

$$20.\quad a=k,\ \alpha=1,\ p=q=n,\ b=-\lambda,\ \beta=+1$$

setzen. Alsdann ist, zufolge (19.):

$$\frac{k^{n,-\lambda}}{1^{n,+1}}=\frac{1^{n,1}}{1^{n,1}}.\frac{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{-\frac{k}{\lambda}-1,\frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{1,\frac{1}{n}}}.\frac{n^{-\frac{k}{\lambda}-1}}{n^{1-1}}.(-\lambda)^n.\frac{1^{1-1,1}}{1^{-\frac{k}{\lambda}-1,1}},\ \text{oder:}$$

$$21.\quad \frac{k^{n,-\lambda}}{1^{n,+1}} = \frac{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{-\frac{k}{\lambda}-1,\,\frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{1,\,\frac{1}{n}}} \cdot \frac{n^{-\frac{k}{\lambda}-1}}{1^{-\frac{k}{\lambda}-1,\,1}} \cdot (-\lambda)^n.$$

Nach der oben erwähnten Abhandlung (daselbst. Gleich. 17.) ist:

$$22.\quad 1^{-\frac{k}{\lambda}-1,\,1} = \frac{1}{\left(-\frac{k}{\lambda}\right)^{\frac{k}{\lambda}+1,\,1}}.$$

Also ist in (21.):

$$23.\quad \frac{k^{n,-\lambda}}{1^{n,+1}} = \frac{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{-\frac{k}{\lambda}-1,\,\frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{1,\,\frac{1}{n}}} \cdot n^{-\frac{k}{\lambda}-1} \cdot \left(-\frac{k}{\lambda}\right)^{\frac{k}{\lambda}+1,\,1} (-\lambda)^n.$$

Nun ist für $n = \infty$,

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^{-\frac{k}{\lambda}-1,\,\frac{1}{n}} = 1^{-\frac{k}{\lambda}-1,\,0} = 1^{-\frac{k}{\lambda}-1} = 1,$$

und

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^{1,\,\frac{1}{n}} = 1^{1,\,0} = 1.$$

Also ist in (23.):

$$24.\quad \frac{k^{n,-\lambda}}{1^{n,+1}} = \frac{\left(-\frac{k}{\lambda}\right)^{\frac{k}{\lambda}+1,\,1} \cdot (-\lambda)^n}{n^{\frac{k}{\lambda}+1}},$$

folglich in (18.):

$$25.\quad n \cdot \frac{k^{n,-\lambda}}{1^{n,+1}\lambda^n} \Delta_\lambda^n fz = \frac{\left(-\frac{k}{\lambda}\right)^{\frac{k}{\lambda}+1,\,1} \cdot (-1)^n}{n^{\frac{k}{\lambda}}} \Delta_\lambda^n fz = \pm \left(-\frac{k}{\lambda}\right)^{\frac{k}{\lambda}+1,\,1} \cdot \frac{\Delta_\lambda^n fz}{n^{\frac{k}{\lambda}}}.$$

Der Factor $\left(-\frac{k}{\lambda}\right)^{\frac{k}{\lambda}+1,\,1}$ ist immer endlich, so lange nicht $\lambda = 0$ ist, während k einen endlichen Werth hat. Es kommt also nur auf den Bruch $\frac{\Delta_\lambda^n fz}{n^{\frac{k}{\lambda}}}$ an. Dieser ist, so lange nicht $\Delta_\lambda^n fz$ unendlich grofs ist, immer Null, wo k und λ einerlei Zeichen haben, oder $\frac{k}{\lambda}$ positiv ist. Die Reihe (15. und 16.) convergirt also immer, so lange nicht $\Delta_\lambda^n fz$ un-

unendlich grofs ist, und k und λ nicht verschiedene Zeichen haben. Alsdann also gilt sie auch allgemein für beliebige f, z, k und λ.

Sind, im Fall die Reihe nicht abbricht, nicht unzählige Glieder, sondern nur eine endliche Zahl von Gliedern gegeben, z. B. fz, $f(z+\lambda)$, $f(z+2\lambda)$ . . . . . $f(z+m\lambda)$, so berechnet man $m+1$ Glieder der Reihe, und läfst die übrigen weg. Dieses gehet besonders alsdann an, wenn $\Delta_\lambda fz$, $\Delta_\lambda^2 fz$ etc. der Reihe nach immer kleiner werden.

Die Reihe ist an Gestalt der bekannten Newtonschen Interpolations-Formel gleich. Die gegenwärtige Entwickelung aber zeigt, dafs sie nicht blofs dann gilt, wenn sie abbricht, oder wenn k ein aufgehendes Vielfache von λ ist, sondern, unter den für die Convergenz nothwendigen Bedingungen, auch dann noch, das heifst, dafs sie auch dann noch $f(z+k)$ genau giebt, wenn k und λ zu einander Brüche, oder mit einander incommensurabel sind, in welchem Falle dann die Reihe ohne Ende fortläuft.

Nimmt man, wenn k und λ zu einander Brüche, oder commensurabel sind, nur einen Theil der Glieder, vom ersten an, oder auch, wenn k ein Vielfaches von λ ist, nicht alle Glieder, so giebt die Reihe $f(z+k)$ näherungsweise.

Die Reihe ist unter den Interpolations-Ausdrücken, die, nach der Bemerkung in (1.), auch in dem gegenwärtigen Falle noch willkürlich sind, eine von denen, die sich am nächsten darbieten. Weiter unten wird noch eine andere vorkommen.

II. Interpolations-Formel für fz, wenn f bekannt ist.

4.

Wenn f gegeben ist, so kommt es blofs darauf an, fz für einen beliebigen Werth von z, z. B. $z+k$, allgemein, also näherungsweise durch eine Reihe zu berechnen, mithin auf die Entwickelung von $f(z+k)$ in eine convergirende Reihe.

Diese Reihe kann man unmittelbar aus der obigen (15. 16.) finden, wenn man darin $\lambda = 0$ setzt. Die Gröfsen, in welche alsdann

$$\frac{\Delta_\lambda fz}{\lambda}, \quad \frac{\Delta_\lambda^2 fz}{\lambda^2}, \quad \frac{\Delta_\lambda^3 fz}{\lambda^3} \text{ etc.}$$

übergehen, bezeichnet man gewöhnlich durch

$$\frac{\partial fz}{\partial z},\ \frac{\partial^2 fz}{\partial z^2},\ \frac{\partial^3 fz}{\partial z^3}\ \text{etc.},$$

so dafs

$$26.\quad \begin{cases} \frac{\partial fz}{\partial z} = \frac{f(z+\lambda)-fz}{\lambda}, \\ \frac{\partial^2 fz}{\partial z^2} = \frac{f(z+2\lambda)-2f(z+\lambda)+fz}{\lambda^2}, \\ \frac{\partial^3 fz}{\partial z^3} = \frac{f(z+3\lambda)-3f(z+2\lambda)+3f(z+\lambda)-fz}{\lambda^3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^n fz}{\partial z^n} = \frac{f(z+n\lambda)-nf[z+(n-1)\lambda]+\frac{n.n-1}{2}f[z+(n-2)\lambda]\ldots.\pm fz}{\lambda^n} \end{cases}$$

ist, für $\lambda = 0$.

Die Factoriellen k, $k(k-\lambda)$, $k(k-\lambda)(k-2\lambda)$ etc. gehen, für $\lambda=0$, in die Potenzen k, k^2, k^3 etc. über. Es könnte zwar scheinen, dafs für ein unendliches n,

$$k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots.(k-n\lambda)$$

nicht nothwendig gleich k^n sei, weil, wenn z. B. $\lambda=\frac{1}{n}$ gesetzt wird, welches, für $n=\infty$, Null wäre, der Factor $k-n\lambda$ nicht k, sondern $k-1$ ist. Aber es hindert nichts, statt $\lambda=\frac{1}{n}$, auch z. B. $\lambda=\frac{1}{n^2}$, oder $\lambda=\frac{1}{n^m}$ zu setzen, wo $m>1$ ist. Alsdann ist immer $k-n\lambda=k$, für $n=\infty$. Die Reihe (15. oder 16.) gehet also, für $\lambda=0$, zusammengenommen in folgende über:

$$27.\quad f(z+k)=fz+k\frac{\partial fz}{\partial z}+\frac{k^2}{2}.\frac{\partial^2 fz}{\partial z^2}+\frac{k^3}{2.3}.\frac{\partial^3 fz}{\partial z^3}\ldots.+\frac{k^n}{2.3\ldots.n}.\frac{\partial^n fz}{\partial z^n}+R.$$

Da nach der oben erwähnten Abhandlung (§. 6. X.) der Coefficient $\frac{k^n}{2.3\ldots.n}$, $n$mal genommen, für $n=\infty$, immer Null ist, so lange k endlich ist, so convergirt die Reihe immer, so lange $\frac{\partial^n fz}{\partial z^n}$ nicht unendlich grofs ist. Man kann also demnach, unter dieser Bedingung, den Werth von fz für jeden beliebigen Werth $z+k$ von z berechnen, und sich folglich der Reihe als Interpolations-Formel bedienen.

Die Reihe ist, wie man siehet, die sogenannte Taylorsche, die man also auf diese Weise aus den eigentlich noch allgemeineren Reihen (15. oder 16.) ohne alle jene Schwierigkeiten findet, die sonst gewöhn-

lich mit der Entwicklung des sogenannten Taylorschen Lehrsatzes verbunden sind *).

III. Interpolations-Formel für fz, wenn nicht f, sondern nur einzelne Werthe von fz, für ungleich von einander verschiedene z gegeben sind.

5.

Man setze

$$28.\quad fz = y,$$

und bezeichne die zu den Werthen

$$z_1,\ z_2,\ z_3 \ldots . z_n \text{ von } z$$

gehörigen und gegebenen Werthe von $fz = y$ durch

$$y_1,\ y_2,\ y_3 \ldots . y_n,$$

so kommt es darauf an, eine Function von z aufzustellen, welche die Eigenschaft hat, dafs sie $y_1,\ y_2,\ y_3 \ldots . y_n$ giebt, wenn man z gleich $z_1,\ z_2,\ z_3 \ldots . z_n$ setzt. Aufserdem ist für diese Function keine Bedingung vorhanden, und ihre Form ist ganz willkürlich. Wenn die Function aufgestellt ist, so läfst man sie für jeden beliebigen Werth von z gelten, und kann also dadurch Werthe von fz zwischen $y_1,\ y_2,\ y_3 \ldots . y_n$ einschalten.

6.

Da die einfachste Functions-Form die rationale ist, so kann man z. B setzen:

$$29.\quad y = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots . + \alpha_{n-1} z^{n-1},$$

wo $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots . \alpha_{n-1}$, n unbestimmte Coefficienten sind, die sich

---

*) Anmerkung des Herausgebers. Die obigen Resultate stimmen mit denjenigen überein, die der Herausgeber in seiner Schrift: „Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten, Berlin bei Reimer, 1823," und zwar seines Wissens zuerst mittheilte, und worauf er seine Theorie der Facultäten, desgleichen z. B. den ersten, wirklich strengen Beweis des binomischen Lehrsatzes gründete, der sich auch, noch weiter vereinfacht, in seinem Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Berlin bei Reimer 1825, (§. 223.) findet. Die obige Entwickelung ist aber allerdings noch einfacher und besser, auch ist die Bemerkung wegen der Convergenz der Reihe hinzugekommen. Der Herausgeber hat die Ausdrücke (15. oder 16.) allgemeinen Taylorschen Lehrsatz genannt. Der Ausdruck ist für die ganze Analysis ungemein wichtig. Es beruhen darauf die meisten Entwickelungen derselben, und er ist der wahre Fundamental-Satz der gesammten sogenannten Differential-Rechnung, die also auf die obige einfache und elementare Weise begründet werden kann.

alle finden lassen, weil nach der Voraussetzung n verschiedene Werthe von y gegeben werden, nemlich aus den n Gleichungen:

$$30.\quad \begin{cases} y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_1^2 + \alpha_3 z_1^3 + \ldots + \alpha_{n-1} z_1^{n-1}, \\ y_2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_2 + \alpha_2 z_2^2 + \alpha_3 z_2^3 + \ldots + \alpha_{n-1} z_2^{n-1}, \\ y_3 = \alpha_0 + \alpha_1 z_3 + \alpha_2 z_3^2 + \alpha_3 z_3^3 + \ldots + \alpha_{n-1} z_3^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \alpha_0 + \alpha_1 z_n + \alpha_2 z_n^2 + \alpha_3 z_n^3 + \ldots + \alpha_{n-1} z_n^{n-1}. \end{cases}$$

7.

Die zur Entwicklung der n Coefficienten α_0, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ nöthige Elimination ist aber sehr weitläufig, und zwar deshalb, weil sämmtliche Gleichungen die volle Zahl von Gliedern haben. Man erleichtert die Rechnung schon um etwas, wenn man den vorausgesetzten Ausdrücken eine andere Form giebt, in welcher die Zahl der Glieder in den verschiedenen Gleichungen, der Reihe nach, abnimmt, nemlich, wenn man z. B., statt wie in (29.), wie folgt, setzt:

$$31.\quad y = \beta_0 + \beta_1(z-z_1) + \beta_2(z-z_1)(z-z_2) + \beta_3(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots. \\ \ldots. + \beta_{n-1}(z-z_1)(z-z_2)\ldots.(z-z_n).$$

Alsdann sind die n Gleichungen, aus welchen die n unbestimmten Coefficienten zu suchen sind, folgende, nemlich für $z = z_1,\ z_2,\ z_3 \ldots. z_n$:

$$32.\quad \begin{cases} y_1 = \beta_0, \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1(z_2-z_1), \\ y_3 = \beta_0 + \beta_1(z_3-z_1) + \beta_2(z_3-z_1)(z_3-z_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1(z_n-z_1) + \beta_2(z_n-z_1)(z_n-z_2) + \beta_3(z_n-z_1)(z_n-z_2)(z_n-z_3)\ldots. \\ \qquad \ldots. + \beta_{n-1}(z_n-z_1)(z_n-z_2)\ldots.(z_n-z_{n-1}). \end{cases}$$

Die Elimination zwischen diesen Gleichungen ist, weil sie wenigstens zum Theil weniger Glieder haben, als die Gleichungen (30.), schon leichter.

8.

Das Verfahren (7.) bringt nun aber natürlich auf den Gedanken, die Zahl der Glieder noch mehr zu vermindern, und durch dasselbe Mittel, durch welches die Glieder in (7.) theilweise weggeschafft wurden, zu machen, dafs die Ausdrücke von y_1, $y_2 \ldots y_n$ sämmtlich nur ein einziges Glied behalten. Dieses geschiehet offenbar, wenn man setzt:

$$33.\quad \begin{aligned} y = {} & \gamma_0(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)\ldots.(z-z_n) \\ & + \gamma_1(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)\ldots.(z-z_n) \\ & + \gamma_2(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)(z-z_5)\ldots.(z-z_n) \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + \gamma_{n-1}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)\ldots.(z-z_{n-1}), \end{aligned}$$

so dafs jedes Glied sämmtliche Factoren

$$z-z_1,\ z-z_2,\ z-z_3\ldots.\ z-z_n$$

hat, bis auf einen, und zwar so, dafs in jedem Gliede ein anderer Factor fehlt.

Alsdann sind die n Gleichungen, aus welchen die n unbestimmten Coefficienten $\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2\ldots.\gamma_{n-1}$ gesucht werden müssen, folgende:

$$34.\quad \begin{cases} y_1 = \gamma_0(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)(z_1-z_5)\ldots.(z_1-z_n), \\ y_2 = \gamma_1(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)(z_2-z_5)\ldots.(z_2-z_n), \\ y_3 = \gamma_2(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)(z_3-z_5)\ldots.(z_3-z_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = \gamma_{n-1}(z_n-z_1)(z_n-z_2)(z_n-z_3)(z_n-z_4)\ldots.(z_n-z_{n-1}), \end{cases}$$

woraus man unmittelbar und ohne weitere Eliminations-Rechnung $\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2\ldots.\gamma_n$, und wenn man die Ausdrücke davon in (33.) setzt,

$$35.\quad \begin{aligned} y = {} & \frac{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)\ldots.(z-z_n)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)\ldots.(z_1-z_n)}\,y_1 \\ & + \frac{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)\ldots.(z-z_n)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)\ldots.(z_2-z_n)}\,y_2 \\ & + \frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)\ldots.(z-z_n)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)\ldots.(z_3-z_n)}\,y_3 \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + \frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots.(z-z_{n-1})}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)(z_n-z_3)\ldots.(z_n-z_{n-1})}\,y_n \end{aligned}$$

findet, welches auch, wie leicht zu sehen, $y = y_1,\ y_2,\ y_3\ldots.y_n$ giebt, für $z = z_1,\ z_2,\ z_3\ldots.z_n$; wie es verlangt wurde.

Der Ausdruck (35.) ist die bekannte Lagrangische Interpolations-Formel, die man auf die Art, wie in dem gegenwärtigen Paragraph, sehr leicht findet. Sie dient zum Einschalten, wenn man z einen beliebigen Werth, der weder z_1, noch z_2, noch z_3 u s. w. ist, beilegt.

9.

Zu bemerken ist, dafs die drei Voraussetzungen (29., 31. und 33.) nothwendig ein und dasselbe Resultat geben müssen, denn weil in allen

dreien z sowohl als die besonderen Werthe z_1, $z_2 \ldots . z_n$ von z sämmtlich auf gleich hohe Potenzen, nemlich auf die $n-1$ste Potenz steigen, so mufs man am Ende immer den Ausdruck (35.) finden, man mag für y die Form (29.), oder die Formen (31. oder 33.) voraussetzen.

Diese Bemerkung wird man öfters benutzen können, um eine beschwerliche Elimination zu ersparen. Gesetzt nemlich, es wären die n Gleichungen (30.), zur Bestimmung der n Coefficienten α_0, α_1, $\alpha_2 \ldots . \alpha_n$ in der Gleichung (29.) gegeben, wo n selbst unendlich grofs sein kann, so braucht man gar nicht zu eliminiren, sondern darf nur statt der Gleichung (29.) die Gleichung (33.) voraussetzen. Aus dieser findet sich, wie oben, ohne Rechnung, dafs das Resultat der Elimination die Gleichung (35.) ist.

10.

Als Beweis, wie vorsichtig man übrigens mit Interpolations-Formeln sein mufs, kann folgende Anwendung der Bemerkung in (§. 9.) dienen.

Man setze

$$36.\quad \cos z = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 \ldots . + \alpha_n z_n + R_1 \text{ und}$$

$$37.\quad \frac{\sin z}{z} = 1 + \beta_1 z + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 \ldots . + \beta_n z_n + R_2.$$

Dieses giebt, der Reihe nach, für

$$38.\quad z = 0,\ +\tfrac{1}{2}\pi,\ -\tfrac{1}{2}\pi,\ +\tfrac{3}{2}\pi,\ -\tfrac{3}{2}\pi,\ +\tfrac{5}{2}\pi,\ -\tfrac{5}{2}\pi \text{ etc., und}$$

$$39.\quad z = 0,\ +\pi,\ -\pi,\ +2\pi,\ -2\pi,\ +3\pi,\ -3\pi \text{ etc.}$$

$$40.\quad \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = 1 + \alpha_1(\frac{1}{2}\pi) + \alpha_2(\frac{1}{2}\pi)^2 + \alpha_3(\frac{1}{2}\pi)^3 + \alpha_4(\frac{1}{2}\pi)^4 \ldots . \\ 0 = 1 - \alpha_1(\frac{1}{2}\pi) + \alpha_2(\frac{1}{2}\pi)^2 - \alpha_3(\frac{1}{2}\pi)^3 + \alpha_4(\frac{1}{2}\pi)^4 \ldots . \\ 0 = 1 + \alpha_1(\frac{3}{2}\pi) + \alpha_2(\frac{3}{2}\pi)^2 + \alpha_3(\frac{3}{2}\pi)^3 + \alpha_4(\frac{3}{2}\pi)^4 \ldots . \\ 0 = 1 - \alpha_1(\frac{3}{2}\pi) + \alpha_2(\frac{3}{2}\pi)^2 - \alpha_3(\frac{3}{2}\pi)^3 + \alpha_4(\frac{3}{2}\pi)^4 \ldots . \\ \ldots\ldots\ldots\

Vergleicht man die Gleichungen (36. und 40.) und (37. und 41.) mit den Gleichungen (29 und 30.), so ist für die ersteren:

$$42.\quad \begin{cases} y = \cos z,\ y_1 = 1,\ y_2 = y_3 = y_4 \ldots\ldots = y_n = 0, \\ z_1 = 0,\ z_2 = +\frac{1}{2}\pi,\ z_3 = -\frac{1}{2}\pi,\ z_4 = +\frac{3}{2}\pi,\ z_5 = -\frac{3}{2}\pi \text{ etc.}, \end{cases}$$

und für die anderen:

$$43.\quad \begin{cases} y = \frac{\sin z}{z},\ y_1 = 1,\ y_2 = y_3 = y_4 \ldots\ldots = y_n = 0, \\ z_1 = 0,\ z_2 = +\pi,\ z_3 = -\pi,\ z_4 = +2\pi,\ z_5 = -2\pi \text{ etc.} \end{cases}$$

Also findet man, vermöge der Gleichung (35.), welche, wie in (§. 9.) bemerkt, das Resultat der Verbindung der Gleichungen (29. und 30.) ist:

$$\cos z = \frac{(z-\frac{1}{2}\pi)(z+\frac{1}{2}\pi)(z-\frac{3}{2}\pi)(z+\frac{3}{2}\pi)(z-\frac{5}{2}\pi)(z+\frac{5}{2}\pi)\ldots\ldots}{-\frac{1}{2}\pi.+\frac{1}{2}\pi.-\frac{3}{2}\pi.+\frac{3}{2}\pi.-\frac{5}{2}\pi.+\frac{5}{2}\pi\ldots\ldots} \text{ und}$$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{(z-\pi)(z+\pi)(z-2\pi)(z+2\pi)(z-3\pi)(z+3\pi)\ldots\ldots}{-\pi.+\pi.-2\pi.+2\pi.-3\pi.+3\pi\ldots\ldots},$$

oder:

$$44.\quad \cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\ldots\ldots \text{ und}$$

$$45.\quad \sin z = \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

Diese Ausdrücke sind, wie bekannt, ganz richtig. Aber es ist gänzlich Zufall, dafs sie es sind. Denn aus den einzelnen Werthen 1, 0, 0, 0 etc. von $\cos z$ und $\frac{\sin z}{z}$ für $z = 0,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\ldots\ldots$ und $z = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi\ldots\ldots$ können $\cos z$ und $\sin z$, wie es vermittelst der Interpolations-Formel geschehen, keinesweges gefunden werden, weil durch die nemlichen, den Abscissen 1 und 0 und den Ordinaten 0 und 0 zugehörigen Puncte, durch welche ein Kreis gehet, auch noch unzählige andere Curven von der nemlichen Bogen-Länge gehen können, zu deren einzelnen beliebigen Bogen dann aber offenbar noch andere Abscissen und Ordinaten, als $\cos z$ und $\sin z$ sind, gehören können. Die Ausdrücke (44. und 45.) müssen vielmehr aus den Ausdrücken des Cosinus und Sinus durch Exponential-Gröfsen und durch Zerlegung dieser Ausdrücke in Factoren nach den Eigenschaften der Gleichungen mit zwei Gliedern gefunden werden. Die nemliche Anwendung, die hier von der Interpolations-Formel auf den Kreis gemacht worden, würde auch auf die Ellipse, die Cycloïde, und jede andere geschlossene Linie passen, für welche alle zugleich doch die Ausdrücke (44. und 45.) keinesweges gelten. Die willkürlichen Interpolations-Formeln müssen also mit Vorsicht gebraucht werden, be-

sonders wenn die einzelnen Werthe der veränderlichen Gröfse, von welcher eine unbekannte Function interpolirt werden soll, zu weit von einander entfernt sind, wie es in dem Beispiele vom Kreise der Fall war. Auch dürfen die interpolirten Glieder nicht leicht aufserhalb der Grenzen der gegebenen Gröfsen, sondern sie müssen innerhalb dieser Grenzen liegen.

11.

In dem Falle, wenn die Werthe $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_n$ von z, für welche die Werthe von $y = fz$ gegeben sind, der Reihe nach gleich viel von einander abweichen, giebt die allgemeine Interpolations-Formel (35.) Folgendes:

Man setze

$$45'. \quad \begin{cases} z_1 = z - k, \\ z_2 = z - k - \lambda, \\ z_3 = z - k - 2\lambda, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = z - k - (n-1)\lambda, \end{cases}$$

so dafs

$$\begin{aligned} y_1 &= fz_1 = f(z-k), \\ y_2 &= fz_2 = f(z-k-\lambda), \\ y_3 &= fz_3 = f(z-k-2\lambda), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= fz_n = f(z-k-(n-1)\lambda), \end{aligned}$$

so ist, vermöge (35.):

$$\begin{aligned} 46. \quad y = {} & \frac{(\lambda+k)(2\lambda+k)(3\lambda+k)\ldots\ldots[(n-1)\lambda+k]}{\lambda.2\lambda.3\lambda\ldots\ldots(n-1)\lambda} f(z-k) \\ & + \frac{k(2\lambda+k)(3\lambda+k)(4\lambda+k)\ldots\ldots[(n-1)\lambda+k]}{-\lambda.\lambda.2\lambda.3\lambda\ldots\ldots(n-2)\lambda} f(z-k-\lambda) \\ & + \frac{k(\lambda+k)(3\lambda+k)(4\lambda+k)\ldots\ldots[(n-1)\lambda+k]}{-2\lambda.-\lambda.\lambda.2\lambda.3\lambda\ldots\ldots(n-3)\lambda} f(z-k-2\lambda) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm \frac{k(\lambda+k)(2\lambda+k)(3\lambda+k)\ldots\ldots[(n-2)\lambda+k]}{(n-1)\lambda(n-2)\lambda(n-3)\lambda\ldots\ldots\lambda} f(z-k-(n-1)\lambda), \end{aligned}$$

oder:

$$y = fz = \frac{k(k+\lambda)(k+2\lambda)(k+3\lambda)\ldots\ldots[k+(n-1)\lambda]}{\lambda\,.\,2\lambda\,.\,3\lambda\,.\,4\lambda\ldots\ldots(n-1)\lambda}$$
$$\times\Big[\frac{1}{k}f(z-k)$$
$$-\frac{(n-1)\lambda}{\lambda(k+\lambda)}f(z-k-\lambda)$$
$$+\frac{(n-1)\lambda(n-2)\lambda}{2\lambda\,.\,\lambda(k+2\lambda)}f(z-k-2\lambda)$$
$$-\frac{(n-1)\lambda(n-2)\lambda\,.\,(n-3)\lambda}{3\lambda\,.\,2\lambda\,.\,\lambda(k+3\lambda)}f(z-k-3\lambda)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm\frac{(n-1)\lambda(n-2)\lambda\ldots\ldots\lambda}{(n-1)\lambda(n-2)\lambda\ldots\ldots\lambda[k+(n-1)\lambda]}f(z-k-(n-1)\lambda)\Big],$$

oder, wenn man $(z+k)$ statt z schreibt,

47. $$f(z+k) = \frac{k\,.\,(k+\lambda)(k+2\lambda)(k+3\lambda)\ldots\ldots k+(n-1)\lambda}{\lambda\,.\,2\lambda\,.\,3\lambda\,.\,4\lambda\ldots\ldots(n-1)\lambda}$$
$$\times\Big[\frac{1}{k}fz$$
$$-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{1}{k+\lambda}f(z-\lambda)$$
$$+\frac{n-1\,.\,n-2}{2}\cdot\frac{1}{k+2\lambda}f(z-2\lambda)$$
$$-\frac{n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{2\,.\,3}\cdot\frac{1}{k+3\lambda}f(z-3\lambda)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm\frac{1}{k+(n-1)\lambda}f(z-(n-1)\lambda)\Big],$$

oder auch, wenn man $-k$ statt $+k$ schreibt,

48. $$f(z-k) = \frac{(\lambda-k)(2\lambda-k)(3\lambda-k)\ldots\ldots[(n-1)\lambda-k]}{\lambda\,.\,2\lambda\,.\,3\lambda\ldots\ldots(n-1)\lambda}$$
$$\times\Big[fz$$
$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{k}{\lambda-k}f(z-\lambda)$$
$$-\frac{n-1\,.\,n-2}{2}\cdot\frac{k}{2\lambda-k}f(z-2\lambda)$$
$$+\frac{n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{2\,.\,3}\cdot\frac{k}{3\lambda-k}f(z-3\lambda)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mp\frac{k}{(n-1)\lambda-k}f(z-(n-1)\lambda)\Big],$$

und, wenn man in (47.) $-\lambda$ statt $+\lambda$ schreibt,

$$49.\quad f(z+k) = \pm \frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)(k-3\lambda)\ldots.[k-(n-1)\lambda]}{\lambda.2\lambda.3\lambda\ldots.(n-1)\lambda}$$
$$\times \Big[\frac{1}{k} fz$$
$$- \frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{k-\lambda} f(z+\lambda)$$
$$+ \frac{n-1.n-2}{2}\cdot\frac{1}{k-2\lambda} f(z+2\lambda)$$
$$- \frac{n-1.n-2.n-3}{2.3}\cdot\frac{1}{k-3\lambda} f(z+3\lambda)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm \frac{1}{k-(n-1)\lambda} f(z+(n-1)\lambda)\Big],$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn n gerade, die unteren, wenn n ungerade ist.

Dieses ist die zweite am Schlusse von (3.) erwähnte Interpolations-Formel für den Fall, dafs fz für n gleich weit von einander entfernte Werthe von z gegeben ist. Sie ist nur für ein endliches n brauchbar, und nur füglich dann, wenn in (49.) $z+k$ zwischen z und $z-(n-1)\lambda$, oder k zwischen 0 und $(n-1)\lambda$ liegt.

Anwendung der Interpolations-Formeln auf die Auflösung der algebraischen Gleichungen von beliebigen Graden.

12.

Es sei die algebraische Gleichung

$$50.\quad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} \ldots + a_m = 0,$$

näherungsweise in Zahlen aufzulösen.

Unter den verschiedenen Auflösungs-Verfahren ist das von Budan eines der einfachsten und vielleicht am wenigsten mühsam. Vorzüglich ist es geeignet, einer Wurzel erst einigermafsen nahe zu kommen. Will man aber die Wurzel schärfer und auf mehrere Decimalstellen berechnen, so erfordert es in den meisten Fällen dennoch viel Rechnungen. Man wird sich in solchen Fällen zuweilen folgendes Verfahrens, welches eine Interpolations-Formel, z. B. die Lagrangische (35.), zu Hülfe nimmt, mit Vortheil bedienen können.

Man setze nemlich:

$$51.\quad y^m + a_1 y^{m-1} + a_2 y^{m-2} \ldots + a_m = z,$$

und suche vermittelst des Budanschen, oder auch eines anderen Näherungs-Verfahrens, einige Werthe y, y_2, y_3 .... y_n von y, welche Werthen z_1, z_2, z_3....z_n von z zugehören, die wenig von Null verschieden sind, und *entgegengesetzte* Zeichen haben. Etwa mufs, wo möglich, die Hälfte davon das Zeichen +, die andere Hälfte das Zeichen — haben. Alsdann drücke man vermittelst irgend einer Interpolations-Formel, z. B. vermittelst der Lagrangischen Formel (35.), einen beliebigen Werth von y, von welchem nun vorausgesetzt wird, dafs er zu einem beliebigen Werth von z gehöre, aus, also z. B. wie folgt:

$$52.\quad y = \frac{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)\ldots.(z-z_n)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)\ldots.(z_1-z_n)}y_1$$
$$+\frac{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)\ldots.(z-z_n)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)\ldots.(z_2-z_n)}y_2$$
$$+\frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)\ldots.(z-z_n)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)\ldots.(z_3-z_n)}y_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots.(z-z_{n-1})}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)(z_n-z_3)\ldots.(z_n-z_{n-1})}y_n.$$

Setzt man in diesem Ausdruck $z=0$, so ist, vermöge der Gleichung (51.), y offenbar eine der Wurzeln der aufzulösenden Gleichung (50.). Also kann man annehmen

$$\pm x = \frac{z_2 z_3 z_4 \ldots. z_n}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\ldots.(z_1-z_n)}y_1 + \frac{z_1 z_3 z_4 \ldots. z_n}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\ldots.(z_2-z_n)}y_2 \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{z_1 z_2 z_3 \ldots. z_{n-1}}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)\ldots.(z_n-z_{n-1})}y_n,$$

oder auch

$$53.\quad \pm x = z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots. z_n \left[\frac{y_1}{z_1(z_1-z_2)(z_1-z_3)\ldots.(z_1-z_n)}\right.$$
$$\left. + \frac{y_2}{z_2(z_2-z_1)(z_2-z_3)\ldots.(z_2-z_n)} \ldots. + \frac{y_n}{z_n(z_n-z_1)(z_n-z_2)\ldots.(z_n-z_{n-1})}\right].$$

Das obere Zeichen gilt, wenn n gerade, das untere, wenn n ungerade ist.

Von der Nähehung, die dieses Verfahren zu gewähren vermag, kann man sich auf folgende Art einen Begriff machen.

Man stelle sich nemlich eine Curve vor, deren Abscissen y, und deren rechtwinklige Ordinaten z sind, und die also gleichsam das Bild der Gleichung (51.) ist. Die Abscissen y, für welche die Ordinaten Null sind, oder für welche die Curve die Abscissen-Axe schneidet, sind offenbar die Wurzeln x der aufzulösenden Gleichung (50.). Nun sind

nach der Voraussetzung zur Vorbereitung einige Abscissen y_1, y_2, y_3.... ....y_n gefunden, deren Ordinaten z_1, z_2, z_3....z_n entgegengesetzte Zeichen haben, und wenig von Null verschieden sind. Es sind also n Puncte eines kurzen Stückes der durch die Gleichung (51.) vorgestellten Curve gefunden worden, welches die Axe nothwendig schneidet, und zwar in dem Puncte, dessen Abscisse x ist. Die Anwendung der Interpolations-Formel aber ist nichts Anderes, als dafs man durch die nemlichen n Puncte eine andere beliebige Curve legt. Diese Curve mufs also die Axe nothwendig ebenfalls schneiden, und je mehr Puncte die willkürliche Curve mit der durch die Gleichung (50.) vorgestellten Curve gemein hat, und je kleiner die Ordinaten sind, um so näher werden, weil die Curven stetig sind, einander die Puncte liegen, in welchen die beiden Curven der Axe begegnen, das heifst, um so näher wird das x, welches die Gleichung (53.) giebt, der gesuchten Wurzel der aufzulösenden Gleichung (49.) kommen.

Will man die Näherung weiter treiben, so berechne man zuerst, indem man das durch die Gleichung (52.) gefundene x für ein y der Gleichung (50.), oder für eine Abscisse der durch die aufzulösende Gleichung vorgestellten Curve nimmt, das zugehörige z, oder die zugehörige Ordinate dieser Curve. Dieses z reihe man an seine Stelle unter die anderen berechneten Ordinaten z_1, z_2.... z_n ein, so das nunmehr $n+1$ Werthe von z mit den zugehörigen y bekannt sind. Alsdann bediene man sich der nunmehr ein Glied mehr enthaltenden Gleichung (53.) von Neuem. Da das zuerst gefundene x schon einer Wurzel der aufzulösenden Gleichung nahe kam, so wird der dazu gehörige Punct der, die gegebene Gleichung vorstellenden Curve dem Durchschnittspunct dieser Curve mit der Axe schon sehr nahe liegen, also wird der Durchschnittspunct der neuen Curve, welche durch die gefundenen $n+1$ Puncte gehet, mit der Axe, dem Durchschnittspunct der, die gegebene Gleichung vorstellenden Curve, und der Axe, um so mehr nahe kommen, folglich wird das x, welches die abermalige Anwendung der Formel (53.) giebt, die gesuchte Wurzel der Gleichung wiederum schärfer ausdrücken. Durch Wiederholung des Verfahrens kann man auf diese Weise die Näherung immer weiter treiben.

17.
Drei mechanische und hydrodynamische Aufgaben nebst Auflösung.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Lehmus*.)

I.

Die anfängliche Geschwindigkeit einer Geschützkugel kann dadurch bestimmt werden, dafs man einem Cylinder-Mantel von einer leicht durchdringlichen Materie, etwa von Papier, eine gleichförmige drehende Bewegung um seine lothrechte Axe mittheilt, und dann die Kugel, horizontal, in der Richtung des Durchmessers, durch den Cylinder schiefst. Aus der Geschwindigkeit des Cylinder-Mantels, dem Halbmesser desselben, und dem Winkel, den diese Halbmesser durch die Mittelpuncte der Oeffnungen, welche die Kugel in dem Cylinder-Mantel bildet, einschliefsen, bestimmt sich dann die Geschwindigkeit der Kugel sehr leicht, wenn man die Bewegung derselben durch den Cylinder als eine gleichförmige betrachtet. Wenn nun die Kugel als ein Punct p (Fig. 1.) angesehen wird, so soll die Curve bestimmt werden, welche der sich geradlinig bewegende Punct p innerhalb des Cylinder-Mantels beschreibt.

Es sei die Geschwindigkeit des sich gleichförmig bewegenden Punctes $p = c$; die des Cylinder-Mantels $= v$; der Halbmesser desselben $= r$; A der Punct im Cylinder-Mantel, durch welchen p nach der Richtung des Durchmessers AMB in den Cylinder eingeht; M der Mittelpunct dieses horizontalen Querschnitts, C der Punct im Mantel, welcher dann in A ist, wenn p in D sich befindet, also, wenn MC gezogen und aus M mit MD der Bogen DE beschrieben wird, E der Punct, welchen p trifft, in dem Augenblick, in welchem p den Weg AD zurückgelegt hat, so ist E ein Punct der verlangten Curve. Fället man nun EF normal auf AB, setzt die Abscisse $AF = x$, die Ordinate $FE = y$, den Bogen $CA = r\alpha$; so hat man $AD : AC$ oder $AD : r\alpha = c : v$; also $AD = \frac{rc}{v}\alpha$;

folglich $MD = ME = r - \frac{rc}{v}\alpha = r\left(1 - \frac{c}{v}\alpha\right)$; also

$$\text{I.} \quad x = r - r\left(1 - \frac{c}{v}\alpha\right)\cos\alpha, \text{ und}$$

$$\text{II.} \quad y = r\left(1 - \frac{c}{v}\alpha\right)\sin\alpha.$$

Aus beiden Gleichungen folgt, weil $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{r-x}$ ist, auch

$$\text{III.} \quad (r-x)^2 + y^2 = r^2.\left(1 - \frac{c}{v}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{r-x}\right)^2.$$

Ist nun noch G der Ausgangspunct, so hat man sowohl für A als für G: $(r-x)^2 + y^2 = r^2$; also $r^2 = r^2\left(1 - \frac{c}{v}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{r-x}\right)^2$, folglich

$$1 - \frac{c}{v}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{r-x} \text{ oder } 1 - \frac{c}{v}\alpha = \pm 1,$$

wo das obere Zeichen für A, das untere für G zu nehmen ist. Für G entsteht daher $\alpha = \frac{2v}{c}$; folglich die zugehörige Abscisse $AH = r + r\cos\frac{2v}{c}$ und die Ordinate $= -r\sin\frac{2v}{c}$ oder $HG = r\sin\frac{2v}{c}$.

Soll G mit A zusammenfallen, d. h., soll die Kugel zu demselben Loch ausgehen, durch welches sie einging, so mufs $r + r\cos\frac{2v}{c} = 0$ und auch $r\sin\frac{2v}{c} = 0$ sein, woraus $\frac{2v}{c} = \pi$ folgt, welches Resultat auch leicht unmittelbar zu erkennen ist.

II.

Ein Gefäfs voll Wasser ist auf die Tiefe h (Fig. 2.) prismatisch vom Querschnitt A, und hat im horizontalen Boden eine Oeffnung $= a$. In diesem Boden befindet sich eine zweite horizontale Oeffnung vom Querschnitt B, und unterhalb derselben ist das Gefäfs vertieft und hat in der Tiefe b, unter B, also in der Tiefe $h+b=H$, unter dem Wasserspiegel, eine zweite Ausflufsöffnung vom Querschnitt e. Es soll die Zeit T bestimmt werden, in welcher sich, wenn kein Zuflufs statt findet, der Wasserspiegel um die Tiefe h senkt.

Senkt sich in der Zeit $t = \varphi x$ der Wasserspiegel zur Tiefe x, so fliefst in der Zeit $\varphi(x+k) - \varphi x$ die Wassermenge Ak durch die beiden Oeffnungen a und e ab, durch die erste mit der mittleren Geschwindigkeit

$2\sqrt{[g(h-x-k')]}$, durch die zweite mit der mittleren Geschwindigkeit $2\sqrt{[g(H-x-k'')]}$, in welchen Ausdrücken g die Beschleunigung der Schwere, und k' sowohl wie k'' eine zwischen 0 und k fallende Linie bezeichnet. Wird daher $2\sqrt{g}$ durch α ausgedrückt, so hat man die Gleichung:

$$A.k = [a.\alpha\sqrt{(h-x-k')} + e\alpha\sqrt{(H-x-k'')}][\varphi(x+k)-\varphi x],$$

und hieraus, wenn $\varphi(x+k)$ nach der Taylorschen Reihe entwickelt, dann mit k dividirt, und endlich k, also auch k' und k'' gleich Null gesetzt wird:

$$A = \alpha[a\sqrt{(h-x)} + e\sqrt{(H-x)}].\varphi' x; \text{ folglich}$$

$$t = \varphi x = \int \frac{A}{\alpha[a\sqrt{(h-x)}+e\sqrt{(H-x)}]} = \frac{A}{\alpha}\int \frac{\partial x}{a\sqrt{(h-x)}+e\sqrt{(H-x)}}.$$

Ist nun 1stens $e = a$, so wird

$$t = \frac{A}{\alpha a}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(H-x)}+\sqrt{(h-x)}} = \frac{A}{\alpha a b}\int [\sqrt{(H-x)} - \sqrt{(h-x)}]\,\partial x$$

$$= -\frac{2A}{3\alpha ab}\left[(H-x)^{\frac{3}{2}} - (h-x)^{\frac{3}{2}}\right] + C = \frac{2A}{3\alpha ab}.\left[H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} - (H-x)^{\frac{3}{2}} + (h-x)^{\frac{3}{2}}\right];$$

und demnach

$$T = \frac{2A}{3\alpha ab}\left[(h+b)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right].$$

Ist aber 2tens $a > e$, so hat man

$$t = \frac{A}{\alpha}\int \frac{[a\sqrt{(h-x)} - e\sqrt{(H-x)}]\,\partial x}{a^2 h - e^2 H - (a^2-e^2)x}; \text{ also, } \frac{a^2h-e^2H}{a^2-e^2} \text{ durch } c \text{ bezeichnet}$$

$$t = \frac{A}{\alpha(a^2-e^2)}\int \frac{a\sqrt{(h-x)} - e\sqrt{(H-x)}}{c-x}.\,\partial x; \text{ oder, } c-x = y \text{ gesetzt,}$$

$$t = \frac{-A}{\alpha(a^2-e^2)}\int \frac{a\sqrt{(h-c+y)} - e\sqrt{(H-c+y)}}{y}.\,\partial y$$

$$= \frac{A}{\alpha(a^2-e^2)}\left[e\int \frac{\sqrt{\left(\frac{a^2 b}{a^2-e^2}+y\right)}}{y}\partial y - a\int \frac{\sqrt{\left(\frac{e^2 b}{a^2-e^2}+y\right)}}{y}\partial y\right].$$

Es ist aber $\int \frac{\sqrt{(n+y)}}{y}\partial y$ (Lehmus Analysis, 1827, pag. 117.)

$$= 2\sqrt{(n+y)} - n.\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{2n+y+2\sqrt{n}.\sqrt{(n+y)}}{y};$$

also, $\frac{b}{a^2-e^2}$ durch m bezeichnet,

$$\int \frac{\sqrt{(ma^2+y)}}{y}\partial y = 2\sqrt{(ma^2+y)} - a\sqrt{m}.\ln\frac{2ma^2+y+2a\sqrt{m}.\sqrt{(ma^2+y)}}{y}$$

und eben so

$$\int \frac{\sqrt{(me^2+y)}}{y}\partial y = 2\sqrt{(me^2+y)} - e\sqrt{m}\ \ln\frac{2me^2+y+2e\sqrt{m}.\sqrt{(me^2+y)}}{y},$$

folglich

$$t = \frac{Am}{ab}\Big[2e\sqrt{(ma^2+y)} - ae\sqrt{m}\ln\frac{2ma^2+y+2a\sqrt{m}.\sqrt{(ma^2+y)}}{y}$$
$$-2a\sqrt{(me^2+y)} + ae\sqrt{m}\ln\frac{2me^2+y+2e\sqrt{m}.\sqrt{(me^2+y)}}{y}\Big] + C$$
$$= \frac{Am}{ab}\Big[2e\sqrt{(ma^2+y)} - 2a\sqrt{(me^2+y)}$$
$$+ ae\sqrt{m}\ln\frac{2me^2+y+2e\sqrt{m}.\sqrt{(me^2+y)}}{2ma^2+y+2a\sqrt{m}.\sqrt{(ma^2+y)}}\Big] + C,$$

oder, die Werthe für c, m, y substituirt und a^2-e^2 durch d^2 bezeichnet:

$$t = \frac{A}{ad^2}\Big[2e\sqrt{(H-x)} - 2a\sqrt{(h-x)} + \frac{ae\sqrt{b}}{d}\ln\frac{[d\sqrt{(h-x)}+e\sqrt{b}]^2}{[d\sqrt{(H-x)}+a\sqrt{b}]^2}\Big] + C$$
$$= \frac{2A}{ad^2}\Big[e\sqrt{(H-x)} - a\sqrt{(h-x)} + \frac{ae\sqrt{b}}{d}\ln\frac{d\sqrt{(h-x)}+e\sqrt{b}}{d\sqrt{(H-x)}+a\sqrt{b}}\Big] + C.$$

Für $x=0$ ist auch $t=0$, und hieraus ergiebt sich

$$C = -\frac{2A}{ad^2}\Big[e\sqrt{H} - a\sqrt{h} + \frac{ae\sqrt{b}}{d}\ln\frac{d\sqrt{h}+e\sqrt{b}}{d\sqrt{H}+a\sqrt{b}}\Big],$$

folglich ist vollständig:

$$t = \frac{2A}{ad^2}\Big[a[\sqrt{h}-\sqrt{(h-x)} - e[\sqrt{H}-\sqrt{(H-x)}]$$
$$+ \frac{ae\sqrt{b}}{d}\ln\frac{[d\sqrt{(h-x)}+e\sqrt{b}]\,[d\sqrt{H}+a\sqrt{b}]}{[d\sqrt{(H-x)}+a\sqrt{b}]\,[d\sqrt{h}+e\sqrt{b}]}\Big],$$

und hieraus, h für x gesetzt,

$$T = \frac{2A}{ad^2}\Big[a\sqrt{h} - e(\sqrt{H}-\sqrt{b}) + \frac{ae\sqrt{b}}{d}.\ln\frac{e}{a+d}.\frac{d\sqrt{H}+a\sqrt{b}}{d\sqrt{h}+e\sqrt{b}}\Big].$$

Ist endlich 3tens $a<e$, und bezeichnet man e^2-a^2 durch d^2, so entsteht, wie im 2ten Falle:

$t = \frac{A}{ad^2}\Big[a\int\frac{\partial y}{y}.\sqrt{\Big(y-\frac{e^2b}{d^2}\Big)} - e\int\frac{\partial y}{y}\sqrt{\Big(y-\frac{a^2b}{d^2}\Big)}\Big]$, wenn y den Ausdruck $\frac{e^2H-a^2h}{e^2-a^2} - x$ vorstellt. Es ist aber

$$\int\frac{\partial y}{y}.\sqrt{(y-r)} = 2\sqrt{(y-r)} - 2\sqrt{r}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{y-r}{r}} + C, \text{ also}$$

$$t = \frac{A}{ad^2}\Big[2a\sqrt{\Big(y-\frac{e^2b}{d^2}\Big)} - \frac{2ae}{d}\sqrt{b}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\Big(\frac{d^2y-e^2b}{e^2b}\Big)} - 2e\sqrt{\Big(y-\frac{a^2b}{d^2}\Big)}$$
$$+ \frac{2ea}{d}\sqrt{b}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\Big(\frac{d^2y-a^2b}{a^2b}\Big)}\Big] + C$$
$$= \frac{2A}{ad^2}\Big[a\sqrt{(h-x)} - e.\sqrt{(H-x)}$$
$$+ \frac{ae\sqrt{b}}{d}\Big(\mathrm{arc\,tg}\frac{d}{a}\sqrt{\frac{H-x}{b}} - \mathrm{arc\,tg}\frac{d}{e}\sqrt{\frac{h-x}{b}}\Big)\Big] + C,$$

worin

$$C = -\frac{2A}{ad^2}\Big[a\sqrt{h} - e\sqrt{H} + \frac{ae\sqrt{b}}{d}\Big(\mathrm{arc\,tg}\frac{d}{a}\sqrt{\frac{H}{b}} - \mathrm{arc\,tg}\frac{d}{e}\sqrt{\frac{h}{b}}\Big)\Big] \text{ ist.}$$

Man

Man hat daher nun vollständig:

$$t = \frac{2A}{\alpha d^2}\Big[e[\sqrt{H}-\sqrt{(H-x)}]-a[\sqrt{h}-\sqrt{(h-x)}]$$
$$+\frac{ae\sqrt{b}}{d}\Big(\operatorname{arctg}\frac{d}{a}\sqrt{\frac{H-x}{b}}-\operatorname{arctg}\frac{d}{e}\sqrt{\frac{h-x}{b}}-\operatorname{arctg}\frac{d}{a}\sqrt{\frac{H}{b}}+\operatorname{arctg}\frac{d}{e}\sqrt{\frac{h}{b}}\Big)\Big],$$

und hieraus, für $x=h$,

$$T=\frac{2A}{\alpha d^2}\Big[e(\sqrt{H}-\sqrt{b})-a\sqrt{h}$$
$$+\frac{ae\sqrt{b}}{d}\Big(\operatorname{arctg}\frac{d}{a}+\operatorname{arctg}\frac{d}{e}\sqrt{\frac{h}{b}}-\operatorname{arctg}\frac{d}{a}\sqrt{\frac{H}{b}}\Big)\Big];\ \text{oder auch}$$

$$T=\frac{2A}{\alpha d^2}\Big[e(\sqrt{H}-\sqrt{b})-a\sqrt{h}$$
$$+\frac{ae\sqrt{b}}{d}\operatorname{arctg}\frac{d[abe+a^2\sqrt{(bh)}+d^2\sqrt{(hH)}-ae\sqrt{(bH)}]}{a^2be+ad^2\sqrt{(hH)}+d^2e\sqrt{(bH)}-ad^2\sqrt{(bh)}}\Big]$$
$$=\frac{2A}{\alpha d^2}\Big[e(\sqrt{H}-\sqrt{b})-a\sqrt{h}+\frac{ae\sqrt{b}}{d}\operatorname{arctg}\frac{d(a\sqrt{H}+e\sqrt{h}-a\sqrt{b})}{a^2\sqrt{H}+ae\sqrt{h}+d^2\sqrt{b}}\Big].$$

Ist $h=16'$; $b=9'$; $a=e=\frac{5}{16}$ Quad.-Fufs, so erhält man $T=8{,}06\frac{A}{\alpha}$.

Ist $h=16'$; $b=9'$; $a=\frac{5}{16}Q'$; $e=\frac{4}{16}Q'$; - - - - - $T=9{,}24\frac{A}{\alpha}$.

Ist $h=16'$; $b=9'$; $a=\frac{4}{16}Q'$; $e=\frac{5}{16}Q'$; - - - - - $T=8{,}71\frac{A}{\alpha}$.

III.

Zwei prismatische, anfänglich leere Gefäfse communiciren durch eine Oeffnung vom Quadrat-Inhalt α; das erste hat den Querschnitt A, das zweite den Querschnitt B, und in das erste fliefsen gleichförmig in jeder Secunde M Cubic-Fufs Wasser; wie hoch steht, nach Verlauf von t Secunden, das Wasser in jedem Gefäfs?

In dem ersten x, in dem zweiten y Fufs hoch, so hat man sogleich die Gleichung:

$$1.\quad Mt = Ax + By.$$

In den folgenden k Secunden sind, $x=\varphi t$, $y=ft$ gesetzt, am Schlufs der Zeit k, die Wasserhöhen $\varphi(t+k)$; $f(t+k)$; also die Geschwindigkeitshöhe $=\varphi(t+k)-f(t+k)$. Im Anfang der Zeit war sie $=\varphi t - ft$, so dafs dieselbe also, $k'<k$ gedacht, während der Zeit $k=\varphi(t+k')-f(t+k')$ zu setzen ist. In der Zeit k fliefst demnach aus dem ersten ins zweite Gefäfs, die Wassermenge $2\alpha\sqrt{g}\cdot\sqrt{[\varphi(t+k')-f(t+k')]}.k$, und es sammelt sich in dieser Zeit k

im zweiten Gefäfs die Menge $B.[f(t+k)-ft]$. Man hat daher

$$2.\quad 2a\sqrt{g}.\sqrt{\left[\varphi t-ft+k'(\varphi' t-f' t)+\frac{k'^2}{2}(\varphi'' t-f'' t)+\ldots.\right]}$$
$$= B\left(f' t+\frac{k}{2}f'' t\ldots.\right),$$

und hieraus für $k=0$, also auch $k'=0$:

$$3.\quad 2a\sqrt{g}.\sqrt{(x-y)} = B.\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Wird in diese Gleichung, nachdem die Ableitung der ersten gebildet wurde, hieraus ∂t substituirt, so erhält man:

$$\frac{M}{2a\sqrt{g}.\sqrt{(x-y)}} = \frac{A\partial x+B\partial y}{B\partial y};$$

oder, $\sqrt{(x-y)}$ durch z ausgedrückt:

$$\frac{MB\partial y}{2a\sqrt{g}.z} = A(\partial y+2z\,\partial z)+B\partial y;\ \text{also}$$

$$\frac{MB}{2a\sqrt{g}}.\partial y = (A+B)z\,\partial y+2Az^2\partial z;\ \text{oder,}$$

$\frac{MB}{4aA\sqrt{g}} = b$ und $\frac{A+B}{2A} = c$ gesetzt, $(b-cz)\partial y = z^2\partial z$; folglich

$\partial y = \frac{z^2\partial z}{b-cz}$; und daher

$$y = -\frac{1}{2c^3}[2b^2\ln(b-cz)+2bcz+c^2z^2]+C$$
$$= \frac{1}{2c^3}.\left[2b^2\ln\frac{b}{b-cz}-2bcz-c^2z^2\right].$$

Nun ergiebt sich auch sogleich:

$$\partial t = \frac{B\partial y}{2a\sqrt{g}.z} = \frac{B}{2a\sqrt{g}}.\frac{z\partial z}{b-cz};\ \text{also}$$

$$t = \frac{B}{2ac^2.\sqrt{g}}.\left[b\ln\frac{b}{b-cz}-cz\right].$$

18.

Ueber eine besondere Gattung algebraischer Functionen, die aus der Entwicklung der Function $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ entstehen.

(Von Herrn Prof. *Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

1.

Die merkwürdigen Eigenschaften dieser Functionen hat zuerst Legendre in seinen Untersuchungen über die Attraction der Sphäroïde und die Gestalt der Planeten bekannt gemacht, im 10ten Theile der *Savans étrangers*, und in den Memoiren der Pariser Academie von den Jahren 1784 und 1789; später hat er sie im 10ten Paragraph des 5ten Abschnittes seiner *Exercices sur le calcul intégral* zusammengestellt. Sie sind die Entwicklungscoefficienten X', X'', $X'''\ldots X^{(n)}$ in

$$z=\frac{1}{\sqrt{(1-2xz+z^2)}}=1+X'z+X''z^2+X'''z^3+\ldots+X^{(n)}z^n+\text{etc.}$$

Diese Functionen, als deren *fonction génératrice* $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ anzusehen ist, genieſsen unter andern der Eigenschaft, dafs wenn m und n ungleich sind, immer

$$\int_{-1}^{+1} X^{(m)}X^{(n)}\partial x=0,$$

wenn aber $m=n$, so findet sich

$$\int_{-1}^{+1} X^{(m)}X^{(n)}\partial x=\frac{2}{2n+1},$$

wodurch es möglich wird, wenn man eine Function von x nach diesen Coefficienten entwickeln will, die Coefficienten als bestimmte Integrale auszudrücken. Setzt man nemlich

$$Fx=A+A'X'+A''X''+A'''X'''+\ldots+A^{(n)}X^n+\text{etc.},$$

wo A, A', A'',$\ldots A^{(n)}$ kein x enthalten, so wird

$$A^{(n)}=\frac{2n+1}{2}\int Fx.X^{(n)}\partial x,$$

welche Art der Entwicklung viel Aehnlichkeit mit derjenigen hat, welche Euler bei der Entwicklung einer Function nach den Sinus und Cosinus vielfacher Winkel gelehrt hat.

Es scheint mir aber Legendre die Fundamentaleigenschaft dieser Functionen übergangen zu haben. Sie ist in der Gleichung gegeben:

$$X^{(n)} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\partial^n (x^2-1)^n}{1.2.3....n\,\partial x^n}.$$

Man kann diesen Satz leicht a posteriori prüfen, indem man die Entwicklung von z wirklich vornimmt, und auch das $n$te Differentiale von $(x^2-1)^n$ entwickelt. Er findet sich aber direct so: Hat man nemlich eine Gleichung,

$$y - x = zF(y),$$

so ist nach dem Lagrangeschen Lehrsatz:

$$y = x + zFx + \frac{z^2}{1.2}\cdot\frac{\partial Fx^2}{\partial x} + \frac{z^3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^2 Fx^3}{\partial x^2} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3....n}\cdot\frac{\partial^{n-1} Fx^n}{\partial x^{n-1}} + \text{etc.},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1 + z\frac{\partial Fx}{\partial x} + \frac{z^2}{1.2}\cdot\frac{\partial^2 Fx^2}{\partial x^2} + \frac{z^3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^3 Fx^3}{\partial x^3} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3....n}\cdot\frac{\partial^n Fx^n}{\partial x^n} + \text{etc.}$$

Setzt man nun die Gleichung:

$$y - x = \frac{z}{2}(y^2-1),$$

wo $F(y) = \frac{1}{2}(y^2-1)$, so ist

$$1 - zy = \sqrt{(1-2xz+z^2)}.$$

Differentiirt man aber die gegebene Gleichung, so erhält man:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(1-zy) = 1,$$

woraus:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{(1-2xz+z^2)}} = 1 + X'z + X''z^2 + \ldots + X^{(n)}z^n + \text{etc.}$$

Vergleicht man damit den oben für $\frac{\partial y}{\partial x}$ gefundenen Ausdruck, in welchem man $Fx = \frac{1}{2}(x^2-1)$ setzt, so erhellet:

$$X^{(n)} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\partial^n (x^2-1)^n}{1.2.3..n\,\partial x^n}.$$

Man sieht sogleich, dafs die vielfachen Integrale von $X^{(n)}$ bis zum $(n-1)$sten zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden, weil sie den Factor x^2-1 enthalten. Bemerkt man nun, dafs durch theilweise Integrirung, wenn y irgend eine Function von x bedeutet,

$$\int y\varphi x\,\partial x = y\int\varphi x\,\partial x - \partial y\int^2\varphi x\,\partial x - \partial^2 y\int^3\varphi x\,\partial x - \ldots$$
$$(-1)^{n-1}\partial^{n-1} y\int^n\varphi x\,\partial x + (-1)^n\int\partial^n y\int^n\varphi x\,\partial x^2,$$

und setzt $\varphi x = X^{(n)}$, so erhält man augenblicklich, da

$$\int^n X^{(n)}\partial x^n = \frac{(x^2-1)^n}{2^n.1.2.3....n},$$

und die übrigen Glieder zwischen den angegebenen Grenzen verschwinden:

$$\int_{-1}^{+1} y X^{(n)} \partial x = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(-1)^n}{1.2.3....n} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^n y}{\partial x^{n-1}} (x^2-1)^n.$$

Hat man daher

$$Fx = A + A'X + A''X^{(2)} + A'''X^{(3)} + \text{ etc.},$$

so erhält man sogleich:

$$A + 3A'z + 5A''z^2 + 7A'''z^3 + \text{ etc.} = 2\int_{-1}^{+1} F\left(x - \frac{z}{2}(x^2-1)\right) \partial x.$$

2.

Es findet aber zwischen den Differentialen von $(x^2-1)^n$ noch eine merkwürdige Relation statt, welche dann gleichfalls eine neue Eigenschaft der Functionen $X^{(n)}$ zu erkennen geben wird. Sie ist in der Gleichung enthalten:

$$\frac{\partial^{n-r}(x^2-1)^n}{1.2.3...n-r} = (x^2-1)^r \frac{\partial^{n+r}(x^2-1)^n}{1.2.3...n+r} \cdot (r \leqq n).$$

Ich gelange zu ihr durch folgende Methode, deren ich mich schon in meinen „*Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus*" (Berlin bei Herbig A. 1825.), bedient habe.

Bezeichnet man in der Entwicklung einer Function von h, $F(h)$, den Coefficienten von h^n mit

$$\{F(h)\}h^n,$$

so hat man zufolge des Taylorschen Lehrsatzes:

$$\frac{\partial^{n+r}(x^2-1)^n}{1.2....(n+r)\partial x^{n+r}} = \{(x^2-1+2xh+h^2)^n\}h^{n+r}$$
$$= (x^2-1)^n \left\{\left[1 + 2x\frac{h}{x^2-1} + (x^2-1)\left(\frac{h}{x^2-1}\right)^2\right]^n\right\} h^{n+r}.$$

Indem man in der Entwicklung h mit dem Nenner x^2-1 behaftet läfst, wird der Coefficient von h^{n+r} mit dem Nenner $(x^2-1)^{n+r}$ behaftet sein Zieht man diesen heraus, so erhält man:

$$(x^2-1)^{-r}\{[1+2xh+h^2(x^2-1)]\}h^{n+r}.$$

Setzt man statt h jetzt $\frac{1}{h}$, so geht der Ausdruck über in:

$$(x^2-1)^{-r}\left\{\left(1 + \frac{2x}{h} + \frac{x^2-1}{h^2}\right)^n\right\} h^{-(n+r)}.$$

Die Multiplication mit h^{2n} giebt

$$(x^2-1)^{-r}\{[(x+h)^2-1]^n\}h^{n-r}.$$

Man hat also:

$$\{[(x+h)^2-1]^n\}h^{n+r} = (x^2-1)^{-r}\{[(x+h)^2-1]^n\}h^{n-r}, \text{ oder}$$
$$\{[(x+h)^2-1]^n\}h^{n-r} = (x^2-1)^r\{[(x+h)^2-1]^n\}h^{n+r};$$

welches so viel ist als:

$$\frac{\partial^{n-r}(x^2-1)^n}{1.2.3....(n-r)\,\partial x^{n-r}} = (x^2-1)^r \frac{\partial^{n+r}(x^2-1)^n}{1.2.3....(n+r)\,\partial x^{n+r}}.$$

Nimmt man das $r$fache Integral von $X^{(n)}$ so, dafs jedes genommene Integral für $x=-1$, oder für $x=+1$ verschwindet, so hat man:

$$\int^r X^{(n)}\,\partial x^r = \frac{1}{2^n.1.2.3....n}\,\partial^{n-r}(x^2-1).$$

Man kann die gefundene Eigenschaft, in Bezug auf $X^{(n)}$, daher auch so ausdrücken:

$$\frac{\int^r X^{(n)}\,\partial x^r}{1.2.3....(n-r)} = (x^2-1)^r \frac{\partial^r X^{(n)}}{1.2.3....(n+r)\,\partial x^r}.$$

Es ist zu bemerken, dafs im Allgemeinen die Functionen, welche man durch $\partial^n \frac{(x-a)^n(x-b)^n}{\partial x^n}$ darstellen kann, derselben Eigenschaften geniefsen, wenn man bei den Integrationen, statt der Grenzen -1 und $+1$, die Grenzen a und b nimmt. Uebrigens ist die Function $X^{(n)}$ dieselbe mit der Function, welche Gaufs in seiner „*Nova methodus integralium valores etc.*" mit U bezeichnet, und deren Wurzeln die Intervalle der zu berechnenden Ordinaten angeben, damit die Quadratur der durch die respectiven Puncte gelegten parabolischen Curve eine möglichst gröfste Näherung gebe; wie ich denn auch in der Abhandlung über diese Methode die Function P, welche mit dieser zusammenhängt, rückwärts aus denselben Eigenschaften deducirt habe. —

Königsberg in Preufsen, im August, 1826.

19.
Ueber die Hauptaxen der Flächen der zweiten Ordnung.

(Von Herrn Prof. *C. D. Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

1.

Die Aufgabe, eine Oberfläche der zweiten Ordnung auf ihr Hauptaxensystem zu beziehen, fordert bekanntlich einen Ausdruck von der Form:

$$Axx + Byy + Czz + 2ayz + 2bzx + 2cxy,$$

wo x, y, z die Coordinaten eines Punctes bedeuten, durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems in einen Ausdruck von der Form:

$$L\xi\xi + M\upsilon\upsilon + N\zeta\zeta$$

zu transformiren. Ich werde im Folgenden voraussetzen, dafs das ursprüngliche Coordinatensystem, in Bezug auf welches die Gleichung der Oberfläche gegeben ist, ein schiefwinkliges sei. Das Problem, in dieser Allgemeinheit gefafst, umfafst die beiden Fälle, wo das ursprüngliche Coordinatensystem ein rechtwinkliges oder ein schiefwinkliges conjugirtes ist, welche beide schon früher behandelt sind.

2.

Die Relation zwischen den alten Coordinaten x, y, z und den neuen ξ, υ, ζ sei durch die Gleichungen gegeben:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ \upsilon = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ \zeta = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{cases}$$

Das System der ξ, υ, ζ ist ein rechtwinkliges; die Axen des Systems der x, y, z sollen mit einander die Winkel λ, μ, ν, und zwar die Axen der y und z den Winkel λ, die Axen der z und x den Winkel μ, die Axen der x und y den Winkel ν bilden. Man hat demnach zwischen den 9 eingeführten Coefficienten die 6 Gleichungen:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} 1)\ \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' = 1, & 4)\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = \cos\lambda, \\ 2)\ \beta\beta + \beta'\beta' + \beta''\beta'' = 1, & 5)\ \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = \cos\mu, \\ 3)\ \gamma\gamma + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = 1, & 6)\ \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = \cos\nu. \end{cases}$$

Will man aus den Gleichungen I. x, y, z durch ξ, υ, ζ ausdrücken, so hat man hierzu, wenn man der Kürze halber

$$\Pi = \alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \alpha\beta''\gamma' - \beta\gamma''\alpha' - \gamma\alpha''\beta'$$

setzt, die Gleichungen:

$$\text{III.} \quad \begin{cases} \Pi x = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')\xi + (\beta''\gamma - \beta\gamma'')\upsilon + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)\zeta, \\ \Pi y = (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')\xi + (\gamma''\alpha - \gamma\alpha'')\upsilon + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\zeta, \\ \Pi z = (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\xi + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')\upsilon + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\zeta. \end{cases}$$

Giebt man den Axen der x, y, z beliebige Länge, so bedeutet bekanntlich Π den Inhalt des zwischen diesen Axen beschriebenen Parallelepipedums, dividirt durch das Product aus den drei Axen. Es ist daher Π bekannt, und zwar hat man

$$\begin{aligned} \Pi\Pi &= 1 - \cos\lambda\cos\lambda - \cos\mu\cos\mu - \cos\nu\cos\nu + \cos\lambda\cos\mu\cos\nu \\ &= \sin\left(\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\sin\left(\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\sin\left(\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\sin\left(\frac{-\lambda+\mu+\nu}{2}\right). \end{aligned}$$

Da der Ausdruck Π in vielen Untersuchungen vorkommt, und gewissermafsen als ein Modul des Körperwinkels zu betrachten ist, so wäre ein eigener Name für ihn zu wünschen.

3.

Es bieten sich nun zwei Wege zur Lösung unserer Aufgabe dar. Der erste näher liegende ist, die Gleichungen III. zu suchen, d. h, die Werthe von x, y, z, welche man in den Ausdruck

$$Axx + Byy + Czz + 2ayz + 2bzx + 2cxy$$

zu substituiren hat, damit er sich in den Ausdruck

$$L\xi\xi + M\upsilon\upsilon + N\zeta\zeta$$

verwandle. Ein zweiter Weg geht von der Betrachtung aus, dafs umgekehrt auch die Gleichungen I., welche ξ, υ, ζ durch x, y, z ausdrücken, in den Ausdruck

$$L\xi\xi + M\upsilon\upsilon + N\zeta\zeta$$

substituirt, diesen in

$$Axx + Byy + Czz + 2ayz + 2bzx + 2cxy$$

verwandeln müssen. Dieser zweite Weg bewährt sich als der vortheilhaftere. Wir werden ihn Gaufs nachgehen, welcher ihn bei einer Untersuchung eingeschlagen hat, die von der unsrigen, dem Gegenstande nach, gänzlich fern liegend, gleichwohl die nemliche Analyse erfordert. Man vergleiche die berühmte Abhandlung: „*Determinatio attractionis etc.*" in den Commentarien der Göttinger Societät.

4.

4.

Die zuletzt angestellte Betrachtung giebt die identische Gleichung:

$$L(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+M(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)^2+N(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z)^2 = Axx+Byy+Czz+2ayz+2bzx+2cxy.$$

Diese giebt folgende 6 Gleichungen:

$$\text{IV.}\begin{cases} 1)\ L\alpha\alpha+M\alpha'\alpha'+N\alpha''\alpha''=A,\\ 2)\ L\beta\beta+M\beta'\beta'+N\beta''\beta''=B,\\ 3)\ L\gamma\gamma+M\gamma'\gamma'+N\gamma''\gamma''=C,\\ 4)\ L\beta\gamma+M\beta'\gamma'+N\beta''\gamma''=a,\\ 5)\ L\gamma\alpha+M\gamma'\alpha'+N\gamma''\alpha''=b,\\ 6)\ L\alpha\beta+M\alpha'\beta'+N\alpha''\beta''=c. \end{cases}$$

Aus den 12 Gleichungen II. und IV. sind die 12 Gröfsen L, M, N, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' zu bestimmen. Es ist hierbei zu bemerken, dafs man die Gleichungen II. aus den Gleichungen IV. erhält, indem man 1 statt L, M, N, A, B, C setzt, und $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ respective für a, b, c. Aus allen Resultaten, die man aus den Gleichungen IV. ableitet, erhält man so alsbald die entsprechenden, wie sie aus den Gleichungen II. folgen. Die Auflösung der genannten 12 Gleichungen kann nun auf die manchfaltigste Weise unternommen werden. Wir bedienen uns der folgenden Analyse.

5.

Man schreibe die 3 Gleichungen IV. 1, 6, 5, wie folgt:

$$\begin{aligned} L\alpha.\alpha+M\alpha'.\alpha'+N\alpha''.\alpha''&=A,\\ L\alpha.\beta+M\alpha'.\beta'+N\alpha''.\beta''&=c,\\ L\alpha.\gamma+M\alpha'.\gamma'+N\alpha''.\gamma''&=b, \end{aligned}$$

so findet man hieraus für $L\alpha$, $M\alpha'$, $N\alpha''$ die Gleichungen:

$$\text{V.}\begin{cases} 1)\ \Pi.L\alpha=(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')A+(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')c+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')b,\\ 2)\ \Pi.M\alpha'=(\beta''\gamma-\beta\gamma'')A+(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')c+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')b,\\ 3)\ \Pi.N\alpha''=(\beta\gamma'-\beta'\gamma)A+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)c+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)b,\\ \text{Eben so folgt aus IV. 6, 2, 4:}\\ 4)\ \Pi.L\beta=(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')c+(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')B+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')a,\\ 5)\ \Pi.M\beta'=(\beta''\gamma-\beta\gamma'')c+(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')B+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')a,\\ 6)\ \Pi.N\beta''=(\beta\gamma'-\beta'\gamma)c+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)B+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)a,\\ \text{und aus IV. 5, 4, 3:}\\ 7)\ \Pi.L\gamma=(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')b+(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')a+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')C,\\ 8)\ \Pi.M\gamma'=(\beta''\gamma-\beta\gamma'')b+(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')a+(\alpha''\beta-\alpha\beta'')C,\\ 9)\ \Pi.N\gamma''=(\beta\gamma'-\beta'\gamma)b+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)a+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)C. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen II. lassen sich 9 ähnliche Gleichungen ableiten, welche man aus den Gleichungen V. unmittelbar erhält, indem man 1 statt L, M, N, A, B, C und $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ statt a, b, c setzt. Es werden dies die folgenden:

VI.
$$\begin{cases}
1)\ \Pi\alpha = (\beta'\gamma''-\beta''\gamma') + (\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')\cos\nu + (\alpha'\beta''-\alpha''\beta')\cos\mu,\\
2)\ \Pi\alpha' = (\beta''\gamma-\beta\gamma'') + (\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')\cos\nu + (\alpha''\beta-\alpha\beta'')\cos\mu,\\
3)\ \Pi\alpha'' = (\beta\gamma'-\beta'\gamma) + (\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)\cos\nu + (\alpha\beta'-\alpha'\beta)\cos\mu,\\
4)\ \Pi\beta = (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')\cos\nu + (\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha') + (\alpha'\beta''-\alpha''\beta')\cos\lambda,\\
5)\ \Pi\beta' = (\beta''\gamma-\beta\gamma'')\cos\nu + (\gamma''\alpha-\gamma\alpha'') + (\alpha''\beta-\alpha\beta'')\cos\lambda,\\
6)\ \Pi\beta'' = (\beta\gamma'-\beta'\gamma)\cos\nu + (\gamma\alpha'-\gamma'\alpha) + (\alpha\beta'-\alpha'\beta)\cos\lambda,\\
7)\ \Pi\gamma = (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')\cos\mu + (\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')\cos\lambda + (\alpha'\beta''-\alpha''\beta'),\\
8)\ \Pi\gamma' = (\beta''\gamma-\beta\gamma'')\cos\mu + (\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')\cos\lambda + (\alpha''\beta-\alpha\beta''),\\
9)\ \Pi\gamma'' = (\beta\gamma'-\beta'\gamma)\cos\mu + (\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)\cos\lambda + (\alpha\beta'-\alpha'\beta).
\end{cases}$$

6.

Aus den Gleichungen V. 1, VI. 1; V. 4, VI. 4; V. 7, VI. 7 folgen sogleich folgende drei:

VII.
$$\begin{cases}
1)\ 0 = (L-A)(\beta'\gamma''-\beta''\gamma') + (L\cos\nu-c)(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha') + (L\cos\mu-b)(\alpha'\beta''-\alpha''\beta'),\\
2)\ 0 = (L\cos\nu-c)(\beta'\gamma''-\beta''\gamma') + (L-B)(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha') + (L\cos\lambda-a)(\alpha'\beta''-\alpha''\beta'),\\
3)\ 0 = (L\cos\mu-b)(\beta'\gamma''-\beta''\gamma') + (L\cos\lambda-a)(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha') + (L-C)(\alpha'\beta''-\alpha''\beta').
\end{cases}$$

Eben so folgen aus den Gleichungen V. 2, VI. 2; V. 5, VI. 5; V. 8, VI. 8 die Gleichungen:

VII.
$$\begin{cases}
4)\ 0 = (M-A)(\beta''\gamma-\beta\gamma'') + (M\cos\nu-c)(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'') + (L\cos\mu-b)(\alpha''\beta-\alpha\beta''),\\
5)\ 0 = (M\cos\nu-c)(\beta''\gamma-\beta\gamma'') + (M-B)(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'') + (M\cos\lambda-a)(\alpha''\beta-\alpha\beta''),\\
6)\ 0 = (M\cos\mu-b)(\beta''\gamma-\beta\gamma'') + (M\cos\lambda-a)(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'') + (M-C)(\alpha''\beta-\alpha\beta''),
\end{cases}$$

und aus den Gleichungen V. 3, VI. 3; V. 6, VI. 6; V. 9, VI. 9:

VII.
$$\begin{cases}
7)\ 0 = (N-A)(\beta\gamma'-\beta'\gamma) + (N\cos\nu-c)(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha) + (N\cos\mu-b)(\alpha\beta'-\alpha'\beta),\\
8)\ 0 = (N\cos\nu-c)(\beta\gamma'-\beta'\gamma) + (N-B)(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha) + (N\cos\lambda-a)(\alpha\beta'-\alpha'\beta),\\
9)\ 0 = (N\cos\mu-b)(\beta\gamma'-\beta'\gamma) + (N\cos\lambda-a)(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha) + (N-C)(\alpha\beta'-\alpha'\beta).
\end{cases}$$

7.

Eliminirt man aus den Gleichungen VII. 1. 2. 3. die Ausdrücke $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$, $\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha'$, $\alpha'\beta''-\alpha''\beta'$, so erhält man die Gleichung:

$$0=(L-A)(L-B)(L-C)-(L-A)(L\cos\lambda-a)^2-(L-B)(L\cos\mu-b)^2 -(L-C)(L\cos\nu-c)^2+2(L\cos\lambda-a)(L\cos\mu-b)(L\cos\nu-c).$$

Eben so erhält man durch Elimination von $\beta''\gamma-\beta\gamma''$, $\gamma''\alpha-\gamma\alpha''$, $\alpha''\beta-\alpha\beta''$, aus VII. 4. 5. 6.:

$$0=(M-A)(M-B)(M-C)-(M-A)(M\cos\lambda-a)^2-(M-B)(M\cos\mu-b)^2 -(M-C)(M\cos\nu-c)^2+2(M\cos\lambda-a)(M\cos\mu-b)(M\cos\nu-c),$$

und durch Elimination von $\beta\gamma'-\beta'\gamma$, $\gamma\alpha'-\gamma'\alpha$, $\alpha\beta'-\alpha'\beta$ aus VII. 7. 8. 9.:

$$0=(N-A)(N-B)(N-C)-(N-A)(N\cos\lambda-a)^2-(N-B)(N\cos\mu-b)^2 -(N-C)(N\cos\nu-c)^2+2(N\cos\lambda-a)(N\cos\mu-b)(N\cos\nu-c).$$

Man sieht also, dafs L, M, N Wurzeln der cubischen Gleichung:

VIII. $$(x-A)(x-B)(x-C)-(x-A)(x\cos\lambda-a)^2-(x-B)(x\cos\mu-b)^2 -(x-C)(x\cos\nu-c)^2+2(x\cos\lambda-a)(x\cos\mu-b)(x\cos\nu-c)=0$$

sind. Bemerkt man, dafs

$$1-\cos\lambda\cos\lambda-\cos\mu\cos\mu-\cos\nu\cos\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu=\Pi\Pi,$$

so wird diese Gleichung entwickelt:

VIII. $$\Pi\Pi x^3-x^2[A\sin\lambda\sin\lambda+B\sin\mu\sin\mu+C\sin\nu\sin\nu -2a(\cos\lambda-\cos\mu\cos\nu)-2b(\cos\mu-\cos\nu\cos\lambda)-2c(\cos\nu-\cos\lambda\cos\mu)] +x[AB+BC+CA-aa-bb-cc-2\cos\lambda(aA-bc)-2\cos\mu(bB-ca)-2\cos\nu(cC-ab)] -ABC+Aaa+Bbb+Ccc-2abc=0.$$

8.

Aus II. 1, IV. 1, II. 2, IV. 2, II. 6, IV. 6 folgen die drei Gleichungen:

$$(L-M)\alpha'\alpha'+(L-N)\alpha''\alpha''=L-A,$$
$$(L-M)\beta'\beta'+(L-N)\beta''\beta''=L-B,$$
$$(L-M)\alpha'\beta'+(L-N)\alpha''\beta''=L\cos\nu-c.$$

Multiplicirt man die ersten beiden und zieht vom Producte das Quadrat der letzten ab, so erhält man:

$$(L-M)(L-N)(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2=(L-A)(L-B)-(L\cos\nu-c)^2.$$

Auf diese Weise erhält man folgende 3 Gleichungen:

IX.
$$\begin{cases}
1)\ \alpha'\beta''-\alpha''\beta' = \sqrt{\left(\dfrac{(L-A)(L-B)-(L\cos\nu-c)^2}{(L-M)(L-N)}\right)},\\
2)\ \beta'\gamma''-\beta''\gamma' = \sqrt{\left(\dfrac{(L-B)(L-C)-(L\cos\lambda-a)^2}{(L-M)(L-N)}\right)},\\
3)\ \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha' = \sqrt{\left(\dfrac{(L-C)(L-A)-(L\cos\mu-b)^2}{(L-M)(L-N)}\right)},
\end{cases}$$

wo die Zeichen der Wurzelausdrücke willkürlich sind. Ferner auf dieselbe Weise:

$$\begin{cases}
4)\ \alpha''\beta-\alpha\beta'' = \sqrt{\left(\dfrac{(M-A)(M-B)-(M\cos\nu-c)^2}{(M-N)(M-L)}\right)},\\
5)\ \beta''\gamma-\beta\gamma'' = \sqrt{\left(\dfrac{(M-B)(M-C)-(M\cos\lambda-a)^2}{(M-N)(M-L)}\right)},\\
6)\ \gamma''\alpha-\gamma\alpha'' = \sqrt{\left(\dfrac{(M-C)(M-A)-(M\cos\mu-b)^2}{(M-N)(M-L)}\right)},
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
7)\ \alpha\beta'-\alpha'\beta = \sqrt{\left(\dfrac{(N-A)(N-B)-(N\cos\nu-c)^2}{(N-L)(N-M)}\right)},\\
8)\ \beta\gamma'-\beta'\gamma = \sqrt{\left(\dfrac{(N-B)(N-C)-(N\cos\lambda-a)^2}{(N-L)(N-M)}\right)},\\
9)\ \gamma\alpha'-\gamma'\alpha = \sqrt{\left(\dfrac{(N-C)(N-A)-(N\cos\mu-b)^2}{(N-L)(N-M)}\right)}.
\end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist unsere Aufgabe vollständig gelöst.

9.

Ich bemerke noch folgendes: Aus den Gleichungen II. 4, IV. 4; II. 5, IV. 5 folgt:

$$(L-M)\beta'\gamma'+(L-N)\beta''\gamma'' = L\cos\lambda-a,$$
$$(L-M)\gamma'\alpha'+(L-N)\gamma''\alpha'' = L\cos\mu-b.$$

Aus den Gleichungen II. 3, IV. 3; II. 6, IV. 6 folgt ferner:

$$(L-M)\gamma'\gamma'+(L-N)\gamma''\gamma'' = L-C,$$
$$(L-M)\alpha'\beta'+(L-N)\alpha''\beta'' = L\cos\nu-c.$$

Multiplicirt man die ersten beiden Gleichungen und die letzten beiden Gleichungen mit einander, so giebt die Differenz beider Producte:

$$(L-M)(L-N)(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')$$
$$= (L\cos\lambda-a)(L\cos\mu-b)-(L-C)(L\cos\nu-c),$$

und auf diese Weise erhält man die 9 Gleichungen:

X.
$$\begin{cases}
1)\ (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha') = \dfrac{(L\cos\lambda-a)(L\cos\mu-b)-(L-C)(L\cos\nu-c)}{(L-M)(L-N)}, \\
2)\ (\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')(\alpha'\beta''-\alpha''\beta') = \dfrac{(L\cos\mu-b)(L\cos\nu-c)-(L-A)(L\cos\lambda-a)}{(L-M)(L-N)}, \\
3)\ (\alpha'\beta''-\alpha''\beta')(\beta'\gamma''-\beta''\gamma') = \dfrac{(L\cos\nu-c)(L\cos\lambda-a)-(L-B)(L\cos\mu-b)}{(L-M)(L-N)}, \\
4)\ (\beta''\gamma-\beta\gamma'')(\gamma''\alpha-\gamma\alpha'') = \dfrac{(M\cos\lambda-a)(M\cos\mu-b)-(M-C)(M\cos\nu-c)}{(M-L)(M-N)}, \\
5)\ (\gamma''\alpha-\gamma\alpha'')(\alpha''\beta-\alpha\beta'') = \dfrac{(M\cos\mu-b)(M\cos\nu-c)-(M-A)(M\cos\lambda-a)}{(M-L)(M-N)}, \\
6)\ (\alpha''\beta-\alpha\beta'')(\beta''\gamma-\beta\gamma'') = \dfrac{(M\cos\nu-c)(M\cos\lambda-a)-(M-B)(M\cos\mu-b)}{(M-L)(M-N)}, \\
7)\ (\beta\gamma'-\beta'\gamma)(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha) = \dfrac{(N\cos\lambda-a)(N\cos\mu-b)-(N-C)(N\cos\nu-c)}{(N-L)(N-M)}, \\
8)\ (\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)(\alpha\beta'-\alpha'\beta) = \dfrac{(N\cos\mu-b)(N\cos\nu-c)-(N-A)(N\cos\lambda-a)}{(N-L)(N-M)}, \\
9)\ (\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma) = \dfrac{(N\cos\nu-c)(N\cos\lambda-a)-(N-B)(N\cos\mu-b)}{(N-L)(N-M)}.
\end{cases}$$

Die Vergleichung der Formeln IX. und X. kann ebenfalls zu der Gleichung VIII. führen.

10.

Ist das ursprüngliche Coordinatensystem ein rechtwinkliges, so wird $\cos\lambda = 0$, $\cos\mu = 0$, $\cos\nu = 0$, und die Gleichung VIII. wird, da für diesen Fall $\Pi = 1$:

$$x^3 - x^2(A+B+C) + x(AB+BC+CA-aa-bb-cc) - ABC + Aaa + Bbb + Ccc - 2abc = 0.$$

Ist das ursprüngliche System ein conjugirtes, so ist $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, und die Gleichung VIII. wird:

$$\Pi\Pi x^3 - x^2(A\sin\lambda\sin\lambda + B\sin\mu\sin\mu + C\sin\nu\sin\nu) + x(AB+BC+CA) - ABC = 0,$$

welche beide Gleichungen schon sonst gegeben sind.

Königsberg, im Mai, 1827.

20.

De singulari quadam duplicis Integralis transformatione.

(Auct. Dr. *J. G. Jacobi*, *Regiom.*)

1.

Celeberrima illa dissertatio Gaussiana inscripta: „Determinatio attractionis etc.", quae in Commentariis Soc. Gott. legitur, in eo maxime versatur, ut expressio data

$$\frac{\partial E}{\sqrt{[(A-a\cos E)^2+(B-b\sin E)^2+CC]}},$$

in formam simpliciorem redigatur hanc:

$$\frac{\partial P}{\sqrt{(G+G'\cos P^2+G''\sin P^2)}},$$

id quod fieri a Cl. autore demonstratur per substitutionem factam:

$$\cos E = \frac{\alpha+\alpha'\cos P+\alpha''\sin P}{\gamma+\gamma'\cos P+\gamma''\sin P},$$

$$\sin E = \frac{\beta+\beta'\cos P+\beta''\sin P}{\gamma+\gamma'\cos P+\gamma''\sin P},$$

novem coefficientibus rite determinatis. Dum egregiae illi commentationi identidem incumbebam, non fugit me, eandem fere analysin ad duplicis Integralis cuiusdam insignem transformationem adhiberi posse, quam communicare cum geometris eo minus dubito, quod duplicium Integralium theoria adhuc valde iacet.

2.

Ponatur enim $e =$

$$\begin{aligned} &a+a'\cos\psi^2+a''\sin\psi^2\cos\varphi^2+a'''\sin\psi^2\sin\varphi^2 \\ &+2b'\cos\psi+2b''\sin\psi\cos\varphi+2b'''\sin\psi\sin\varphi \\ &+2c'\sin\psi^2\cos\varphi\sin\varphi+2c''\cos\psi\sin\psi\sin\varphi+2c'''\cos\psi\sin\psi\cos\varphi, \end{aligned}$$

quam expressionem praeter terminum constantem terminos $\cos\psi$, $\sin\psi\cos\varphi$, $\sin\psi\sin\varphi$, eorundem quadrata et producta binorum continere videmus. Jam probabo, expressionem

$$\iint \frac{\sin\psi\,\partial\psi\,\partial\varphi}{e},$$

transformari posse in simpliciorem hanc.

$$\iint \frac{\sin P \, \partial P \, \partial \vartheta}{G + G' \cos P^2 + G'' \sin P^2 \cos \vartheta^2 + G''' \sin P^2 \sin \vartheta^2},$$

idque per substitutionem

$$\cos P = \frac{\alpha + \alpha' \cos\psi + \alpha'' \sin\psi \cos\varphi + \alpha''' \sin\psi \sin\varphi}{\delta + \delta' \cos\psi + \delta'' \sin\psi \cos\varphi + \delta''' \sin\psi \sin\varphi},$$

$$\sin P \cos\vartheta = \frac{\beta + \beta' \cos\psi + \beta'' \sin\psi \cos\varphi + \beta''' \sin\psi \sin\varphi}{\delta + \delta' \cos\psi + \delta'' \sin\psi \cos\varphi + \delta''' \sin\psi \sin\varphi},$$

$$\sin P \sin\vartheta = \frac{\gamma + \gamma' \cos\psi + \gamma'' \sin\psi \cos\varphi + \gamma''' \sin\psi \sin\varphi}{\delta + \delta' \cos\psi + \delta'' \sin\psi \cos\varphi + \delta''' \sin\psi \sin\varphi},$$

sedecim coefficientibus rite determinatis. Quarum determinationem, sicuti quantitatum G, G', G'', G''', iam aggrediamur.

3.

Quia $\cos P^2 + \sin P^2 \cos\vartheta^2 + \sin P^2 \sin\vartheta^2 = 1$, expressio

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \alpha' \cos\psi + \alpha'' \sin\psi \cos\varphi + \alpha''' \sin\psi \sin\varphi)^2 \\
+\ &(\beta + \beta' \cos\psi + \beta'' \sin\psi \cos\varphi + \beta''' \sin\psi \sin\varphi)^2 \\
+\ &(\gamma + \gamma' \cos\psi + \gamma'' \sin\psi \cos\varphi + \gamma''' \sin\psi \sin\varphi)^2 \\
-\ &(\delta + \delta' \cos\psi + \delta'' \sin\psi \cos\varphi + \delta''' \sin\psi \sin\varphi)^2,
\end{aligned}$$

evanescat necesse est, unde quia

$$\cos\psi^2 + \sin\psi^2 \cos\varphi^2 + \sin\psi^2 \sin\varphi^2 = 1,$$

ut cum Cl. Gauss ratiocinemur, induere ea debet hanc formam:

$$k(\cos\psi^2 + \sin\psi^2 \cos\varphi^2 + \sin\psi^2 \sin\varphi^2 - 1).$$

Hinc nanciscimur decem aequationes conditionales has:

$$\text{I.} \quad \begin{cases}
\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma - \delta\delta = -k, \\
\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma' - \delta'\delta' = k, \\
\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' - \delta''\delta'' = k, \\
\alpha'''\alpha''' + \beta'''\beta''' + \gamma'''\gamma''' - \delta'''\delta''' = k, \\
\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' = 0, \\
\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \delta\delta'' = 0, \\
\alpha\alpha''' + \beta\beta''' + \gamma\gamma''' - \delta\delta''' = 0, \\
\alpha''\alpha''' + \beta''\beta''' + \gamma''\gamma''' - \delta''\delta''' = 0, \\
\alpha'''\alpha' + \beta'''\beta' + \gamma'''\gamma' - \delta'''\delta' = 0, \\
\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' - \delta'\delta'' = 0.
\end{cases}$$

Quia sedecim coefficientes in quantitatem arbitrariam duci possunt, ipsam k ex arbitrio accipere licet.

4.

Ponamus porro, expressionem:

$$\begin{aligned}
&G'(\alpha+\alpha'\cos\psi+\alpha''\sin\psi\cos\varphi+\alpha'''\sin\psi\sin\varphi)^2\\
&+G''(\beta+\beta'\cos\psi+\beta''\sin\psi\cos\varphi+\beta'''\sin\psi\sin\varphi)^2\\
&+G'''(\gamma+\gamma'\cos\psi+\gamma''\sin\psi\cos\varphi+\gamma'''\sin\psi\sin\varphi)^2\\
&+G(\delta+\delta'\cos\psi+\delta''\sin\psi\cos\varphi+\delta'''\sin\psi\sin\varphi)^2\\
=&(G+G'\cos P^2+G''\sin P^2\cos\vartheta^2+G'''\sin P^2\sin\vartheta^2)\times\\
&(\delta+\delta'\cos\psi+\delta''\sin\psi\cos\varphi+\delta'''\sin\psi\sin\varphi)^2,
\end{aligned}$$

abire in expressionem $k\varrho$.

Hinc aequationibus satisfieri debet decem hisce:

II.
$$\begin{cases}
G'\alpha\alpha+G''\beta\beta+G'''\gamma\gamma+G\delta\delta=ak,\\
G'\alpha'\alpha'+G''\beta'\beta'+G'''\gamma'\gamma'+G\delta'\delta'=a'k,\\
G'\alpha''\alpha''+G''\beta''\beta''+G'''\gamma''\gamma''+G\delta''\delta''=a''k,\\
G'\alpha'''\alpha'''+G''\beta'''\beta'''+G'''\gamma'''\gamma'''+G\delta'''\delta'''=a'''k,\\
G'\alpha\alpha'+G''\beta\beta'+G'''\gamma\gamma'+G\delta\delta'=b'k,\\
G'\alpha\alpha''+G''\beta\beta''+G'''\gamma\gamma''+G\delta\delta''=b''k,\\
G'\alpha\alpha'''+G''\beta\beta'''+G'''\gamma\gamma'''+G\delta\delta'''=b'''k,\\
G'\alpha''\alpha'''+G''\beta''\beta'''+G'''\gamma''\gamma'''+G\delta''\delta'''=c'k,\\
G'\alpha'''\alpha'+G''\beta'''\beta'+G'''\gamma'''\gamma'+G\delta'''\delta'=c''k,\\
G'\alpha'\alpha''+G''\beta'\beta''+G'''\gamma'\gamma''+G\delta'\delta''=c'''k.
\end{cases}$$

Per aequationes viginti I. et II. generaliter loquendo et sedecim coefficientes α, β, γ etc. et quatuor quantitates G, G', G'', G''' determinatae sunt. Adnotandum insuper, aequationes I. ex aequationibus II. derivari, positis $G'=G''=G'''=1$, $G=-1$; $a'=a''=a'''=1$, $a=-1$; $b'=b''=b'''=c'=c''=c'''=0$. Quibus positis de formulis, quaecunque de aequationibus II. demanant, earum similes derivare licet. Idem, ut in re simili, monuimus in commentatione de axibus principalibus superficierum secundi ordinis.

5.

Dato systemate aequationum:

$$\begin{aligned}
\alpha\mu+\beta x+\gamma y+\delta z&=m,\\
\alpha'\mu+\beta' x+\gamma' y+\delta' z&=m',\\
\alpha''\mu+\beta'' x+\gamma'' y+\delta'' z&=m'',\\
\alpha'''\mu+\beta''' x+\gamma''' y+\delta''' z&=m''',
\end{aligned}$$

ponamus earum resolutione erui:

$$\begin{aligned}
Am + A'm' + A''m'' + A'''m''' &= u,\\
Bm + B'm' + B''m'' + B'''m''' &= x,\\
Cm + C'm' + C''m'' + C'''m''' &= y,\\
Dm + D'm' + D''m'' + D'''m''' &= z.
\end{aligned}$$

Valores sedecim quantitatum A, B, etc. supprimimus eorum prolixitatis causa; in libris algebraicis passim traduntur, et algorithmus, cuius ope formantur, hodie abunde notus est. His positis, ubi ex aequationibus (II.) selegimus sequentes:

$$\begin{aligned}
\alpha\,.\,G'\alpha + \beta\,.\,G''\beta + \gamma\,.\,G'''\gamma + \delta\,.\,G\delta &= ak,\\
\alpha'.\,G'\alpha + \beta'.\,G''\beta + \gamma'.\,G'''\gamma + \delta'.\,G\delta &= b'k,\\
\alpha''.\,G'\alpha + \beta''.\,G''\beta + \gamma''.\,G'''\gamma + \delta''.\,G\delta &= b''k,\\
\alpha'''.\,G'\alpha + \beta'''.\,G''\beta + \gamma'''.\,G'''\gamma + \delta'''.\,G\delta &= b'''k,
\end{aligned}$$

earum resulotione nanciscimur:

III.
$$\begin{cases}
k(Aa + A'b' + A''b'' + A'''b''') = G'\alpha,\\
k(Ba + B'b' + B''b'' + B'''b''') = G''\beta,\\
k(Ca + C'b' + C''b'' + C'''b''') = G'''\gamma,\\
k(Da + D'b' + D''b'' + D'''b''') = G\delta.
\end{cases}$$

Eodem modo obtinetur:

$$\begin{cases}
k(Ab' + A'a' + A''c''' + A'''c'') = G'\alpha',\\
k(Bb' + B'a' + B''c''' + B'''c'') = G''\beta',\\
k(Cb' + C'a' + C''c''' + C'''c'') = G'''\gamma',\\
k(Db' + D'a' + D''c''' + D'''c'') = G\delta'.
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
k(Ab'' + A'c''' + A''a'' + A'''c') = G'\alpha'',\\
k(Bb'' + B'c''' + B''a'' + B'''c') = G''\beta'',\\
k(Cb'' + C'c''' + C''a'' + C'''c') = G'''\gamma'',\\
k(Db'' + D'c''' + D''a'' + D'''c') = G\delta''.
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
k(Ab''' + A'c'' + A''c' + A'''a''') = G'\alpha''',\\
k(Bb''' + B'c'' + B''c' + B'''a''') = G''\beta''',\\
k(Cb''' + C'c'' + C''c' + C'''a''') = G'''\gamma''',\\
k(Db''' + D'c'' + D''c' + D'''a''') = G\delta'''.
\end{cases}$$

Ex his aequationibus modo dicto aliae derivantur, quae aequationibus (I.) respondent, sequentes:

IV.
$$\begin{cases}
\alpha = -kA, & \beta = -kB, & \gamma = -kC, & \delta = kD,\\
\alpha' = kA', & \beta' = kB', & \gamma' = kC', & \delta' = -kD',\\
\alpha'' = kA'', & \beta'' = kB'', & \gamma'' = kC'', & \delta'' = -kD'',\\
\alpha''' = kA''', & \beta''' = kB''', & \gamma''' = kC''', & \delta''' = -kD'''.
\end{cases}$$

6.

Utrisque aequationibus combinatis, statim prodeunt haec quatuor aequationum systemata:

V.
$$\left\{\begin{array}{llll}
1) & 0 = A(a+G') + A'b' & + A''b'' & + A'''b''', \\
& 0 = Ab' & + A'(a'-G') + A''c''' & + A'''c'', \\
& 0 = Ab'' & + A'c''' + A''(a''-G') & + A'''c', \\
& 0 = Ab''' & + A'c'' + A''c' & + A'''(a'''-G'), \\
2) & 0 = B(a+G'') + B'b' & + B''b'' & + B'''b''', \\
& 0 = Bb' & + B'(a'-G'') + B''c''' & + B'''c'', \\
& 0 = Bb'' & + B'c''' + B''(a''-G'') & + B'''c', \\
& 0 = Bb''' & + B'c'' + B''c' & + B'''(a'''-G''), \\
3) & 0 = C(a+G''') + C'b' & + C''b'' & + C'''b''', \\
& 0 = Cb' & + C'(a'-G''') + C''c''' & + C'''c'', \\
& 0 = Cb'' & + C'c''' + C''(a''-G''') & + C'''c', \\
& 0 = Cb''' & + C'c'' + C''c' & + C'''(a'''-G'''), \\
4) & 0 = D(a-G) + D'b' & + D''b'' & + D'''b''', \\
& 0 = Db' & + D'(a'+G) + D''c''' & + D'''c'', \\
& 0 = Db'' & + D'c''' + D''(a''+G) & + D'''c', \\
& 0 = Db''' & + D'c'' + D''c' & + D'''(a'''+G).
\end{array}\right.$$

Ex eliminatione quantitatum A, A', A'', A''' e primo systemate obtinetur aequatio, per quam G' datam esse censeri debet; simili modo e secundo, tertio, quarto systemate eliminatis resp. B, B', B'', B'''; C, C', C'', C'''; D, D', D'', D''' obtinentur aequationes, per quas resp. G'', G''', G datas esse videmus. Primo autem intuitu quatuor systematum apparet, omnes eas aequationes respectu quantitatum G, $-G'$, $-G''$, $-G'''$ omnino easdem fore, ita ut, si una aliqua e quantitatibus G, $-G'$, $-G''$, $-G'''$ per x denotetur, una eademque aequatio inter x et quantitates datas omnes illas quatuor quantitates G, $-G'$, $-G''$, $-G'''$ tamquam radices exhibitura sit. Fit illa, eliminationis negotio rite instituto:

VI. $$\begin{aligned} 0 = {} & (a-x)(a'+x)(a''+x)(a'''+x) \\ & -(a-x)(a'+x)c'c' - (a-x)(a''+x)c''c'' - (a-x)(a'''+x)c'''c''' \\ & -(a''+x)(a'''+x)b'b' - (a'''+x)(a'+x)b''b'' - (a'+x)(a''+x)b'''b''' \\ & +2c'c''c'''(a-x) + 2c'b''b'''(a'+x) + 2c''b'''b'(a''+x) + 2c'''b'b''(a'''+x) \\ & +b'b'c'c' + b''b''c''c'' + b'''b'''c'''c''' - 2b'b''c'c'' - 2b''b'''c''c''' - 2b'''b'c'''c'. \end{aligned}$$

Naturam huius aequationis biquadraticae altius indagandi gravissimum negotium, ulteriori ea de re disquisitioni reservamus.

7.

Inter sedecim quantitates α, β, etc. et sedecim, quae ex iis derivantur, A, A', etc. plurimae intercedunt relationes perelegantes, quae cum analystis ex iis, quae **Laplace** *), **Vandermonde** **), in commentariis academiae Parisiensis A. 1772. p. II., **Gauss** in disquis. arithm. sectio V., J. **Binet** ***) in vol. IX. diariorum instituti polytechnici Parisiensis, aliique tradiderunt, satis notae sint, paucas tantum referam, quae casu nostro speciali ope aequationum (IV.) facile ex iis derivantur. Primo adnotabo decem sequentes, aequationum (I.) similes:

$$\text{VII.}\quad \begin{cases} -\alpha\alpha+\alpha'\alpha'+\alpha''\alpha''+\alpha'''\alpha''' = k, \\ -\beta\beta+\beta'\beta'+\beta''\beta''+\beta'''\beta''' = k, \\ -\gamma\gamma+\gamma'\gamma'+\gamma''\gamma''+\gamma'''\gamma''' = k, \\ -\delta\delta+\delta'\delta'+\delta''\delta''+\delta'''\delta''' = -k, \\ -\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\alpha'''\beta''' = 0, \\ -\alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''+\alpha'''\gamma''' = 0, \\ -\alpha\delta+\alpha'\delta'+\alpha''\delta''+\alpha'''\delta''' = 0, \\ -\beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''+\beta'''\gamma''' = 0, \\ -\gamma\delta+\gamma'\delta'+\gamma''\delta''+\gamma'''\delta''' = 0, \\ -\delta\beta+\delta'\beta'+\delta''\beta''+\delta'''\beta''' = 0. \end{cases}$$

Deinde probari possunt aequationes sequentes octodecim:

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} \alpha\beta'-\alpha'\beta = -(\gamma''\delta'''-\gamma'''\delta'')\varepsilon, & \alpha'\beta''-\alpha'\beta' = (\gamma\delta'''-\gamma'''\delta)\varepsilon, \\ \alpha\beta''-\alpha''\beta = -(\gamma'''\delta'-\gamma'\delta''')\varepsilon, & \alpha''\beta'''-\alpha'''\beta'' = (\gamma\delta'-\gamma'\delta)\varepsilon, \\ \alpha\beta'''-\alpha'''\beta = -(\gamma'\delta''-\gamma''\delta')\varepsilon, & \alpha'''\beta'-\alpha'\beta''' = (\gamma\delta''-\gamma''\delta)\varepsilon, \\ \alpha\gamma'-\alpha'\gamma = -(\delta''\beta'''-\delta'''\beta'')\varepsilon, & \alpha'\gamma''-\alpha''\gamma' = (\delta\beta'''-\delta'''\beta)\varepsilon, \\ \alpha\gamma''-\alpha''\gamma = -(\delta'''\beta'-\delta'\beta''')\varepsilon, & \alpha''\gamma'''-\alpha'''\gamma'' = (\delta\beta'-\delta'\beta)\varepsilon, \\ \alpha\gamma'''-\alpha'''\gamma = -(\delta'\beta''-\delta''\beta')\varepsilon, & \alpha'''\gamma'-\alpha'\gamma''' = (\delta\beta''-\delta''\beta)\varepsilon, \\ \alpha\delta'-\alpha'\delta = (\beta''\gamma'''-\beta'''\gamma'')\varepsilon, & \alpha'\delta''-\alpha''\delta' = -(\beta\gamma'''-\beta'''\gamma)\varepsilon, \\ \alpha\delta''-\alpha''\delta = (\beta'''\gamma'-\beta'\gamma''')\varepsilon, & \alpha''\delta'''-\alpha'''\delta'' = -(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\varepsilon, \\ \alpha\delta'''-\alpha'''\delta = (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')\varepsilon, & \alpha'''\delta'-\alpha'\delta''' = -(\beta\gamma''-\beta''\gamma)\varepsilon, \end{cases}$$

designante ε vel $+1$, vel -1.

*) Recherches sur le calcul intégral ou le système du monde, pg. 294 – 304.

**) Mémoire sur l'élimination, pg. 516. sqq.

***) Mémoire sur un système de formules analytiques etc.

8.

Ex aequationibus, per quas P, ϑ per ψ, φ expressimus, videlicet:

$$\cos P = \frac{\alpha+\alpha'\cos\psi+\alpha''\sin\psi\cos\varphi+\alpha'''\sin\psi\sin\varphi}{\delta+\delta'\cos\psi+\delta''\sin\psi\cos\varphi+\delta'''\sin\psi\sin\varphi},$$

$$\sin P\cos\vartheta = \frac{\beta+\beta'\cos\psi+\beta''\sin\psi\cos\varphi+\beta'''\sin\psi\sin\varphi}{\delta+\delta'\cos\psi+\delta''\sin\psi\cos\varphi+\delta'''\sin\psi\sin\varphi},$$

$$\sin P\sin\vartheta = \frac{\gamma+\gamma'\cos\psi+\gamma''\sin\psi\cos\varphi+\gamma'''\sin\psi\sin\varphi}{\delta+\delta'\cos\psi+\delta''\sin\psi\cos\varphi+\delta'''\sin\psi\sin\varphi},$$

ope aequationum (I.) facile probantur sequentes, per quas ψ, φ vice versa per P, ϑ exprimuntur:

IX.
$$\begin{cases} \delta-\alpha\cos P-\beta\sin P\cos\vartheta-\gamma\sin P\sin\vartheta = \dfrac{k}{\delta+\delta'\cos\psi+\delta''\sin\psi\cos\varphi+\delta'''\sin\psi\sin\varphi}, \\ \cos\psi = \dfrac{-\delta'+\alpha'\cos P+\beta'\sin P\cos\vartheta+\gamma'\sin P\sin\vartheta}{\delta-\alpha\cos P-\beta\sin P\cos\vartheta-\gamma\sin P\sin\vartheta}, \\ \sin\psi\cos\varphi = \dfrac{-\delta''+\alpha''\cos P+\beta''\sin P\cos\vartheta+\gamma''\sin P\sin\vartheta}{\delta-\alpha\cos P-\beta\sin P\cos\vartheta-\gamma\sin P\sin\vartheta}, \\ \sin\psi\sin\varphi = \dfrac{-\delta'''+\alpha'''\cos P+\beta'''\sin P\cos\vartheta+\gamma'''\sin P\sin\vartheta}{\delta-\alpha\cos P-\beta\sin P\cos\vartheta-\gamma\sin P\sin\vartheta}. \end{cases}$$

9.

Restat, ut ipsarum sedecim quantitatum α, β, etc. eruantur valores. Id quod fit formulis sequentibus:

X.
$$\begin{cases} \dfrac{\alpha\alpha}{k} = \dfrac{(a'-G')(a''-G')(a'''-G')-c'c'(a'-G')-c''c''(a''-G'')-c'''c'''(a'''-G')+2c'c''c'''}{(G'+G)(G'-G'')(G'-G''')}, \\ \dfrac{\alpha'\alpha'}{k} = \dfrac{(a''-G')(a'''-G')(a+G')-c'c'(a+G')-b'''b'''(a''-G')-b''b''(a'''-G')+2b''b'''c'}{(G'+G)(G'-G'')(G'-G''')}, \\ \dfrac{\alpha''\alpha''}{k} = \dfrac{(a'''-G')(a+G')(a'-G')-c''c''(a+G')-b'b'(a'''-G')-b'''b'''(a'-G')+2b'''b'c''}{(G'+G)(G'-G'')(G'-G''')}, \\ \dfrac{\alpha'''\alpha'''}{k} = \dfrac{(a+G')(a'-G')(a''-G')-c'''c'''(a+G')-b''b''(a'-G')-b'b'(a''-G')+2b'b''c'''}{(G'+G)(G'-G'')(G'-G''')}. \end{cases}$$

Ex his aequationibus tria alia systemata derivari possunt, ubi loco

G, G', G'', G''', $\alpha\alpha$, $\alpha'\alpha'$, $\alpha''\alpha''$, $\alpha'''\alpha'''$ resp. ponitur
G, G'', G', G''', $\beta\beta$, $\beta'\beta'$, $\beta''\beta''$, $\beta'''\beta'''$,
G, G''', G'', G', $\gamma\gamma$, $\gamma'\gamma'$, $\gamma''\gamma''$, $\gamma'''\gamma'''$,
$-G'$, $-G$, G'', G''', $-\delta\delta$, $-\delta'\delta'$, $-\delta''\delta''$, $-\delta'''\delta'''$.

Porro adnotandum est, producta binarum α, α', α'', α''', binarum β, β', β'', β''', binarum γ, γ', γ'', γ''', binarum δ, δ', δ'', δ''' rationaliter exprimi posse. Hinc ipsarum α, β, γ, δ signis pro lubitu acceptis, reliquarum signa per illa determinata sunt. Fit autem:

$$\text{XI.}\quad \begin{cases} \frac{\alpha\alpha'}{k} = \frac{b'(a''-G')(a'''-G') - c''b'''(a''-G') - c'''b''(a'''-G') - b'c'c' + b''c'c'' + b'''c'c'''}{(G'+G)(G'-G'')(G'-G''')}, \\ \frac{\alpha\alpha''}{k} = \frac{b''(a'''-G')(a'-G') - c'''b'(a'''-G') - c'b'''(a'-G') - b''c''c'' + b'''c''c''' + b'c''c'}{(G'+G)(G'-G'')(G'-G''')}, \\ \frac{\alpha\alpha'''}{k} = \frac{b'''(a'-G')(a''-G') - c'b''(a'-G') - c''b'(a''-G') - b'''c'''c''' + b'c'''c' + b''c'''c''}{(G'+G)(G'-G'')(G'-G''')}, \\ \frac{\alpha''\alpha'''}{k} = \frac{c'(a+G')(a'-G') - c''c'''(a+G') - b''b'''(a'-G') - c'b'b' + c''b'b'' + c'''b'b'''}{(G'+G)(G'-G'')(G'-G''')}, \\ \frac{\alpha'''\alpha'}{k} = \frac{c''(a+G')(a''-G') - c'''c'(a+G') - b'''b'(a''-G') - c''b''b'' + c'''b''b''' + c'b''b'}{(G'+G)(G'-G'')(G'-G''')}, \\ \frac{\alpha'\alpha''}{k} = \frac{c'''(a+G')(a'''-G') - c'c''(a+G') - b'b''(a'''-G') - c'''b'''b''' + c'b'''b' + c''b'''b''}{(G'+G)(G'-G'')(G'-G''')}. \end{cases}$$

Ex his formulis aliae derivantur reliquae, ponendo loco

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} k, & G, & G', & G'', & G''', & \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \alpha''' \text{ resp.} \\ k, & G, & G'', & G', & G''', & \beta, & \beta', & \beta'', & \beta''', \\ k, & G, & G''', & G'', & G', & \gamma, & \gamma', & \gamma'', & \gamma''', \\ -k, & -G', & -G, & G'', & G''', & \delta, & \delta', & \delta'', & \delta'''. \end{array}$$

Hae formulae inter alia docent, pro quantitatibus G, $-G'$, $-G''$, $-G'''$, ne e quantitatibus α, β etc. quaedam in infinitum abeant, diversas statui debere aequationis (VI.) radices. Ceterum analysin, cuius ope aequationes (X. et XI.) inventae sunt, brevitati ut consulatur, supprimimus.

10.

Jam quoties integrale duplex

$$\iint U \partial P \partial \vartheta,$$

designante U functionem aliquam quantitatum P, ϑ, auxilio aequationum

$$f(P, \vartheta) = \Pi(\psi, \varphi),$$
$$F(P, \vartheta) = \chi(\psi, \varphi),$$

transformare placet, notum est, fieri

$$\iint U \partial P \partial \vartheta = \iint U \partial \psi \partial \varphi \frac{\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial \psi}}{\frac{\partial f}{\partial P}\cdot\frac{\partial F}{\partial \vartheta} - \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial F}{\partial P}}.$$

Casu nostro, quia est

$$\delta + \delta'\cos\psi + \delta''\sin\psi\cos\varphi + \delta'''\sin\psi\sin\varphi = \frac{k}{\delta - \alpha\cos P - \beta\sin P\cos\vartheta - \gamma\sin P\sin\vartheta},$$

poni potest, ubi

$$t = \delta - \alpha\cos P - \beta\sin P\cos\vartheta - \gamma\sin P\sin\vartheta,$$

$$f(P, \vartheta) = \frac{k}{t}\sin P\cos\vartheta,$$
$$F(P, \vartheta) = \frac{k}{t}\sin P\sin\vartheta,$$
$$\Pi(\psi, \varphi) = \beta + \beta'\cos\psi + \beta''\sin\psi\cos\varphi + \beta'''\sin\psi\sin\varphi,$$
$$\chi(\psi, \varphi) = \gamma + \gamma'\cos\psi + \gamma''\sin\psi\cos\varphi + \gamma'''\sin\psi\sin\varphi.$$

Hinc erit

$$t''\left(\frac{\partial f}{\partial P}\cdot\frac{\partial F}{\partial\vartheta} - \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial F}{\partial P}\right) =$$
$$kk\sin Pt\left(t\cos P - \frac{\partial t}{\partial P}\sin P\right) = kk\sin P.t(\delta\cos P - \alpha) =$$
$$k\sin P.tt\{(\delta\alpha' - \delta'\alpha)\cos\psi + (\delta\alpha'' - \delta''\alpha)\sin\psi\cos\varphi + (\delta\alpha''' - \alpha\delta''')\sin\psi\sin\varphi\},$$

quam expressionem propter aequationes (VIII.) in hanc abire videmus:

$$-k\varepsilon\sin P\,tt\{(\beta''\gamma''' - \beta'''\gamma'')\cos\psi + (\beta'''\gamma' - \beta'\gamma''')\sin\psi\cos\varphi + (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')\sin\psi\sin\varphi\}.$$

Porro erit $\frac{\partial\Pi}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\psi} =$

$$\sin\psi\{-\beta'\sin\psi + \beta''\cos\psi\cos\varphi + \beta'''\cos\psi\sin\varphi\}\{-\gamma''\sin\varphi + \gamma'''\cos\varphi\} -$$
$$\sin\psi\{-\gamma'\sin\psi + \gamma''\cos\psi\cos\varphi + \gamma'''\cos\psi\sin\varphi\}\{-\beta''\sin\varphi + \beta'''\cos\varphi\} =$$
$$\sin\psi\{(\beta''\gamma''' - \beta'''\gamma'')\cos\psi + (\beta'''\gamma' - \beta'\gamma''')\sin\psi\cos\varphi + (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')\sin\psi\sin\varphi\}.$$

Unde

$$\frac{\frac{\partial\Pi}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\psi}}{\frac{\partial f}{\partial P}\cdot\frac{\partial F}{\partial\vartheta} - \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial F}{\partial P}} = -\frac{\sin\psi\,tt}{k\varepsilon\sin P}.$$

Jamjam quia

$$G + G'\cos P^2 + G''\sin P^2\cos\vartheta^2 + G''\sin P^2\sin\vartheta^2 = \frac{tt\varepsilon}{k},$$

fit tandem:

$$\pm\iint\frac{\sin P\,\partial P\,\partial\vartheta}{G + G'\cos P^2 + G''\sin P^2\cos\vartheta^2 + G'''\sin P^2\sin\vartheta^2} = \iint\frac{\sin\psi\,\partial\psi\,\partial\varphi}{\varepsilon}.$$

Disquisitiones haec cum ulterius sint producendae, commentationem hanc qualemcunque indulgentiae analystarum commendatam volo.

Scr. M. Juni. 1827, ad Universitatem Regiomont.

21.

Bemerkungen über eine Art von Functionen, welche ähnliche Eigenschaften haben, wie der Cosinus und Sinus.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

1.

Wenn e die Zahl bezeichnet, deren natürlicher Logarithme 1 ist, so ist bekanntlich

$$1.\quad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}\cdots+\frac{x^m}{2.3\ldots.m},$$

welche Reihe auch für jeden beliebigen, endlichen Werth von x convergirt.

Wenn man ferner eine der imaginairen Wurzeln der Gleichung

$$2.\quad x^n-1=0,$$

gleichviel welche, durch α bezeichnet, so sind bekanntlich die n Wurzeln dieser Gleichung, der Reihe nach:

$$3.\quad \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3\ldots.\ \alpha^n,$$

und wenn man irgend eine von den Wurzeln der Gleichung

$$4.\quad x^n+1=0$$

durch β bezeichnet, so sind die n Wurzeln dieser Gleichung, der Reihe nach:

$$5.\quad \beta\alpha,\ \beta\alpha^2,\ \beta\alpha^3\ldots.\ \beta\alpha^n.$$

Desgleichen ist bekanntlich

$$6.\quad \begin{cases} \alpha+\alpha^2+\alpha^3\ldots.+\alpha^n=0 \text{ und} \\ \beta\alpha+\beta\alpha^2+\beta\alpha^3\ldots.+\beta\alpha^n=0. \end{cases}$$

Setzt man in (1.), der Reihe nach, αx, $\alpha^2 x$, $\alpha^3 x\ldots.\alpha^n x$ und $\beta\alpha x$, $\beta\alpha^2 x$, $\beta\alpha^3 x\ldots.\beta\alpha^n x$ statt x, so erhält man:

$$7.\quad \begin{cases} e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\alpha^m x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ e^{\alpha^2 x} = 1 + \alpha^2 x + \frac{\alpha^4 x^2}{2} + \frac{\alpha^6 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\alpha^{2m} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ e^{\alpha^3 x} = 1 + \alpha^3 x + \frac{\alpha^6 x^2}{2} + \frac{\alpha^9 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\alpha^{3m} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\alpha^n x} = 1 + \alpha^n x + \frac{\alpha^{2n} x^2}{2} + \frac{\alpha^{3n} x^3}{2.3} \ldots + \frac{\alpha^{nm} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \end{cases}$$

und

$$8.\quad \begin{cases} e^{\beta\alpha x} = 1 + \beta\alpha x + \frac{\beta^2 \alpha^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 \alpha^3 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\beta^m \alpha^m x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ e^{\beta\alpha^2 x} = 1 + \beta\alpha^2 x + \frac{\beta^2 \alpha^4 x^2}{2} + \frac{\beta^3 \alpha^6 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\beta^m \alpha^{2m} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ e^{\beta\alpha^3 x} = 1 + \beta\alpha^3 x + \frac{\beta^2 \alpha^6 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 \alpha^9 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\beta^m \alpha^{3m} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\beta\alpha^n x} = 1 + \beta\alpha^n x + \frac{\beta^2 \alpha^{2n} x^2}{2} + \frac{\beta^3 \alpha^{3n} x^3}{2.3} \ldots + \frac{\beta^m \alpha^{nm} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \end{cases}$$

Insofern nun n eine Primzahl ist, so sind die Potenzen

$$\alpha^m,\ \alpha^{2m},\ \alpha^{3m} \ldots\ldots \alpha^{nm}$$

von α, weil z. B. $\alpha^{n+1} = \alpha$, $\alpha^{n+2} = \alpha^2$ etc., für jedes beliebige m, welches nicht 1, oder ein beliebiges Vielfache von n ist, den Potenzen

$$\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^n$$

von α gleich, nur in verschiedener Aufeinanderfolge. Also ist nicht allein

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \ldots\ldots + \alpha^n = 0 \quad (6.),$$

sondern auch,

$$9.\quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 \ldots\ldots + \alpha^{2n} = 0, \\ \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 \ldots\ldots + \alpha^{3n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^m + \alpha^{2m} + \alpha^{3m} \ldots\ldots + \alpha^{mn} = 0, \end{cases}$$

in sofern m nicht 1 oder ein Vielfaches von n ist. Hingegen für $m = n$ ist $\alpha^n = 1$, $\alpha^{2n} = 1$ etc., also

$$10.\quad \alpha^n + \alpha^{2n} + \alpha^{3n} \ldots\ldots + \alpha^{n^2} = n.$$

Desgleichen ist

$$11.\quad \beta^n = -1,\ \beta^{2n} = +1,\ \beta^{3n} = -1 \text{ etc.}$$

Nimmt man daher die Summe der Gleichungen (7. und 8.), so findet man, vermöge (6., 9., 10. und 11.):

12.

$$12.\quad e^{\alpha x} + e^{\alpha^2 x} + e^{\alpha^3 x} \ldots\ldots + e^{\alpha^n x}$$
$$= n\left(1 + \frac{x^n}{2.3\ldots.n} + \frac{x^{2n}}{2.3\ldots.2n} + \frac{x^{3n}}{2.3\ldots.3n} \ldots.\right) \text{ und}$$

$$13.\quad e^{\beta\alpha x} + e^{\beta\alpha^2 x} + e^{\beta\alpha^3 x} \ldots\ldots + e^{\beta\alpha^n x}$$
$$= n\left(1 + \frac{x^n \beta^n}{2.3\ldots.n} + \frac{x^{2n} \beta^{2n}}{2.3\ldots.2n} + \frac{x^{3n} \beta^{3n}}{2.3\ldots.3n} + \ldots.\right).$$

Multiplicirt man ferner in (7. und 8.) die erste Gleichung mit α^{n-1}, die zweite mit α^{n-2}, die dritte mit α^{n-3} u. s. w., und nimmt die Summe der Producte, so findet man, wie leicht zu sehen:

$$14.\quad \alpha^{n-1} e^{\alpha x} + \alpha^{n-2} e^{\alpha^2 x} + \alpha^{n-3} e^{\alpha^3 x} \ldots\ldots e^{\alpha^n x}$$
$$= n\left(x + \frac{x^{n+1}}{2.3\ldots.n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2.3\ldots.2n+1} + \frac{x^{3n+1}}{2.3\ldots.3n+1} \ldots.\right) \text{ und}$$

$$15.\quad \alpha^{n-1} e^{\beta\alpha x} + \alpha^{n-2} e^{\beta\alpha^2 x} + \alpha^{n-3} e^{\beta\alpha^3 x} + \ldots\ldots e^{\beta\alpha^n x}$$
$$= n\beta\left(x + \frac{x^{n+1} \beta^n}{2.3\ldots.n+1} + \frac{x^{2n+1} \beta^{2n}}{2.3\ldots.2n+1} + \frac{x^{3n+1} \beta^{3n}}{2.3\ldots.3n+1} + \ldots.\right).$$

Multiplicirt man in (7. und 8.) die erste Gleichung mit $\alpha^{2(n-1)}$, die zweite mit $\alpha^{2(n-2)}$, die dritte mit $\alpha^{2(n-3)}$ u. s. w., und nimmt die Summe der Producte, so findet man:

$$16.\quad \alpha^{2(n-1)} e^{\alpha x} + \alpha^{2(n-2)} e^{\alpha^2 x} + \alpha^{2(n-3)} e^{\alpha^3 x} \ldots\ldots + e^{\alpha^n x}$$
$$= n\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{n+2}}{2.3\ldots.n+2} + \frac{x^{2n+2}}{2.3\ldots.2n+2} + \frac{x^{3n+2}}{2.3\ldots.3n+2} \ldots.\right) \text{ und}$$

$$17.\quad \alpha^{2(n-1)} e^{\beta\alpha x} + \alpha^{2(n-2)} e^{\beta\alpha^2 x} + \alpha^{2(n-3)} e^{\beta\alpha^3 x} \ldots\ldots + e^{\beta\alpha^n x}$$
$$= n\beta^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{n+2}}{2.3\ldots.n+2} + \frac{x^{2n+2}}{2.3\ldots.2n+2} + \frac{x^{3n+2}}{2.3\ldots.3n+2} \ldots.\right).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man allgemein:

$$18.\quad \frac{\alpha^{m(n-1)} e^{\alpha x} + \alpha^{m(n-2)} e^{\alpha^2 x} + \alpha^{m(n-3)} e^{\alpha^3 x} \ldots\ldots + e^{\alpha^n x}}{n}$$
$$= \frac{x^m}{2.3\ldots.m} + \frac{x^{n+m}}{2.3\ldots.m+n} + \frac{x^{2n+m}}{2.3\ldots.2n+m} + \frac{x^{3n+m}}{2.3\ldots.3n+m} - \ldots.$$

und

$$19.\quad \frac{\alpha^{m(n-1)} e^{\beta\alpha x} + \alpha^{m(n-2)} e^{\beta\alpha^2 x} + \alpha^{m(n-3)} e^{\beta\alpha^3 x} \ldots\ldots + e^{\beta\alpha^n x}}{n\beta^m}$$
$$= \frac{x^m}{2.3\ldots.m} + \frac{x^{n+m}\beta^n}{2.3\ldots.m+n} + \frac{x^{2n+m}\beta^{2n}}{2.3\ldots.2n+m} + \frac{x^{3n+m}\beta^{3n}}{2.3\ldots.3n+m} - \ldots.$$

So kann man die Reihen rechterhand in (18. und 19.) für ein beliebiges m und n, durch Exponential-Gröfsen ausdrücken. Die Gleichung (19.)

findet man auch aus der Gleichung (18.), wenn man blos βx statt x setzt; wie gehörig.

2.

Wenn $n=1$, so ist $\alpha=1$ und $\beta=-1$, desgleichen kann m nur 0 sein. Also ist in diesem Falle, wegen der allgemeinen Gleichungen (18. und 19.):

$$20.\quad e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} \cdots \text{ und}$$

$$21.\quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} \cdots,$$

welches mit (1.) übereinstimmt.

Wenn $n=2$ ist, so ist $\alpha=-1$, $\beta=\sqrt{-1}(=i)$, und m kann 0 und 1 sein; also ist, zufolge (18. und 19.):

$$22.\quad \begin{cases} \frac{e^{-x}+e^{+x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^6}{2.3....6} + \frac{x^8}{2.3....8} \cdots \\ \frac{-e^{-x}+e^{+x}}{2} = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3...5} + \frac{x^7}{2.3....7} + \frac{x^9}{2.3....9} \cdots \end{cases}$$

$$23.\quad \begin{cases} \frac{e^{-ix}+e^{+ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3....6} + \frac{x^8}{2.3....8} \cdots \\ \frac{-e^{-ix}+e^{+ix}}{2i} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3...5} - \frac{x^7}{2.3....7} + \frac{x^9}{2.3....9} \cdots \end{cases}$$

Die Gröfsen in (23.) linkerhand bezeichnet man auch durch $\cos x$ und $\sin x$, und die Reihen rechterhand sind die bekannten für $\cos x$ und $\sin x$.

3.

Wenn $n=3$, welches der nächste Fall nach $n=2$ ist, so ist $\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, $\beta=-1$ und m kann 0, 1 oder 2 sein. Also ist, zufolge (18. und 19):

$$24.\quad \begin{cases} \frac{e^{\alpha x}+e^{\alpha^2 x}+e^{\alpha^3 x}}{3} = 1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3....6} + \frac{x^9}{2.3....9} + \frac{x^{12}}{2.3....12} \cdots \\ \frac{\alpha^2 e^{\alpha x}+\alpha e^{\alpha^2 x}+e^{\alpha^3 x}}{3} = x + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^7}{2.3....7} + \frac{x^{10}}{2.3....10} + \frac{x^{13}}{2.3...13} \cdots \\ \frac{\alpha e^{\alpha x}+\alpha^2 e^{\alpha^2 x}+e^{\alpha^3 x}}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{2.3....5} + \frac{x^8}{2.3....8} + \frac{x^{11}}{2.3....11} + \frac{x^{14}}{2.3....14} \cdots \end{cases}$$

$$25.\quad \begin{cases} \dfrac{e^{-ax}+e^{-a^2x}+e^{-a^3x}}{3} = 1-\dfrac{x^3}{2.3}+\dfrac{x^6}{2.3....6}-\dfrac{x^9}{2.3....9}+\dfrac{x^{12}}{2.3....12}\cdots \\ -\dfrac{a^2e^{-ax}+ae^{-a^2x}+e^{-a^3x}}{3} = x-\dfrac{x^4}{2.3.4}+\dfrac{x^7}{2.3....7}-\dfrac{x^{10}}{2.3....10}+\dfrac{x^{13}}{2.3....13}\cdots \\ \dfrac{ae^{-ax}+a^2e^{-a^2x}+e^{-a^3x}}{3} = \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^5}{2.3....5}+\dfrac{x^8}{2.3....8}-\dfrac{x^{11}}{2.3....11}+\dfrac{x^{14}}{2.3....14}\cdots \end{cases}$$

Man erhält auch die Reihen (25.) aus denjenigen (24.), wenn man blos $-x$ statt $+x$ setzt. Desgleichen sind, wie leicht zu sehen, die Gleichungen (24.) die Differentiale von einander. Bezeichnet man daher die Reihen rechts in (24. und 25.), der Kürze wegen, durch $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$ und $f_1 x$, $f_2 x$, $f_3 x$, und zwar so, dafs

$$26.\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^5}{2.3....5}+\dfrac{x^8}{2.3....8}+\dfrac{x^{11}}{2.3....11}\cdots = \varphi_3 x, \\ x+\dfrac{x^4}{2.3.4}+\dfrac{x^7}{2.3....7}+\dfrac{x^{10}}{2.3....10}\cdots = \varphi_2 x, \\ 1+\dfrac{x^3}{2.3}+\dfrac{x^6}{2.3....6}+\dfrac{x^9}{2.3....9}\cdots = \varphi_1 x, \end{cases}$$

$$27.\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^5}{2.3....5}+\dfrac{x^8}{2.3....8}-\dfrac{x^{11}}{2.3....11}\cdots = f_3 x, \\ x-\dfrac{x^4}{2.3.4}+\dfrac{x^7}{2.3....7}-\dfrac{x^{10}}{2.3....10}\cdots = f_2 x, \\ 1-\dfrac{x^3}{2.3}+\dfrac{x^6}{2.3....6}-\dfrac{x^9}{2.3....9}\cdots = f_1 x, \end{cases}$$

so ist, weil $a^3 = 1$:

$$28.\quad \begin{cases} e^x + e^{ax} + e^{a^2x} = 3\varphi_1 x = 3\partial\varphi_2 x = 3\partial^2\varphi_3 x, \\ e^x + a^2e^{ax} + ae^{a^2x} = 3\varphi_2 x = 3\partial\varphi_3 x = 3\partial^2\varphi_1 x, \\ e^x + ae^{ax} + a^2e^{a^2x} = 3\varphi_3 x = 3\partial\varphi_1 x = 3\partial^2\varphi_2 x, \end{cases}$$

und

$$29.\quad \begin{cases} e^{-x} + e^{-ax} + e^{-a^2x} = 3f_1 x = 3\partial f_2 x = 3\partial^2 f_3 x, \\ e^{-x} + a^2e^{-ax} + ae^{-a^2x} = -3f_2 x = -3\partial f_3 x = +3\partial^2 f_1 x, \\ e^{-x} + ae^{-ax} + a^2e^{-a^2x} = 3f_3 x = -3\partial f_1 x = -3\partial^2 f_2 x. \end{cases}$$

Hieraus kann man für die Functionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$ und $f_1 x$, $f_2 x$, $f_3 x$ allerhand Folgerungen ziehen.

Erstlich. I. Man findet z. B.

$$30.\quad \begin{cases} 27\varphi_1 x^3 = e^{3x} + e^{3\alpha x} + e^{3\alpha^2 x} + 3e^{(2+\alpha)x} + 3e^{(2+\alpha^2)x} + 3e^{(2\alpha+1)x} \\ \qquad\qquad + 3e^{(2\alpha+\alpha^2)x} + 3e^{(2\alpha^2+1)x} + 3e^{(2\alpha^2+\alpha)x} + 6, \\ 27\varphi_2 x^3 = e^{3x} + e^{3\alpha x} + e^{3\alpha^2 x} + 3\alpha^2 e^{(2+\alpha)x} + 3\alpha e^{(2+\alpha^2)x} + 3\alpha e^{(2\alpha+1)x} \\ \qquad\qquad + 3\alpha^2 e^{(2\alpha+\alpha^2)x} + 3\alpha^2 e^{(2\alpha^2+1)x} + 3\alpha e^{(2\alpha^2+\alpha)x} + 6, \\ 27\varphi_3 x^3 = e^{3x} + e^{3\alpha x} + e^{3\alpha^2 x} + 3\alpha e^{(2+\alpha)x} + 3\alpha^2 e^{(2+\alpha^2)x} + 3\alpha^2 e^{(2\alpha+1)x} \\ \qquad\qquad + 3\alpha e^{(2\alpha+\alpha^2)x} + 3\alpha e^{(2\alpha^2+1)x} + 3\alpha^2 e^{(2\alpha^2+\alpha)x} + 6. \end{cases}$$

Dieses giebt, wenn man die Summe nimmt:

$$31.\quad 9(\varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^3 + \varphi_3 x^3) = e^{3x} + e^{3\alpha x} + e^{3\alpha^2 x} + 6,$$

und weil, vermöge der ersten Gleichung (28.),

$$e^{3x} + e^{3\alpha x} + e^{3\alpha^2 x} = 3\varphi_1(3x) \text{ ist:}$$

$$32.\quad 3(\varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^3 + \varphi_3 x^3) = \varphi_1(3x) + 2.$$

II. Nimmt man von der Gleichung (32.) das erste Differential, so findet man, vermöge (28.):

$$33.\quad 3(\varphi_1 x^2 \varphi_3 x + \varphi_2 x^2 \varphi_1 x + \varphi_3 x^2 \varphi_2 x) = \varphi_3(3x).$$

Nimmt man von dieser Gleichung das erste Differential, so erhält man:

$$34.\quad 3(\varphi_1 x^2 \varphi_2 x + \varphi_2 x^2 \varphi_3 x + \varphi_3 x^2 \varphi_1 x) = \varphi_2(3x).$$

Nimmt man von dieser letzten Gleichung das erste Differential, so findet man:

$$35.\quad 6\varphi_1 x \varphi_2 x \varphi_3 x + \varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^3 + \varphi_3 x^3 = \varphi_1(3x).$$

Dieses giebt auch, wenn man die Gleichung (35.) dreimal nimmt, und davon die Gleichung (32.) abziehet:

$$18\,\varphi_1 x\,\varphi_2 x\,\varphi_3 x = 2\varphi_1(3x) - 2, \text{ oder}$$

$$36.\quad 9\varphi_1 x \varphi_2 x \varphi_3 x = \varphi_1(3x) - 1.$$

Ziehet man (36.) von (35.) ab, so erhält man:

$$37.\quad \varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^3 + \varphi_3 x^3 - 3\varphi_1 x \varphi_2 x \varphi_3 x = 1.$$

III. Wenn man zu den drei Gleichungen (28.) mit x, ähnlich mit y setzt, nemlich:

$$38.\quad \begin{cases} e^y + e^{\alpha y} + e^{\alpha^2 y} = 3\varphi_1 y, \\ e^y + \alpha^2 e^{\alpha y} + \alpha e^{\alpha^2 y} = 3\varphi_2 y, \\ e^y + \alpha e^{\alpha y} + \alpha^2 e^{\alpha^2 y} = 3\varphi_3 y, \end{cases}$$

und multiplicirt nun die Gleichungen (28.) mit den Gleichungen (38.), so erhält man:

$$39.\quad \begin{cases} 9\Phi_1 x\Phi_1 y = e^{x+y} + e^{\alpha x+y} + e^{\alpha^2 x+y} + e^{x+\alpha y} + e^{\alpha(x+y)} + e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + e^{x+\alpha^2 y} + e^{\alpha x+\alpha^2 y} + e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_2 x\Phi_2 y = e^{x+y} + \alpha^2 e^{\alpha x+y} + \alpha e^{\alpha^2 x+y} + \alpha^2 e^{x+\alpha y} + \alpha e^{\alpha(x+y)} + e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha e^{x+\alpha^2 y} + e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_3 x\Phi_3 y = e^{x+y} + \alpha e^{\alpha x+y} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+y} + \alpha e^{x+\alpha y} + \alpha^2 e^{\alpha(x+y)} + e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha^2 e^{x+\alpha^2 y} + e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_1 x\Phi_2 y = e^{x+y} + e^{\alpha x+y} + e^{\alpha^2 x+y} + \alpha^2 e^{x+\alpha y} + \alpha^2 e^{\alpha(x+y)} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha e^{x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_1 x\Phi_3 y = e^{x+y} + e^{\alpha x+y} + e^{\alpha^2 x+y} + \alpha e^{x+\alpha y} + \alpha e^{\alpha(x+y)} + \alpha e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha^2 e^{x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_2 x\Phi_1 y = e^{x+y} + \alpha^2 e^{\alpha x+y} + \alpha e^{\alpha^2 x+y} + e^{x+\alpha y} + \alpha^2 e^{\alpha(x+y)} + \alpha e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + e^{x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_2 x\Phi_3 y = e^{x+y} + \alpha^2 e^{\alpha x+y} + \alpha e^{\alpha^2 x+y} + \alpha e^{x+\alpha y} + e^{\alpha(x+y)} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha^2 e^{x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha x+\alpha^2 y} + e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_3 x\Phi_1 y = e^{x+y} + \alpha e^{\alpha x+y} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+y} + e^{x+\alpha y} + \alpha e^{\alpha(x+y)} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + e^{x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_3 x\Phi_2 y = e^{x+y} + \alpha e^{\alpha x+y} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+y} + \alpha^2 e^{x+\alpha y} + e^{\alpha(x+y)} + \alpha e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha e^{x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha x+\alpha^2 y} + e^{\alpha^2(x+y)}. \end{cases}$$

Daraus folgt, wie leicht zu sehen,

$$40.\quad \begin{cases} 3(\Phi_1 x\Phi_1 y + \Phi_2 x\Phi_3 y + \Phi_3 x\Phi_2 y) = e^{x+y} + e^{\alpha(x+y)} + e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 3(\Phi_2 x\Phi_2 y + \Phi_1 x\Phi_3 y + \Phi_3 x\Phi_1 y) = e^{x+y} + \alpha e^{\alpha(x+y)} + \alpha^2 e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 3(\Phi_3 x\Phi_3 y + \Phi_1 x\Phi_2 y + \Phi_2 x\Phi_1 y) = e^{x+y} + \alpha^2 e^{\alpha(x+y)} + \alpha e^{\alpha^2(x+y)}, \end{cases}$$

also ist, vermöge (28.):

$$41.\quad \begin{cases} \Phi_1 x\Phi_1 y + \Phi_2 x\Phi_3 y + \Phi_3 x\Phi_2 y = \Phi_1(x+y), \\ \Phi_2 x\Phi_2 y + \Phi_1 x\Phi_3 y + \Phi_3 x\Phi_1 y = \Phi_3(x+y), \\ \Phi_3 x\Phi_3 y + \Phi_1 x\Phi_2 y + \Phi_2 x\Phi_1 y = \Phi_2(x+y). \end{cases}$$

Desgleichen folgt aus (41. und 39.):

$$42.\quad (\Phi_1 x+\Phi_2 x+\Phi_3 x)(\Phi_1 y+\Phi_2 y+\Phi_3 y) = \Phi_1(x+y)+\Phi_2(x+y)+\Phi_3(x+y$$

IV. Aus (28.) folgt:

$$43.\quad \begin{cases} e^x = \Phi_1 x + \Phi_2 x + \Phi_3 x, \\ e^{\alpha x} = \Phi_1 x + \alpha\Phi_2 x + \alpha^2\Phi_3 x, \\ e^{\alpha^2 x} = \Phi_1 x + \alpha^2\Phi_2 x + \alpha\Phi_3 x, \end{cases}$$

also ist für einen beliebigen Exponenten m:

$$44.\quad \begin{cases} (\varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x)^m = \varphi_1 mx + \varphi_2 mx + \varphi_3 mx, \\ (\varphi_1 x + \alpha\varphi_2 x + \alpha^2\varphi_3 x)^m = \varphi_1 mx + \alpha\varphi_2 mx + \alpha^2\varphi_3 mx, \\ (\varphi_1 x + \alpha^2\varphi_2 x + \alpha\varphi_3 x)^m = \varphi_1 mx + \alpha^2\varphi_2 mx + \alpha\varphi_3 mx. \end{cases}$$

Daraus folgt auch:

$$45.\quad \begin{cases} 3\varphi_1 mx = (\varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x)^m + (\varphi_1 x + \alpha\varphi_2 x + \alpha^2\varphi_3 x)^m \\ \qquad\qquad + (\varphi_1 x + \alpha^2\varphi_2 x + \alpha\varphi_3 x)^m, \\ 3\varphi_2 mx = (\varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x)^m + \alpha^2(\varphi_1 x + \alpha\varphi_2 x + \alpha^2\varphi_3 x)^m \\ \qquad\qquad + \alpha(\varphi_1 x + \alpha^2\varphi_2 x + \alpha\varphi_3 x)^m, \\ 3\varphi_3 mx = (\varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x)^m + \alpha(\varphi_1 x + \alpha\varphi_2 x + \alpha^2\varphi_3 x)^m \\ \qquad\qquad + \alpha^2(\varphi_1 x + \alpha^2\varphi_2 x + \alpha\varphi_3 x)^m. \end{cases}$$

Zweitens. V. Die Gleichungen (29.) geben auf die Weise wie (30., 31. und 32.), wie leicht zu sehen:

$$46.\quad 3(f_1 x^3 - f_2 x^3 + f_3 x^3) = f_1(3x) + 2.$$

Nimmt man davon das erste Differential, so findet man, vermöge (29.):

$$47.\quad 3(f_1 x^2 f_3 x + f_2 x^2 f_1 x - f_3 x^2 f_2 x) = f_3(3x).$$

Das erste Differential von dieser neuen Gleichung giebt:

$$48.\quad 3(f_1 x^2 f_2 x - f_2 x^2 f_3 x - f_3 x^2 f_1 x) = f_2(3x).$$

Das erste Differential von dieser neuen Gleichung giebt:

$$49.\quad f_1 x^3 - f_2 x^3 + f_3 x^3 - 6 f_1 x f_2 x f_3 x = f_1(3x).$$

Dieses giebt auch, wenn man die Gleichung (49.) dreimal nimmt und von der Gleichung (47.) abziehet:

$$18 f_1 x f_2 x f_3 x = -2 f_1(3x) + 2, \text{ oder}$$

$$50.\quad 9 f_1 x f_2 x f_3 x = 1 - f_1(3x).$$

VI. Verfährt man ferner mit den durch f_1, f_2, f_3 bezeichneten Functionen wie in (III.), so werden die Resultate, welche man findet, wie leicht zu sehen, den dortigen ähnlich sein, nur dafs immer Alles, was f_2 enthält, das entgegengesetzte Zeichen hat. Es ist also, vermöge (41.):

$$51.\quad \begin{cases} f_1 x f_1 y - f_2 x f_3 y - f_3 x f_2 y = f_1(x+y), \\ f_2 x f_2 y + f_1 x f_3 y + f_3 x f_1 y = f_3(x+y), \\ -f_3 x f_3 y + f_1 x f_2 y + f_2 x f_1 y = f_2(x+y), \end{cases}$$

und, vermöge (42.):

$$52.\quad (f_1 x - f_2 x + f_3 x)(f_1 y - f_2 y + f_3 y) = f_1(x+y) - f_2(x+y) + f_3(x+y),$$

desgleichen, vermöge (44. 45.):

$$53.\quad \begin{cases} (f_1x - f_2x + f_3x)^m = f_1mx - f_2mx + f_3mx, \\ (f_1x - \alpha f_2x + \alpha^2 f_3x)^m = f_1mx - \alpha f_2mx + \alpha^2 f_3mx, \\ (f_1x - \alpha^2 f_2x + \alpha f_3x)^m = f_1mx - \alpha^2 f_2mx + \alpha f_3mx, \end{cases}$$

$$54.\quad \begin{cases} 3f_1mx = (f_1x - f_2x + f_3x)^m + (f_1x - \alpha f_2x + \alpha^2 f_3x)^m + (f_1x - \alpha^2 f_2x + \alpha f_3x)^m, \\ -3f_2mx = (f_1x - f_2x + f_3x)^m + \alpha^2(f_1x - \alpha f_2x + \alpha^2 f_3x)^m + \alpha(f_1x - \alpha^2 f_2x + \alpha f_3x)^m, \\ 3f_3mx = (f_1x - f_2x + f_3x)^m + \alpha(f_1x - \alpha f_2x + \alpha^2 f_3x)^m + \alpha^2(f_1x - \alpha^2 f_2x + \alpha f_3x)^m. \end{cases}$$

Wie man siehet, haben alle diese Resultate eine gewisse Aehnlichkeit mit den Gleichungen, welche die Eigenschaften der Sinus und Cosinus ausdrücken.

Man kann ferner $n = 4$, $n = 5$ u. s. w. setzen, und wird ähnliche Resultate finden. Wir überlassen einstweilen dem Leser den Gegenstand weiter zu verfolgen *).

---

*) Fast zu derselben Zeit, als ich diesen Aufsatz für das Journal erhielt, wurde mir auch von Herrn Magnus, Lehrer der Mathematik zu Berlin, eine Abhandlung über den nemlichen Gegenstand übergeben, dessen auf anderem Wege gefundenen Resultate mit den obigen, wo sie darauf zutreffen, auch übereinstimmen. Herr Magnus, nachdem er von dem gegenwärtigen Aufsatze gehört, willigte aber nicht ein, den seinigen in dem Journal abdrucken zu lassen. Da mir nun mit Gewifsheit bekannt ist, dafs die Verfasser der beiden Aufsätze von einander nicht wufsten, und einer des anderen Arbeit nicht kannte, so habe ich die Ueberzeugung, dafs beiden die obigen Ideen mit gleichem Recht angehören, welches ich zu bemerken nöthig glaubte.

Der Herausgeber.

22.

Ueber die Berechnung von Tafeln gegebener Functionen, z. B. der Logarithmen, der Kreisgröfsen etc.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

1.

Wenn man eine Reihe von Werthen einer und derselben Function, z. B. fz, für mehrere gleichviel, z. B. um 1, von einander verschiedene Werthe der Gröfse z, von welcher die Function fz abhängt, also eine Tafel der gegebenen Function in Zahlen berechnen will, so ist es bekanntlich zu unbequem, und wegen der mit der Menge der Rechnungen gewöhnlich noch in mehr als directem Verhältnifs stehenden Menge möglicher Rechnungsfehler zu unsicher, die verschiedenen Werthe der Function nach der gegebenen, oder auch vielleicht vorausgesetzten Regel ihrer Zusammensetzung, von Anfang an, einzeln zu berechnen. Die gewöhnlichen 100000 Logarithmen, z. B. auf 10 bis 12 Decimalstellen, einzeln zu berechnen, würde eine fast unermefsliche Arbeit sein.

Man hat daher verschiedene Hülfsmittel zur Erleichterung der Rechnung erdacht, die bei den verschiedenen Functionen verschieden sind, z. B. bei den Logarithmen die Zusammensetzung derselben durch die Addition der Logarithmen der Primzahlen, bei den trigonometrischen Functionen diese oder jene Einschaltung, u. s. w. Alle diese Hülfsmittel stehen aber in den meisten Fällen der Rechnung mit Differenzen von der ersten, zweiten, dritten etc. Ordnung bei weitem nach; denn durch die Differenzen reducirt sich alles auf blofse Addition und Subtraction, und sie sind immer anwendbar, wenn nur die Reihe, welche die gegebene Function ausdrückt, convergirt. Tafeln von Potenzen und Factoriellen mit ganzen positiven Exponenten, und überhaupt von rationalen ganzen Functionen, lassen sich durch Differenzen, und zwar, wenn der höchste Exponent n ist, durch die ersten n Differenzen, wie bekannt, genau berechnen. Tafeln von irrationalen und transcendenten Functionen hingegen lassen sich durch Differenzen, wenn auch eben so wenig, wie auf anderem Wege genau, so doch mit einer Annäherung aufstellen, welche gröfser ist als die, welche mit derselben Arbeit auf anderen Wegen erreicht werden kann.

2.

2.

Im Allgemeinen ist die Aufgabe folgende:

Es sind $n+1$ Werthe der Function

$$1.\quad fz = y,$$

für $n+1$ bestimmte Werthe von z gegeben: man soll, in einem bestimmten Umfange von z, eine bestimmte Zahl von Werthen der Function $fz = y$, für andere bestimmte z, vermittelst der Differenzen der gegebenen, oder als gegeben anzunehmenden Werthe von $fz = y$, finden.

Es sind überhaupt folgende Fälle möglich:

I. Die Form der Function y von z kann unbekannt sein.

A. Die z, für welche die Werthe von $y = fz$ gegeben sind, können ungleich viel von einander verschieden sein, und es können andere Werthe von fz

α) für ungleich verschiedene z,

β) für gleich viel von einander abweichende z gesucht werden.

B. Die z, für welche die Werthe von $y = fz$ gegeben sind, können gleich viel von einander verschieden sein, und es können andere Werthe von fz

α) für ungleich verschiedene z,

β) für gleich viel von einander abweichende z gesucht werden.

II. Die Form der Function y von z kann gegeben sein.

Im letzten Fall können die Werthe von z, zu welchen die als gegeben angenommenen Werthe von y gehören, immer gleich viel von einander verschieden gesetzt werden; denn man kann die zu beliebigen Werthen von z gehörigen Werthe von y, weil f gegeben ist, berechnen. Es können also nur die gesuchten Werthe von y

α) zu ungleich verschiedenen, und

β) zu gleich viel verschiedenen Werthen von z gehören.

Insofern man nun aber mit Differenzen rechnet, findet man offenbar immer nur eine Reihe von Werthen von $fz = y$, für gleich viel von einander verschiedene Werthe von z. Die Rechnung mit Differenzen ist also für die sämmtlichen mit (α.) bezeichneten Fälle, wenn Werthe von fz für ungleich verschiedene Werthe von z verlangt werden, nicht geeignet. Man müfste, wenn man sich ihrer bedienen wollte, eine Menge nicht verlangter Werthe von fz mit berechnen, welches nicht vortheilhaft wäre. Man mufs also in solchen Fällen, statt mit Differenzen,

nach einer schicklichen Interpolations-Formel rechnen. Die Fälle (α.) fallen daher aus, und es kommen nur folgende in Betracht:

Wenn eine Reihe von Werthen der Gröfse $y=fz$ für bestimmte, gleich viel von einander verschiedene Werthe von z gesucht wird, so kann

I. die Form der Function y von z unbekannt, die z aber, für welche die Werthe von $y=fz$ gegeben sind, können

A. ungleich viel, oder

B. gleich viel von einander verschieden sein.

II. Die Form der Function y von z kann gegeben sein, und es können folglich eine beliebige Zahl von Werthen der Function y als bekannt angenommen werden.

Die allgemeinen Ausdrücke für die Rechnung mit Differenzen sind in diesen verschiedenen Fällen folgende:

Erster Fall. I. *A.* Wenn die Form der Function $y=fz$ *unbekannt* ist, und es wird aus $n+1$ gegebenen einzelnen, $n+1$ bestimmten Werthen von z entsprechenden Werthen von y eine Reihe von Werthen der Function y gesucht, die zu *gleich weit* von einander entfernten z gehören.

3.

Man bezeichne die für die $n+1$ beliebige, ungleich von einander verschiedene Werthe $z_1, z_2, z_3 \ldots\ldots z_{n+1}$ von z gegebenen $n+1$ Werthe der unbekannten Function $y=fz$, wie in (Abhandlung No. 16. in diesem Hefte §. 5.), durch

$$y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_{n+1},$$

und den Werth von $y=fz$ für einen beliebigen Werth von z durch y, so kann man, etwa mittelst der Lagrangischen Interpolationsformel (35. in der vorhin benannten Abhandlung), nemlich vermittelst der Formel:

$$\begin{aligned} 2.\quad y = {} & \frac{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)\ldots\ldots(z-z_{n+1})}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)\ldots\ldots(z_1-z_{n+1})}\,y_1 \\ & + \frac{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)\ldots\ldots(z-z_{n+1})}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)\ldots\ldots(z_2-z_{n+1})}\,y_2 \\ & + \frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)\ldots\ldots(z-z_{n+1})}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)\ldots\ldots(z_3-z_{n+1})}\,y_3 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots\ldots(z-z_n)}{(z_{n+1}-z_1)(z_{n+1}-z_2)(z_{n+1}-z_3)\ldots\ldots(z_{n+1}-z_n)}\,y_{n+1} \end{aligned}$$

den Werth von $y=fz$ für ein beliebiges z finden.

Will man also nun die gesuchte Reihe von Werthen der unbekannten Function $y = fz$ durch Differenzen berechnen, und damit bis zur $m$ten Ordnung gehen, so mufs man die Function als eine rationale Function von der $m$ten Ordnung betrachten. Alsdann darf man nur nach der Formel (2.) die zu den $m+1$ ersten, gleich viel von einander verschiedenen Werthen von z gehörigen Werthe von y berechnen, und die erste, zweite, dritte etc. bis zur $m$ten Differenz dieser $m+1$ Werthe nehmen. Vermittelst dieser Differenzen kann man, der Reihe nach, die sämmtlichen übrigen verlangten Werthe von $y = fz$ durch blofse Addition finden.

Am wenigsten wird man sich aber, der Wahrscheinlichkeit nach, von den wahren Werthen von y entfernen, wenn die z, zu welchen die berechneten Werthe von y gehören, innerhalb der äufsersten z liegen, die den gegebenen y entsprechen, also etwa zwischen z und z_{n+1}; aus dem weiter unten in (6.) angegebenen Grunde. Um so unsicherer werden die Resultate sein, je weiter die z, für welche man die zugehörigen y berechnet hat, aufserhalb dieser Grenzen liegen. Ueber die Gröfse der Abweichung der Resultate der Rechnung von den wahren Werthen läfst sich aber aus der Rechnung selbst nichts mit Bestimmtheit sagen, weil nach der Voraussetzung die wahren Werthe von y, aufser denen, die gegeben sind, gänzlich unbekannt sind. Uebrigens wird die Rechnung der Wahrscheinlichkeit nach, um so zuverläfsiger sein, je mehr Differenzen man nimmt, das heifst, je näher die Ordnungszahl m der Differenzen, der Zahl n der gegebenen Werthe von y kommt.

Zweiter Fall.

Wenn die Form der Function $y = fz$ unbekannt ist, und es wird aus $n+1$ gegebenen, einzelnen, eben so vielen bestimmten, *gleichviel* von einander verschiedenen Werthen von z zugehörigen Werthen von y, eine Reihe von Werthen der Function y gesucht, die zu *gleichweit* von einander entfernten z gehören.

4.

Man bezeichne in diesem Falle die $n+1$ gleichviel von einander verschiedenen Werthe von z, zu welchen die gegebenen Werthe

von $y = fz$ gehören, durch

$$z,\ z+\lambda,\ z+2\lambda,\ z+3\lambda \ldots . z+n\lambda,$$

so dafs die zugehörigen gegebenen Werthe von y

$$fz,\ f(z+\lambda),\ f(z+2\lambda),\ f(z+3\lambda) \ldots . f(z+n\lambda)$$

sind, irgend einen beliebigen Werth von z aber durch $z+k$, so kann man entweder vermittelst der Formel (49., in der oben erwähnten Abhandlung), die keine andere ist, als die Lagrangische Interpolations-Formel, für gleichviel von einander verschiedene z, nemlich vermittelst der Formel:

$$\begin{aligned} 3.\quad f(z+k) = {} & \pm \frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)(k-3\lambda)\ldots.(k-n\lambda)}{\lambda.2\lambda.3\lambda\ldots.n\lambda} \\ & \times \Big[\frac{1}{k} fz \\ & - \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{k-\lambda} f(z+\lambda) \\ & + \frac{n.n-1}{2} \cdot \frac{1}{k-2\lambda} f(z+2\lambda) \\ & - \frac{n.n-1.n-2}{2.3} \cdot \frac{1}{k-3\lambda} f(z+3\lambda) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm \frac{1}{k-n\lambda} f(z+n\lambda)\Big], \end{aligned}$$

oder auch vermittelst der Newtonschen Interpolations-Formel (16., in der oben erwähnten Abhandlung), nemlich vermittelst der Formel:

$$\begin{aligned} 4.\quad f(z+k) = {} & fz \\ & + \frac{k}{\lambda}[f(z+\lambda) - fz] \\ & + \frac{k.(k-\lambda)}{2\lambda^2}[f(z+2\lambda) - 2f(z+\lambda) + fz] \\ & + \frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)}{2.3\lambda^3}[f(z+3\lambda) - 3f(z+2\lambda) + 3f(z+\lambda) - fz] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{k.(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots.[k-(n-1)\lambda]}{2.3\ldots.n\lambda^n}\Big[f(z+n\lambda) - nf[z+(n-1)\lambda] \\ & \qquad + \frac{n.n-1}{2} f[z+(n-2)\lambda] \ldots . \pm fz\Big] + R, \end{aligned}$$

die Werthe von y für einen beliebigen Werth $z+k$ von z finden.

Will man also nun die gesuchte Reihe von Werthen der unbekannten Function $y = fz$ durch Differenzen berechnen, und damit bis zur $m$ten Ordnung gehen, so mufs man wiederum die Function als eine ratio-

nale ganze Function von der $m$ten Ordnung betrachten. Alsdann darf man nur nach einer von den Formeln (3.) oder (4.), die zu den $m+1$ ersten, gleichviel von einander verschiedenen Werthen von z, gehörigen Werthe von y berechnen, und die erste, zweite, dritte etc. bis zur $m$ten Differenz dieser $m+1$ Werthe nehmen. Vermittelst dieser Differenzen kann man wieder, der Reihe nach, die sämmtlichen verlangten Werthe von $y=fz$ durch bloſse Addition finden.

Am wenigsten wird man sich, wahrscheinlicher Weise, von den wahren Werthen von y entfernen, wenn die z, zu welchen die berechneten Werthe von y gehören, innerhalb der äuſsersten z liegen, welche den gegebenen y entsprechen, also etwa zwischen z und z_{n+1}, aus dem weiter unten in (6.) angegebenen Grunde. Um so unsicherer werden die Resultate sein, je weiter die z, für welche man die zugehörigen y berechnet hat, auſserhalb dieser Grenzen liegen. Ueber die Gröſse der Abweichung der Resultate der Rechnung von den wahren Werthen aber läſst sich, wie in (3.), aus der Rechnung selbst, nichts mit Bestimmtheit sagen, weil nach der Voraussetzung die wahren Werthe von y, auſser den gegebenen, gänzlich unbekannt sind. Uebrigens wird die Rechnung, wie in (3.), der Wahrscheinlichkeit nach, um so zuverlässiger sein, je mehr Differenzen man nimmt, d. h., je näher die Ordnungszahl m der Differenzen, der Zahl n der gegebenen Werthe von y kommt. Ist $m=n$, und in die Reihe der gesuchten Werthe von y gehören auch die $n+1$ gegebenen Werthe fz, $f(z+\lambda)$, $f(z+2\lambda)\ldots f(z+n\lambda)$ von y, so muſs die Rechnung mit Differenzen, so wie man darauf zutrifft, dieselben genau geben; welches zur Probe während der Rechnung dient.

Dritter Fall.

Wenn die Function $y=fz$ gegeben ist, folglich eine beliebige Zahl von Werthen der Gröſse y für beliebige z, als gegeben angenommen werden kann, und es soll eine Reihe von Werthen der Gröſse $y=fz$, für *gleichweit* von einander entfernte z berechnet werden.

5.

Will man in diesem Falle mit den Differenzen bis zur $n$ten Ordnung gehen, so sind offenbar nicht mehr als $n+1$ einzelne Werthe von $y=fz$, und zwar ebenfalls für gleichweit von einander entfernte z,

aus der Gleichung $y=fz$ selbst zu berechnen nöthig, denn diese Werthe reichen hin, um die erste, zweite, dritte .... bis zur $n$ten Differenz, einschliefslich, zu finden.

Man darf also nur annehmen, die $n+1$ Werthe

$$fz,\ f(z+\lambda),\ f(z+2\lambda)\ldots.f(z+n\lambda),$$

von y, für die von einander gleichweit entfernten Werthe

$$z,\ z+\lambda,\ z+2\lambda\ldots.z+n\lambda$$

von z, wären bekannt, so kann man nach der Newtonschen Formel (4.) den Werth von y für einen beliebigen Werth $z+k$ von z finden.

Berechnet man also danach die $n+1$ ersten aus der Reihe der Werthe von y, die gesucht wird, also etwa fx, $f(x+k)$, $f(x+2k)\ldots$ $\ldots.f(x+nk)$, so darf man zwischen denselben nur die Differenzen bis zur $n$ten nehmen, und kann alsdann alle übrigen gesuchten Werthe von y durch bloſse Addition finden.

Da man aber hier vorausgesetztermafsen die Wahl hat, welche $n+1$ Werthe von y man als bekannt annehmen will, so entstehet die Frage, welche $n+1$ Werthe von y, vermittelst der Formel (4.), einen beliebigen Werth von y durch die Differenzen am genauesten geben. Dieses findet sich am leichtesten durch folgende Betrachtung:

6.

Man stelle sich die verschiedenen Werthe von z, für welche man fz berechnen will, als die Abscissen, und die zugehörigen Werthe von $y=fz$ als die zugehörigen, rechtwinkligen Ordinaten einer Curve vor, so thut man, wenn man z. B. $n+1$ Werthe von $y=fz$, etwa für gleich viel von einander verschiedene Werthe von z nimmt, und vermittelst der ersten, zweiten, dritten etc. bis $n$ten Differenz zwischen denselben die übrigen Werthe von $y=fz$ berechnet, nichts anderes, als dafs man durch die gegebene Curve eine andere, willkürliche, parabolische Curve legt, welche $n+1$ Puncte mit der gegebenen gemein hat, dann aber nicht allein die $n+1$ gemeinschaftlichen Ordinaten der beiden Curven, sondern alle übrigen Ordinaten der parabolischen Curve für die zu gleichen Abscissen gehörigen Ordinaten der gegebenen Curve nimmt. Wären nun z. B. die $n+1$ Ordinaten, welche man den beiden Curven gemein sein läfst, diejenigen, welche zu den ersten $n+1$ Werthen von z gehören, oder lägen sie auch nur nahe zu-

sammen, und auf diese folgten lauter gröfsere Werthe von z, so könnten, wie leicht zu sehen, die über die bestimmten Ordinaten hinausreichenden Schenkel der beiden Curven bald sehr von einander abweichen, und folglich die durch die Differenzen berechneten Werthe von fz sehr viel von den richtigen Werthen verschieden sein. Wären dagegen die $n+1$ gemeinschaftlichen Ordinaten vielmehr weitläufiger, und am besten durch die ganze Ausdehnung desjenigen Theiles der gegebenen Curve, auf welche die Berechnung der Ordinaten sich erstrecken soll, etwa in gleichen Entfernungen von einander, vertheilt, so dafs sich die beiden äufsersten Ordinaten darunter befänden, und die übrigen $n-1$ Ordinaten in gleichen Entfernungen von einander, dazwischen lägen, so kann offenbar die gegebene Curve von der angenommenen parabolischen, nur zwischen je zwei aufeinander folgenden von den $n+1$ festen Puncten, also nur auf den $n$ten Theil der Ausdehnung der Curve, und folglich nur weit weniger abweichen. Es ist daher am besten, dafs man, wenn man die Wahl hat, die $n+1$ Werthe von fz, durch deren Differenzen man die übrigen verlangten Werthe von fz in der bestimmten Ausdehnung berechnen will, über diese ganze Ausdehnung vertheile, nicht etwa die $n+1$ ersten Ordinaten oder mehrere zusammenliegende dazunehme. Man erhöhet auf diese Weise die Genauigkeit der Rechnung mit Differenzen ungemein.

7.

Ist in dem Falle des vorigen Paragraphs, die gegebene Function $y=fz$ ganz und rational, z. B. von der $n$ten Ordnung, so bricht die Reihe (4.) mit dem $n$ten Gliede ab. Alle folgenden Glieder sind Null, weil alle Differenzen, von der $n+1$sten ab, Null sind, und folglich ist $R=0$. In diesem Falle ist es ganz gleichgültig, in welchem Verhältnifs man λ gegen k nimmt. Die Resultate der Rechnung mit den Differenzen sind immer genau. Man wird also blos die $n+1$ ersten aus der gesuchten Reihe der Gröfsen

$$fx,\ f(x+k),\ f(x+2k)\ \ldots\ f(x+\mu k)$$

selbst, und ihre Differenzen bis zur $n$ten nehmen können. Damit findet man alle übrigen genau.

Wenn dagegen die gegebene Function $y=fz$ irrational oder transcendent ist, so bricht die Reihe (4.) nicht ab, sondern läuft in's Unendliche

fort, und R ist nicht Null. Bringt man daher, indem man sich der Reihe bedient, um $f(z+k)$ zu finden, blos die $n+1$ Gröfsen fz, $f(z+\lambda)$, $f(z+2\lambda)\ldots.f(z+n\lambda)$ in Rechnung, und nimmt blos auf die $n+1$ ersten Glieder Rücksicht, so thut man damit nichts Anderes, als dafs man die $n+1$ste und alle folgenden Differenzen von fz, welches nemlich die Factoren in den weggelassenen Gliedern sind, gleich Null setzt. Da sie nun nicht Null sind, so ist der Fehler, den man begehet, oder die Abweichung des für $f(z+k)$ angenommenen Werthes von dem wahren Werthe, der Summe dieser Glieder gleich, oder gleich R. Es kommt daher darauf an, den Werth von R zu schätzen.

8.

Es ist nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$5.\quad f(z+\lambda) = fz + \lambda\frac{\partial fz}{\partial z} + \frac{\lambda^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 fz}{\partial z^2} + \frac{\lambda^3}{2.3}\cdot\frac{\partial^3 fz}{\partial z^3}\ldots.$$

Daher ist die $n+1$ste Differenz von fz, nach λ genommen:

$$6.\quad \Delta_\lambda^{n+1} fz = fz.\Delta_\lambda^{n+1} + \frac{\partial fz}{\partial z}\cdot\frac{\Delta_\lambda^{n+1}\lambda}{1} + \frac{\partial^2 fz}{\partial z^2}\cdot\frac{\Delta_\lambda^{n+1}\lambda^2}{2} + \frac{\partial^3 fz}{\partial z^3}\cdot\frac{\Delta_\lambda^{n+1}\lambda^3}{2.3}\ldots.$$

Nun ist bekanntlich $\Delta_\lambda^{n+1}\lambda = 0$, $\Delta_\lambda^{n+1}\lambda^2 = 0$ etc. bis $\Delta_\lambda^{n+1}\lambda^n = 0$, und erst das folgende Glied $\Delta_\lambda^{n+1}\lambda^{n+1}$ bleibt, und ist gleich

$$n+1.n.n-1.n-2\ldots.\lambda^{n+1}.$$

Also verschwinden in dem auf das $n$te Glied der Reihe zunächst folgenden Gliede

$$\frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots.(k-n\lambda)}{2.3\ldots.n\lambda^n}\Delta_\lambda^{n+1} fz,$$

die $n+1$ ersten Theile des Gliedes von selbst, und der zunächst bleibende Theil ist

$$\frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots.(k-n\lambda)}{2.3\ldots.n.n+1.\lambda^{n+1}}.n+1.n.n-1.n-2\ldots.1.\lambda^{n+1}\cdot\frac{1}{2.3\ldots.n+1}\cdot\frac{\partial^{n+1} fz}{\partial z^{n+1}},$$

oder

$$7.\quad \frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots.(k-n\lambda)}{2.3\ldots.n+1}\cdot\frac{\partial^{n+1} fz}{\partial z^{n+1}}.$$

Aufser diesem einen Gliede giebt es in der ganzen übrigen Reihe kein anderes mit dem Differential-Factor $\frac{\partial^{n+1} fz}{\partial z^{n+1}}$ von der $n+1$sten Ordnung; denn die ersten n Glieder rechterhand in der Gleichung (4.) werden nach der Voraussetzung genau genommen, so dafs die Abweichung R des für $f(x+k)$ angenommenen Werthes von dem wahren, nur von den

den folgenden Gliedern herkommen kann. In diesen folgenden Gliedern heben sich aber, z. B. in dem ersten, wie vorhin gezeigt, die n ersten Theile von selbst auf, und der nächste, bleibende Theil ist derjenige (7.). Auf dieselbe Weise ist in dem zweiten Gliede der erste bleibende Theil

$$8.\quad \frac{k(k-\lambda)(k-2\lambda)\ldots\ldots(k-(n+1)\lambda)}{2.3\ldots\ldots n+2}\cdot\frac{\partial^{n+2}fz}{\partial z^{n+2}},$$

u. s. w. Also giebt es, als integrirenden Theil des weggelassenen Restes R, blofs das eine Glied (7.) mit dem Differential-Coefficienten $\frac{\partial^{n+1}fz}{\partial z^{n+1}}$ von der $n+1$sten Ordnung. Alle vorhergehenden Glieder mit Differential-Coefficienten niedriger Ordnungen müssen in dem für $f(z+k)$, statt des wahren, angenommenen Werthe, mit denjenigen im genauen Ausdruck nothwendig übereinstimmen.

Gesetzt nun, man berechnete den Werth von $f(z+k)$ unmittelbar nach der Taylorschen Formel, also nach der Reihe

$$9.\quad f(z+k)=fz+k\frac{\partial fz}{\partial z}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 fz}{\partial z^2}\ldots\ldots+\frac{k^n}{2.3\ldots.n}\cdot\frac{\partial^n fz}{\partial z^n}+\frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.n+1}\cdot\frac{\partial^{n+1}fz}{\partial z^{n+1}},$$

und nähme von dieser Reihe die ersten n Glieder, so wäre das zuerst weggelassene Glied

$$10.\quad \frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.n+1}\cdot\frac{\partial^{n+1}fz}{\partial z^{n+1}}.$$

Dieses aber ist allemal gröfser als (7.), weil λ positiv ist. Also läfst man, was das erste ausgelassene Glied betrifft, bei der unmittelbar auf n Glieder sich beschränkenden Rechnung mehr weg, als bei der Berechnung mit den n ersten Differenzen. Es können nun zwar die folgenden, bei der Rechnung mit Differenzen weggelassenen Glieder auch gröfser sein, als die folgenden Glieder, bei der unmittelbaren Berechnung, weil sie Summen von Gliedern sind, die auch von λ abhängen. Da man aber, wenn die Reihen, wonach man rechnet, wie es immer sein mufs, convergiren, λ und k so annehmen wird, dafs jedes Glied gröfser ist, als alle folgenden zusammengenommen, so läfst sich der Grad der Näherung, den man erreicht, nach dem ersten weggelassenen Gliede schätzen, und da nun dieses bei der unmittelbaren Berechnung gröfser ist, als bei der Rechnung mit Differenzen, so kann man annehmen, dafs die letztere, und zwar, wenn man z. B. n Differenzen nimmt, das Resul-

tat wenigstens nicht minder genau geben werde, als die unmittelbare Berechnung durch n erste Glieder der Taylorschen Reihe.

9.

Statt nach (§. 5.) vermittelst der Formel (4.) aus den als bekannt angenommenen $n+1$ Werthen fz, $f(z+\lambda)$, $f(z+2\lambda)$ ..... $f(z+n\lambda)$ von $fz = y$ die $n+1$ ersten Werthe fz, $f(z+k)$, $f(z+2k)$ .... $f(z+nk)$ der aufzustellenden Tafel selbst zu berechnen, durch deren Differenzen man alsdann die folgenden Werthe in der Tafel bis zu $f(z+n\lambda)$ finden will, kann man auch die Differenzen dieser $n+1$ Werthe berechnen. Der Ausdruck einer solchen Differenz, z. B. $m$ter Ordnung, ist zufolge (4.)

11. $\Delta^m f(z) =$

$$fz\,\Delta_k^m 1 + \frac{\Delta_\lambda fz}{\lambda}\Delta_k^m k + \frac{\Delta_\lambda^2 fz}{2.\lambda^2}\Delta_k^m [k(k-\lambda)] + \frac{\Delta_\lambda^3 fz}{2.3\lambda^3}\Delta_k^m [k(k-\lambda)(k-2\lambda)] \ldots,$$

und es sind allemal die m ersten Glieder rechterhand gleich Null, weil $\Delta_k^m 1 = 0$, $\Delta_k^m k = 0$, $\Delta_k^m [k(k-\lambda)] = 0$ bis zu $\Delta_k^m [k(k-\lambda)(k-2\lambda) \ldots . \ldots (k-(m-1)\lambda)]$ ist.

23.

Zwei polygonometrische Sätze.

(Von Herrn *J. Steiner*.)

I. Lehrsatz. „Ziehet man aus einem, in der Ebene eines gegebenen Vielecks beliebig angenommenen Punct P, nach den Seiten des Vielecks Gerade, die respective mit gegebenen Geraden parallel sind, so ist, wenn der Flächeninhalt desjenigen Vielecks, dessen Scheitel in den Fufspuncten jener Geraden liegen (und welches somit dem gegebenen Vieleck eingeschrieben ist), constant bleiben soll, der Ort des Puncts P die Peripherie eines bestimmten Kegelschnitts. Die Form dieses Kegelschnitts und die Lage seines Mittelpuncts bleibt unverändert, wenn auch der Inhalt des eingeschriebenen Vielecks kleiner oder gröfser angenommen wird, d. h. durch Veränderung dieses Inhalts entstehen ähnliche, ähnlich liegende und concentrische Kegelschnitte.

Beweis. Es sei z. B. das Vieleck $ABCDE$ (Fig. 1.) gegeben. Aus einem beliebigen Punct P ziehe man in den gegebenen Richtungen nach den Seiten des Vielecks die Geraden PA_1, PB_1, PC_1, ... oder a_1, b_1, c_1, ..., deren Fufspuncte ein dem gegebenen eingeschriebenes Vieleck $A_1B_1C_1D_1E_1$ bestimmen.

Da z. B. der Inhalt des Dreiecks $C_1PD_1 = \frac{1}{2} c_1 d_1 \sin\alpha$, so hat man, wenn man den Inhalt des Vielecks $A_1B_1C_1D_1E_1$ durch I_1 bezeichnet:

1. $$2I_1 = c_1 d_1 \sin\alpha + d_1 e_1 \sin\beta + e_1 a_1 \sin\gamma + a_1 b_1 \sin\delta + b_1 c_1 \sin\varepsilon.$$

Es seien nun ferner x, y die Coordinaten des Puncts P, in Bezug auf beliebige, zu einander senkrechte Coordinaten-Axen OY, OX, und α_1, β_1, γ_1, δ_1, ε_1 seien die Winkel, welche die Geraden a_1, b_1, ... mit den respectiven Seiten des gegebenen Vielecks, so wie α_2, β_2, γ_2.... die Winkel, welche die Abscissen-Axe OX mit den nemlichen Seiten bildet, und endlich seien a, b, c, d, e die aus dem Anfangspunct O auf die nemlichen Seiten gefällten Lothe, so hat man bekanntlich:

$$2.\quad \begin{cases} a_1 = \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1}\,.\,y - \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\,.\,x + \frac{a}{\sin\alpha_1}, \\ b_1 = \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_1}\,.\,y - \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1}\,.\,x + \frac{b}{\sin\beta_1}, \\ c_1 = \frac{\cos\gamma_2}{\sin\gamma_1}\,.\,y - \frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1}\,.\,x + \frac{c}{\sin\gamma_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Werden diese Werthe in (1.) substituirt, so kommt:

$$\begin{aligned} 3.\quad 2I_1 = {} & y^2\left(\frac{\cos\gamma_2\cos\delta_2}{\sin\gamma_1.\sin\delta_1}.\sin\alpha + \frac{\cos\delta_2\cos\varepsilon_2}{\sin\delta_1\sin\varepsilon_1}.\sin\beta + \ldots. + \frac{\cos\beta_2\cos\gamma_2}{\sin\beta_1\sin\gamma_1}.\sin\varepsilon\right) \\ & + x^2\left(\frac{\sin\gamma_2.\sin\delta_2}{\sin\gamma_1\sin\delta_1}.\sin\alpha + \frac{\sin\delta_2\sin\varepsilon_2}{\sin\delta_1\sin\varepsilon_1}.\sin\beta + \ldots. + \frac{\sin\beta_2\sin\gamma_2}{\sin\beta_1\sin\gamma_1}.\sin\varepsilon\right) \\ & - xy\left(\frac{\sin(\gamma_2+\delta_2)}{\sin\gamma_1.\sin\delta_1}.\sin\alpha + \frac{\sin(\delta_2+\varepsilon_2)}{\sin\delta_1\sin\varepsilon_1}.\sin\beta + \ldots. + \frac{\sin(\beta_2+\gamma_2)}{\sin\beta_1\sin\gamma_1}.\sin\varepsilon\right) \\ & + y\left(\frac{d.\cos\gamma_2 + c\cos\delta_2}{\sin\gamma_1\sin\delta_1}.\sin\alpha + \ldots. + \frac{c\cos\beta_2 + b\cos\gamma_2}{\sin\beta_1\sin\gamma_1}.\sin\varepsilon\right) \\ & - x\left(\frac{d\sin\gamma_2 + c\sin\delta_2}{\sin\gamma_1\sin\delta_1}.\sin\alpha + \ldots. + \frac{c\sin\beta_2 + b\sin\gamma_2}{\sin\beta_1\sin\gamma_1}.\sin\varepsilon\right) \\ & + \frac{cd\sin\alpha}{\sin\gamma_1\sin\delta_1} + \frac{de\sin\beta}{\sin\delta_1\sin\varepsilon_1} + \frac{ea\sin\gamma}{\sin\varepsilon_1\sin\alpha_1} + \frac{ab\sin\delta}{\sin\alpha_1\sin\beta_1} + \frac{bc\sin\varepsilon}{\sin\beta_1\sin\gamma_1}, \end{aligned}$$

oder in einfacheren Zeichen:

$$4.\quad Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0.$$

Diese Gleichung giebt den Ort des Puncts P, wenn man I_1 als constant annimmt. Sie enthält, wie man sieht, eine Curve der zweiten Ordnung, wie im Lehrsatze behauptet wird.

Da die Form dieser Curve (d. i. das Verhältnifs ihrer Axen) und die Lage ihres Mittelpuncts durch die Coefficienten A, B, C, D, E allein bestimmt wird, und von dem constanten Gliede F unabhängig ist, und da dieses Glied allein die Gröfse I_1 enthält, so folgt, dafs die verschiedenen Curven, die entstehen, wenn man der Gröfse I_1 nach und nach verschiedene Werthe giebt, alle einander ähnlich, ähnlich liegend und concentrisch sind.

Soll die Curve der Kreis sein, so müssen sowohl die Coefficienten A und B einander gleich, als auch der Coefficient C gleich Null sein. Daher folgt: „Dafs wenn die Richtungen, nach welchen die genannten Geraden a_1, b_1, c_1 .... aus dem Puncte P gezogen werden, alle bis auf zwei gegeben sind, so können diese beiden Richtungen immer so angenommen werden, dafs alsdann die Ortscurve ein Kreis wird." Denn diese beiden Richtun-

gen werden durch die beiden Gleichungen

$$A = B \text{ und } C = 0$$

gerade bestimmt.

Sind die Geraden a_1, b_1, c_1 .... alle zu den respectiven Seiten des gegebenen Vielecks senkrecht, so ist die Curve allemal der Kreis, was den folgenden speciellen Lehrsatz giebt.

II. Lehrsatz. „Fället man aus einem, in der Ebene eines gegebenen Vielecks beliebig angenommenen Punct P Lothe auf die Seiten desselben, so ist, wenn der Flächeninhalt des Vielecks, dessen Scheitel in den Fufspuncten der Lothe liegen, constant bleiben soll, der Ort des Puncts P die Peripherie eines bestimmten Kreises. Der Mittelpunct dieses Kreises ist ein bestimmter fixer Punct, d. h. er bleibt derselbe, wenn auch der Inhalt des eingeschriebenen Vielecks kleiner oder gröfser angenommen wird, nemlich er ist der Mittelpunct (Schwerpunct) von Kräften, die in parallelen Richtungen auf die Ecken des gegebenen Vielecks wirken, und sich verhalten wie die Sinusse der respectiven doppelten Winkel des Vielecks."

Erster Beweis. Vermöge der neuen Bedingung sind z. B. in dem Viereck AC_1PD_1 die Winkel bei C_1 und D_1 rechte, daher ist auch $A + \alpha = 2$ Rechten, und daher folgt, dafs:

$$5. \quad \begin{cases} \sin\alpha = \sin A, \\ \sin\beta = \sin B, \\ \sin\gamma = \sin C, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Und ferner ist vermöge der neuen Bedingung:

$$6. \quad \sin\alpha_1 = \sin\beta_1 = \sin\gamma_1 = \ldots = 1.$$

Dadurch (5. 6.) reducirt sich die obige Gleichung (3.) auf folgende:

$$\begin{aligned} 7. \quad 2I_1 = {} & y^2(\cos\gamma_2\cos\delta_2\sin A + \cos\delta_2\cos\varepsilon_2\sin B + \ldots + \cos\beta_2\cos\gamma_2\sin E) \\ & + x^2(\sin\gamma_2\sin\delta_2\sin A + \sin\delta_2\sin\varepsilon_2\sin B + \ldots + \sin\beta_2\sin\gamma_2\sin E) \\ & - xy[\sin(\gamma_2+\delta_2)\sin A + \sin(\delta_2+\varepsilon_2)\sin B + \ldots + \sin(\beta_2+\gamma_2)\sin E] \\ & + y[(d\cos\gamma_2 + c\cos\delta_2)\sin A + \ldots + (c\cos\beta_2 + b\cos\gamma_2)\sin E] \\ & - x[(d\sin\gamma_2 + c\sin\delta_2)\sin A + \ldots + (c\sin\beta_2 + b\sin\gamma_2)\sin E] \\ & + cd\sin A + de\sin B + ea\sin C + ab\sin D + bc\sin E, \end{aligned}$$

oder

$$8. \quad A_1y^2 + B_1x^2 + C_1xy + D_1y + E_1x + F_1 = 0.$$

Nun ist nach dem, was oben bemerkt worden, darzuthun, dafs sowohl die Coefficienten A_1 und B_1 einander gleich, als auch der Coefficient C_1 gleich Null sei, also dafs sowohl

$$\cos\gamma_2\cos\delta_2\sin A + \cos\delta_2\cos\varepsilon_2\sin B + \ldots. + \cos\beta_2\cos\gamma_2\sin E$$
$$= \sin\gamma_2\sin\delta_2\sin A + \sin\delta_2\sin\varepsilon_2\sin B + \ldots. + \sin\beta_2\sin\gamma_2\sin E,$$

oder

I. $\cos(\gamma_2+\delta_2)\sin A + \cos(\delta_2+\varepsilon_2)\sin B + \ldots. + \cos(\beta_2+\gamma_2)\sin E = 0,$

als auch

II. $\sin(\gamma_2+\delta_2)\sin A + \sin(\delta_2+\varepsilon_2)\sin B + \ldots. + \sin(\beta_2+\gamma_2)\sin E = 0$ sei.

Diese beiden Bedingungsgleichungen finden aber auch in der That statt. Denn wenn man bemerkt, dafs z. B., da $\alpha_3 = \gamma_2 - \delta_2$:

$$\sin A = \sin\alpha_3 = \sin(\gamma_2-\delta_2),$$

so gehen die Ausdrücke (I. und II.) in folgende über:

III. $\cos(\gamma_2+\delta_2)\sin(\gamma_2-\delta_2) + \cos(\delta_2+\varepsilon_2)\sin(\delta_2-\varepsilon_2) + \ldots.$
$$\ldots. + \cos(\beta_2+\gamma_2)\sin(\beta_2-\gamma_2),$$

IV. $\sin(\gamma_2+\delta_2)\sin(\gamma_2-\delta_2) + \sin(\delta_2+\varepsilon)\sin(\delta_2-\varepsilon_2) + \ldots.$
$$\ldots. + \sin(\beta_2+\gamma_2)\sin(\beta_2-\gamma_2).$$

Und wird ferner bemerkt, dafs nach bekannten trigonometrischen Formeln:

$$\cos(m+n)\sin(m-n) = \tfrac{1}{2}\sin 2m - \tfrac{1}{2}\sin 2n$$

und

$$\sin(m+n)\sin(m-n) = \sin m^2 - \sin n^2,$$

so verwandeln sich die Ausdrücke (III. IV.) in folgende:

V. $\tfrac{1}{2}(\sin 2\gamma_2 - \sin 2\delta_2) + \tfrac{1}{2}(\sin 2\delta_2 - \sin 2\varepsilon_2) + \ldots. + \tfrac{1}{2}(\sin 2\beta_2 - \sin 2\gamma_2),$

VI. $(\sin\gamma_2^2 - \sin\delta_2^2) + (\sin\delta_2^2 - \sin\varepsilon_2^2) + \ldots. + (\sin\beta_2^2 - \sin\gamma_2^2),$

von denen, wie in die Augen fällt, jeder gleich Null ist, indem alle Glieder derselben einander aufheben. Folglich ist, wie im Lehrsatze behauptet wird, der Ort des Puncts P die Peripherie eines Kreises, wenn I_1 constant gesetzt wird.

Dafs der Mittelpunct dieses Kreises der im Lehrsatze angegebene Schwerpunct sei, soll durch folgenden Beweis dargethan werden.

Zweiter Beweis. Bezeichnet man den Flächeninhalt der Dreiecke A_1DB_1 und A_1PB_1 durch Δ und Δ_1, so hat man:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}DA_1 . DB_1 . \sin D \text{ und } \Delta_1 = \tfrac{1}{2}a_1 . b_1 . \sin D,$$

oder wenn man bemerkt, dafs:

$$DA_1 = PD . \cos\nu \text{ und } DB_1 = PD . \cos\mu,$$
$$a_1 = PD . \sin\nu \text{ und } b_1 = PD . \sin\mu,$$

so hat man:

$$\Delta = \tfrac{1}{2} PD^2 . \cos\nu . \cos\mu . \sin D, \text{ und } \Delta_1 = \tfrac{1}{2} PD^2 . \sin\nu . \sin\mu . \sin D,$$

und daher:

$$\begin{aligned} \Delta - \Delta_1 &= \tfrac{1}{2} PD^2 (\cos\nu . \cos\mu - \sin\nu . \sin\mu) \sin D \\ &= \tfrac{1}{2} PD^2 . \cos D . \sin D \\ &= \tfrac{1}{4} PD^2 . \sin 2D. \end{aligned}$$

Da man auf gleiche Weise eine ähnliche Gleichung zwischen den Flächeninhalten der zusammengehörigen Dreiecke B_1EC_1 und B_1PC_1, desgleichen zwischen den Dreiecken C_1AD_1 und C_1PD_1, u. s. w. findet, so hat man, wenn die Flächeninhalte der Vielecke $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ durch I und I_1 bezeichnet werden:

$$I - 2I_1 = \tfrac{1}{4}(PA^2 . \sin 2A + PB . \sin 2B + PC^2 . \sin 2C + PD^2 . \sin 2D + PE^2 . \sin 2E).$$

Soll nun der Flächeninhalt (I_1) des eingeschriebenen Vielecks constant bleiben, so ist auch $I - 2I_1$ constant, so dafs also in diesem Falle die Summe der Producte, die entstehen, wenn man die Quadrate der Abstände des Puncts P von den Ecken des gegebenen Vielecks $ABCDE$ mit den Sinussen der respectiven doppelten Winkel dieses Vielecks multiplicirt, gleich einer constanten Gröfse, nemlich $= 4(I - 2I_1)$ ist, woher dern, nach einem bekannten Satze (M. Hirsch Sammlung geom. Aufg. Band II. S. 339.) unmittelbar die Richtigkeit des obigen Lehrsatzes folgt.

Der letztere Beweis ist, einige Abkürzungen ausgenommen, derselbe, welchen wir zuerst im ersten Bande S. 51. dieses Journals mitgetheilt haben.

24.
Auflösung einer Aufgabe aus den Annalen der Mathematik von Herrn Gergonne.

(Von Herrn *J. Steiner.*)

I.

Im XVII. Bande der *Annales de mathematiques* von Herrn Gergonne befindet sich S. 83. folgende Aufgabe:

„Construire rigoureusement la droite qui coupe à la fois quatre droites données dans l'espace, non comprises deux à deux dans un même plan."

Die nachfolgende Auflösung dieser Aufgabe erfordert einige Hülfssätze und Betrachtungen, die hier theils entwickelt, theils blofs angedeutet werden sollen.

II.

Folgende Sätze sind leicht einzusehen: 1) Durch jeden gegebenen Punct ist eine einzige Gerade möglich, welche mit einer der Lage nach gegebenen Geraden parallel ist. 2) Alle Geraden, welche eine gegebene Gerade A schneiden und mit einer anderen gegebenen Graden B parallel sind, liegen zusammen in einer Ebene, welche mit der letzteren Geraden parallel ist; oder durch eine gegebene Gerade A ist allemal eine einzige Ebene möglich, welche mit einer anderen gegebenen Geraden B parallel ist, vorausgesetzt, dafs die beiden Geraden A, B nicht parallel sind. 3) Sind im Raume irgend zwei Gerade A, B gegeben, so ist durch jede derselben eine Ebene möglich, welche mit der anderen parallel ist (2.), und beide Ebenen sind daher mit einander parallel. 4) Sind im Raume irgend zwei Gerade und ein Punct gegeben, so ist durch den Punct allemal eine und nur eine Ebene möglich, welche mit jeder der beiden Geraden parallel ist.

III.

„Sind im Raume irgend zwei Gerade A, B und irgend ein Punct P gegeben, so kann durch den Punct allemal eine einzige dritte Gerade gelegt werden, welche entweder 1) jene beiden Geraden schneidet,

det, oder 2) die eine schneidet und mit der anderen parallel ist." Denn man denke sich durch den Punct P und durch jede der beiden Geraden insbesondere eine Ebene, so mufs jede dritte Gerade, welche durch den Punct gehen und beide gegebene Geraden schneiden soll, in diesen beiden Ebenen zugleich liegen, daher giebt es nur eine einzige solche Gerade, nemlich die Durchschnittslinie beider Ebenen. Liegt der gegebene Punct P entweder in derjenigen Ebene, welche durch A geht und mit B parallel ist, oder in derjenigen, welche durch B geht und mit A parallel ist (II, 3.), so findet der zweite Fall (2.) des Satzes Statt, d. h., die dritte Gerade schneidet blofs die eine gegebene Gerade und ist mit der anderen parallel.

IV.

„Sind im Raume irgend drei Gerade A, B, C gegeben, so giebt es allemal eine und nur eine vierte Gerade C_1, welche zwei derselben, z. B. A, B, schneidet und mit der dritten C parallel ist." Denn man denke sich durch A eine Ebene, welche mit C parallel ist, und ebenso durch B eine Ebene, welche mit C parallel ist, so ist die Durchschnittslinie beider Ebenen die einzig mögliche Gerade C_1, welche die Geraden A, B schneidet und mit der Geraden C parallel ist (II, 2.). Man erhält daher die Gerade C_1, wenn man z. B. durch A eine Ebene legt, welche mit C parallel ist, und alsdann durch den Punct b, in welchem sie B schneidet, eine Gerade C_1, mit C parallel zieht.

V.

„Sind im Raum irgend drei Gerade A, B, C gegeben (von denen keine zwei in einer Ebene liegen), so kann eine vierte Gerade A_1 so bewegt werden, dafs sie stets alle drei schneidet, und dafs sie nach und nach durch jeden beliebigen Punct geht, welchen man in einer derselben annimmt." Denn durch jeden beliebigen Punct c, welchen man z. B. in der Geraden C annimmt, kann nach (III.) eine Gerade A_1 gelegt werden, welche die Geraden A, B, und welche mithin alle drei Geraden A, B, C schneidet. Und läfst man nun in der Vorstellung den Punct c in der Geraden C sich fortbewegen, so wird auch die Gerade A_1 sich bewegen, so dafs sie nach und nach längs der ganzen Geraden C fortgleitet.

Oder um irgend eine Gerade A_1 zu erhalten, welche die drei gegebenen Geraden A, B, C schneidet, lege man z. B. durch C eine belie-

bige Ebene, so wird diese die Geraden A, B in irgend zwei Puncten a, b schneiden, und alsdann wird die Gerade ab der Forderung genügen, d. h., sie hat die Eigenschaft der verlangten Geraden A_1, indem sie nothwendiger Weise auch die Gerade C schneiden wird, weil sie mit ihr in der genannten Ebene liegt. „Läfst man daher in der Vorstellung diese Ebene sich um die Gerade C herumbewegen, so wird die Gerade ab oder A_1 sich so bewegen, dafs sie fortwährend alle drei gegebene Gerade A, B, C schneidet, und dafs die Durchschnittspuncte a, b, c, in welchen sie die letzteren schneidet, längs diesen sich continuirlich fortbewegen."

VI.

Mit anderen Worten folgt daher: „dafs die drei gegebenen Geraden A, B, C von einer unzähligen Schaar anderer Geraden A_1, B_1, C_1, D_1, ... geschnitten werden können, und dafs von dieser Schaar keine zwei, so nahe sie auch immerhin auf einander folgen mögen, einander schneiden können, weil sie sonst, und folglich auch jene 3 Geraden mit ihnen, in einer Ebene liegen müfsten."

Fixirt man irgend drei Gerade aus der genannten Schaar, z. B. die drei Geraden A_1, B_1, C_1, und nimmt sie als drei gegebene Geraden an, so folgt also, dafs dieselben nicht allein von den drei Geraden A, B, C, sondern vielmehr von einer zweiten, unzähligen Schaar Geraden A, B, C, D, ... geschnitten werden können.

Es liegen aber bekanntlich die beiden Schaaren Gerader zusammen in einer Fläche der zweiten Ordnung, nemlich im einfachen Hyperboloïd *); und ferner schneiden nicht nur die drei Geraden A, B, C alle Geraden der Schaar A_1, B_1, C_1, D_1, ..., sondern jede Gerade der einen Schaar schneidet jede Gerade der anderen Schaar, so dafs also auch z. B. die Gerade D nothwendig die Gerade D_1 schneidet, oder mit ihr parallel ist **). Das heifst:

„Wenn im Raume drei beliebige Geraden A, B, C, von irgend drei anderen Geraden A_1, B_1, C_1 geschnitten werden, so beschreibt diejenige Gerade, welche sich durch die drei ersteren fortbewegt (V.), die nemliche Fläche zweiter Ordnung, als diejenige Gerade, welche sich durch die drei letzteren bewegt; und diese Fläche ist das einfache Hyperboloïd."

*) Band I. Seite 340. dieses Journals.

**) Seite 342. ebendaselbst.

Und ferner: „Von den beiden Schaaren Gerader, die in einer solchen Fläche liegen, können von denen, welche zu der nemlichen Schaar gehören, keine einander schneiden, dagegen aber schneidet jede Gerade der einen Schaar jede Gerade der anderen Schaar, ausgenommen eine einzige, mit welcher sie parallel ist."

VII.

Bewegt sich nemlich die Gerade A_1 durch die drei Geraden A, B, C, so wird sie irgend einmal eine solche Lage haben, dafs sie mit A parallel ist, nemlich in demjenigen besonderen Falle, wo ihr Durchschnittspunct mit A unendlich weit entfernt ist, und welche Lage von A_1 nach (IV.) gefunden wird. Daher folgt:

„Dafs mit jeder Geraden aus einer der beiden genannten Schaaren, eine Gerade aus der anderen Schaar parallel ist."

Es seien die Geraden A und A_1 parallel, so schneidet alsdann A_1 jede der übrigen Geraden B, C, D.... der ersten Schaar (VI.), und die Ebenen durch A_1 und B, A_1 und C, A_1 und D, u. s. w., sind alsdann sämmtlich mit A parallel. Da aber durch jede der Geraden B, C, D.... insbesondere nur eine Ebene mit A parallel möglich ist (II. 2.), so folgt also umgekehrt:

„Dafs alle Ebenen, welche man durch beliebige Geraden B, C, D...., die in einem einfachen Hyperboloïd liegen, und die zu der nemlichen Schaar gehören, mit einer Geraden A, die zu derselben Schaar gehört, parallel legt, einander in einer Geraden A_1 schneiden, welche zu der zweiten Schaar gehört, und welche mit jener abgesonderten Geraden A der ersten Schaar parallel ist."

Ueberhaupt geht jede Ebene, welche durch irgend eine Gerade aus einer der beiden Schaaren geht, nothwendiger Weise auch durch eine Gerade der anderen Schaar. Denn geht z. B. eine Ebene durch A, so wird sie die Geraden B, C in irgend zwei Puncten b, c schneiden, und alsdann schneidet die Gerade bc alle drei Geraden A, B, C (V.), und gehört also zu der zweiten Schaar und liegt in der genannten Ebene. Also: „Jede Ebene, welche das einfache Hyperboloïd in einer Geraden schneidet, schneidet dasselbe noch in einer zweiten Geraden,

und beide Geraden gehören, nothwendiger Weise, verschiedenen Schaaren an." *)

VIII.

Durch irgend drei im Raume gegebene Gerade A, B, C, welche nicht mit einer Ebene parallel sind, ist demnach allemal ein einfaches Hyperboloïd bestimmt, d. h., es giebt allemal eine und nur eine solche Fläche, in welcher die drei Geraden liegen. Der Mittelpunct dieser Fläche wird, wie sich leicht beweisen läfst, und wie z. B. Hachette im vorhergehenden Bande dieses Journals bewiesen hat, auf folgende Weise gefunden:

1) „Man suche diejenigen drei Geraden A_1, B_1, C_1, welche respective mit den gegebenen Geraden A, B, C parallel sind, und respective die beiden übrigen B und C, A und C, A und B schneiden (IV.), und lege alsdann durch je zwei Parallelen, also durch A und A_1, B und B_1, C und C_1 eine Ebene, so ist der Durchschnittspunct dieser drei Ebenen der gesuchte Mittelpunct."

---

*) Wir fügen hier beiläufig folgende Bemerkungen hinzu:

1. Legt man durch A eine Ebene parallel mit B; durch B eine Ebene parallel mit C; und durch C eine Ebene parallel mit A, und nimmt diese drei Ebenen als Coordinaten-Ebenen an, so ist die Gleichung des genannten Hyperboloïds H:

$$(x-a)(y-b)(z-c) = xyz,$$

welche, wenn $a = 2\alpha$, $b = 2\beta$, $c = 2\gamma$ gesetzt wird, auf die Form

$$(x-\alpha)(y-\beta)(z-\gamma) = (x+\alpha)(y+\beta)(z+\gamma)$$

gebracht werden kann, in welcher Gestalt sie die Gleichung der genannten Fläche ist, wenn ihr Mittelpunct der Anfangspunct der Coordinaten ist, und diese letzteren mit irgend drei Geraden A, B, C, welche in der Fläche liegen und der nemlichen Schaar Geraden angehören, parallel sind. Aus dieser Gleichung leitet man leicht die von Binet gegebene Gleichung ab (Band I. Seite 347. dieses Journals).

2. Wählt man die Axen des Hyperboloids zu Coordinaten-Axen, so ist seine Gleichung bekanntlich:

$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = -a^2b^2c^2 \ldots\ldots \quad (\alpha.)$$

Bezieht sich folgende Gleichung

$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y - a^2b^2z^2 = 0 \ldots\ldots \quad (\beta.)$$

auf das nemliche Coordinaten-System, so ist letztere die Gleichung eines Kegels (zweiter Ordnung), welcher mit jener Fläche ($\alpha.$) einerlei Mittelpunct hat, und ihr Asymptoten-Kegel ist.

Legt man nun eine Ebene so, dafs sie den Kegel ($\beta.$) in irgend einer Kante, welche K heifsen mag, berührt, so findet man, dafs diese Ebene allemal die Fläche ($\alpha.$) in irgend zwei Geraden, z. B. A, A_1, schneidet, welche unter sich und mit der genannten Kante K parallel sind, und dafs letztere in der Mitte zwischen jenen beiden Geraden liegt. Folglich ist jede Gerade, welche sich in der Fläche ($\alpha.$) befindet, mit irgend einer Kante des Kegels ($\beta.$) parallel, und umgekehrt. Demnach folgen nachstehende Sätze:

Oder man erhält daher diesen Mittelpunct am einfachsten, wie folgt:

2) „Durch eine der drei gegebenen Geraden, z. B. durch A, lege man eine Ebene parallel mit B, welche die C in irgend einem Punct c schneiden wird; und ferner lege man durch A eine Ebene parallel mit C, welche die B in irgend einem Punct b schneiden wird, so ist alsdann die Mitte M derjenigen Geraden bc, welche die beiden genannten Puncte verbindet, der verlangte Mittelpunct."

IX.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen wollen wir uns nun zu der obigen Aufgabe (I.) wenden. Sie verlangt nemlich:

„Diejenige Gerade in aller Strenge zu construiren, welche vier gegebene Geraden, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, zumal schneidet."

Die vier gegebenen Geraden sollen A, B, C, D heifsen.

Werden zunächst nur die drei Geraden A, B, C berücksichtigt, so liegen diese in einem bestimmten einfachen Hyperboloïd (VIII.), welches

---

I. „Alle Geraden, welche in der Fläche eines einfachen Hyperboloïd's liegen, sind mit den Kanten eines bestimmten Kegels zweiter Ordnung parallel, d. h., zieht man durch einen beliebigen Punct P, mit jeder Geraden, welche in der Fläche eines gegebenen einfachen Hyperboloïds liegt, eine Parallele, so liegen alle diese Parallelen zusammen in einer bestimmten Kegelfläche zweiter Ordnung." Oder

II. „Sind im Raume irgend drei Gerade A, B, C gegeben, und eine vierte Gerade A_1, welche dieselben schneidet, bewegt sich auf alle mögliche Weise, ohne jedoch einen Augenblick aufzuhören, jene drei zu schneiden, so ist sie stets mit irgend einer Kante eines bestimmten Kegels parallel; oder bewegt sich eine andere Gerade a_1, welche fortwährend durch irgend einen fixen Punct P geht, so, dafs sie stets mit der Geraden A_1 parallel ist, so beschreibt sie eine bestimmte Kegelfläche zweiter Ordnung, welche den Punct P zum Mittelpunct (Scheitel) hat."

III. „Sind im Raume irgend zwei Gerade A, B, nebst einem beliebigen Kegel P zweiter Ordnung gegeben, so liegen alle mögliche Gerade A_1, B_1, C_1, ..., von denen jede jene beiden Geraden schneidet, und mit irgend einer Kante des Kegels P parallel ist, zusammen in einem bestimmten einfachen Hyperboloïd; oder bewegt sich eine Gerade A_1 so, dafs sie stets mit irgend einer Kante des Kegels P parallel ist, und fortwährend die beiden Geraden A, B schneidet, so beschreibt sie ein einfaches Hyperboloïd."

IV. „Sind irgend zwei Kegelschnitte A, B, welche in irgend einer Fläche zweiter Ordnung liegen, nebst einem beliebigen Kegel P derselben Ordnung gegeben, und bewegt sich eine Gerade A_1 so, dafs sie stets mit irgend einer Kante des Kegels P parallel ist, und fortwährend durch die Peripherien der beiden Kegelschnitte A, B geht, so beschreibt sie ein einfaches Hyperboloïd."

Ist der genannte Kegel ein gerader Kegel, so ist das Hyperboloïd dasjenige, welches durch Umdrehung erzeugt werden kann; und tritt an die Stelle des Kegels eine oder zwei Ebenen, so wird das genannte einfache Hyperboloïd, durch das hyperbolische Paraboloïd vertreten.

H heifsen mag, und es giebt eine Schaar von Geraden A_1, B_1, C_1, D_1.... von welchen jede jene drei Geraden schneidet und in der Fläche H liegt (VI.). Die gesuchte Gerade befindet sich daher nothwendiger Weise unter dieser Schaar, nemlich es ist diejenige, welche durch einen derjenigen Puncte geht, in welchen die vierte gegebene Gerade D das Hyperboloïd H schneidet. Kennt man demnach einen solchen Durchschnittspunct, so ist auch die gesuchte Gerade als gefunden zu betrachten, weil durch irgend einen Punct der Fläche H nur eine einzige, zu der Schaar A_1, B_1, C_1, D_1.... gehörige Gerade möglich ist. Daher giebt es so viele Geraden, welche der Aufgabe Genüge leisten, als es Puncte giebt, in welchen die Gerade D und das Hyperboloïd H einander schneiden, mithin im Allgemeinen zwei.

X.

Die Durchschnittspuncte der Geraden D und der Fläche H, und hernach die gesuchte Gerade, findet man nunmehr auf folgende Weise:

1) Man suche, nach (VIII.), den Mittelpunct des genannten Hyperboloïds H, in welchem nemlich die drei Geraden A, B, C liegen; er heifse M (Fig. 2.).

2) Durch die Gerade A lege man eine Ebene E parallel mit D, welche die Geraden B, C in irgend zwei Puncten b, c, und das Hyperboloïd in den beiden Geraden A und bc schneiden wird (VII.). Der Durchschnittspunct der beiden Geraden A, bc heifse a.

3) Durch die Gerade D lege man eine Ebene E_1 parallel mit A, welche nemlich die Ebene der Figur ist, so sind die zwei Ebenen E, E_1 mit einander parallel (II. 3.), sie schneiden folglich das Hyperboloïd H in ähnlichen, und ähnlich liegenden Kegelschnitten, deren Mittelpuncte a, m mit dem Mittelpunct M dieser Fläche in einer Geraden liegen. Nun ist der Schnitt der Ebene E die beiden Geraden A, bc, welche als eine Hyperbel anzusehen sind, deren Mittelpunct a ist. Daher wird auch der Schnitt der anderen Ebene E_1 eine Hyperbel h sein, deren Asymptoten md, md_1 mit den Geraden A, bc parallel sind, und deren Mittelpunct m mit den Puncten a, M in einer Geraden liegt.

4) Legt man daher durch den Punct M zwei Ebenen, die eine durch die Gerade A, und die andere durch die Gerade bc, so schneiden dieselben die Ebene E_1 in den Asymptoten md, md_1 der genannten Hyper-

bel h. Sind ferner b_1, c_1 die Durchschnittspuncte der Ebene E_1 und der Geraden B, C, so liegen dieselben nothwendiger Weise in der Peripherie der genannten Hyperbel h. Demnach kennt man die Asymptoten md, md_1 und zwei Puncte b_1, c_1 der genannten Hyperbel h, und es ist nunmehr darum zu thun, diejenigen beiden Puncte α, β zu finden, in welchen dieselbe von der Geraden D geschnitten wird.

5) Zieht man zu diesem Endzweck, z. B. durch den Punct b_1 die Gerade pq parallel mit D, d. i., mit dd_1, so ist nach einer bekannten Eigenschaft der Hyperbel:

$$pb_1 . qb_1 = d\alpha . \alpha d_1 = d\beta . \beta d_1 .$$

Um hiernach die gesuchten Puncte α, β zu finden: beschreibe man um dd_1, als Durchmesser, den Kreis μ, d. i., $dp_1q_1d_1$, trage in diesen die Sehne $p_1q_1 = pq$, und nehme $p_1b_2 = pb_1$, so ist, vermöge der Potenz des Kreises, $p_1b_2 . q_1b_2 = \delta b_2 . b_2\delta_1$. Man nehme daher ferner:

$$\mu\alpha = \mu\beta = \mu b_2 ,$$

so sind α, β die beiden gesuchten Puncte, in welchen die Gerade D die Hyperbel h, und folglich auch die beiden Puncte, in welchen dieselbe das Hyperboloïd H schneidet.

6) Legt man nun endlich durch jeden der beiden Puncte α, β eine Gerade A_1, B_1, welche z. B. die beiden Geraden A, B schneidet (III.), so wird jede derselben nothwendiger Weise auch die Gerade C schneiden, und somit der vorgelegten Aufgabe Genüge thun.

Wäre die Gerade dd_1 kleiner als pq, so müfste man in (5.) um den Durchmesser pq, anstatt dd_1, einen Kreis beschreiben, und alsdann fände man durch eine ähnliche Construction die beiden gesuchten Puncte α, β.

25.

Ueber die Construction schief liegender Räderwerke.

(Siehe Hachette Traité élémentaire des machines pag. 314 Anmerk.)

(Von Herrn *M. H. Jacobi*, zu Potsdam.)

1.

Der Theorie der Räderwerke liegt folgende allgemeine Aufgabe zum Grunde:

> Es sind 2 Drehungsaxen der Lage nach im Raume gegeben; man soll ein Räderwerk construiren, wodurch die continuirliche Kreisbewegung eines Maschinensystems um die eine Axe in eine eben solche Bewegung um die andere Axe, mit veränderter Winkelgeschwindigkeit, unmittelbar verwandelt werde.

Als specielle Fälle sind die cylindrischen und conischen Räder und die Schraube ohne Ende bekannt. Bei den beiden ersten liegen die Drehungsaxen in einer Ebene, und sind darin respective entweder parallel oder sich schneidend; bei der Schraube ohne Ende schneiden sich die Axen unter rechten Winkeln im Raume. Bei der Construction der gewöhnlichen Räderwerke wird von der Ansicht ausgegangen, dafs die sich berührenden Cylinder oder Kegel sich gegenseitig durch ihre Reibung in Bewegung setzen, und dafs die darauf angebrachten Erhöhungen und Vertiefungen (Zähne) nur dazu dienen, durch kräftigen Eingriff ein zu frühes Abschleifen der sich berührenden Theile zu verhindern, ohne dafs dadurch den gegebenen statischen Momenten Eintrag geschieht. Diese Voraussetzung mufs auch den allgemeinen Untersuchungen als Basis dienen, und es zerfallen dieselben demnach in zwei Haupttheile, deren erster zwei runde Oberflächen (surfaces de revolution) sucht, die sich so berühren, dafs die beiden Momente jedes Berührungspunctes, in Bezug auf die beiden Drehungsaxen, in einem constanten Verhältnisse stehen; welches Verhältnifs das umgekehrte der Winkelgeschwindigkeiten ist, womit die beiden Maschinensysteme sich um ihre Axen drehen. Die folgenden Untersuchungen würden die Form der darauf anzubringenden Erhöhungen und Vertiefungen zum Gegenstande haben.

So-

Sobald von continuirlicher Kreisbewegung die Rede ist, wird die Bedingung, dafs sich die beiden runden Oberflächen berühren, unerläfslich, obgleich es einzelne Fälle geben kann, wenn z. B. nur ein Theil einer Kreisbewegung beschrieben werden soll, wo blofs den statischen Bedingungen genügt zu werden braucht (Siehe Eytelweins Statik 1. Bd. Cap. 10, §. 288. u. s. f.). In Hachette a. a. O. scheint die Berührung nicht als nothwendig, sondern nur als zufälliges Moment erkannt worden zu sein.

2.

Man gelangt am leichtesten zu dem analytischen Ausdrucke, der die Berührung zweier runden Oberflächen bedingt, durch die Betrachtung, dafs die gemeinschaftlichen Normalen beide Drehungsaxen schneiden. Betrachtet man dieselben daher als zwei Leitlinien (directrices), und bewegt eine dritte gerade Linie, als Erzeugende (géneratrice), so auf denselben fort, dafs sie eine Curve, deren Gleichungen $y = \varphi(x)$, $z = \pi(x)$, immer unter rechten Winkeln schneidet, so hat diese Curve die Eigenschaft, dafs sie durch Umdrehung um beide Drehungsaxen zwei sich in derselben berührende runde Oberflächen erzeugt. Beiläufig folgt hieraus der interessante Satz für das Hyperboloïd à une nappe, dafs jede orthogonale Trajectorie des einen Systems gerader Linien, um irgend zwei Linien des andern Systems gedreht, zwei sich berührende runde Oberflächen erzeugt.

Sind die Gleichungen der beiden Drehungsaxen auf die einfachste Weise gegeben, nemlich durch die Gleichungen:

$$y = 0,\ z = 0 \text{ und}$$
$$y = x \operatorname{tg}\beta,\ z = a,$$

wo β der Winkel ist, unter welchem sich die Projectionen beider Drehungsaxen auf der x, y Ebene schneiden, und a die Distanz der einen Drehungsaxe von derselben Ebene, in welcher die zweite Drehungsaxe liegt, und mit der x Coordinatenaxe zusammenfällt, so erhält man die partielle Differentialgleichung

$$(yy' + zz')(z - a)\operatorname{tg}\beta + zx\operatorname{tg}\beta - ay = 0 \text{ (I)},$$

welcher die Curve, deren Gleichungen $y = \varphi(x)$, $z = \pi(x)$ sind, zu genügen hat. Es mufs noch bemerkt werden, dafs y' und z' die ersten Ableitungen von φx, πx bedeuten, und mit den Differentialcoefficienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ übereinkommen.

3.

Die Curve, welche obige Gleichung erfüllt, mufs nun ferner noch die Eigenschaft haben, dafs die Momente jedes Punctes derselben, in Bezug auf die beiden Drehungsaxen, in einem constanten Verhältnisse $1:n$ stehen, welches Verhältnifs das umgekehrte der Winkelgeschwindigkeiten um beide Drehungsaxen ist. Wenn dieselbe daher zugleich auf der Oberfläche eines Hyperboloïds à une nappe liegt, das durch die Gleichung

$$(y^2+z^2)n^2-(a-z)^2-(x\sin\beta-y\cos\beta)^2=0 \quad \text{(II)}$$

gegeben ist, so ist auch diese Bedingung erledigt, und die Curve, welche durch Umdrehung um die beiden Drehungsaxen zwei sich berührende Oberflächen erzeugt, die sich durch blofse Reibung in Bewegung setzen, vollständig durch die beiden Gleichungen

$$(yy'+zz')(z-a)\operatorname{tg}\beta+zx\operatorname{tg}\beta-ay=0 \quad \text{(I)},$$
$$(y^2+z^2)n^2-(a-z)^2-(x\sin\beta-y\cos\beta)^2=0 \quad \text{(II)},$$

gegeben.

4.

Die Form dieser Gleichungen, bei welchen durch Veränderung des Coordinatensystems die Complication nur aus der einen in die andere hineingeschafft wird, zeigt bald, dafs keine eleganten Resultate, auch selbst durch eine vollständige Integration, zu erwarten sind. Aber bedenkt man, dafs bei der wirklichen Construction eines solchen Räderwerks, eine von den vielen Curven, welche die Aufgabe lösen, nur in soweit gekannt zu werden braucht, als die Dicke der Räder erfordert, welche immer im Verhältnifs zu der Entfernung der beiden Axen gering ist, so wird man leicht hinlänglich viele Puncte derselben finden können, indem die Lage der Tangenten an jedem Puncte gegeben ist durch die beiden Gleichungen:

$$y'=f(x,\ y,\ z),$$
$$z'=F(x,\ y,\ z),$$

welche durch Absonderung der Differentialcoefficienten aus den Gleichungen I. und II. entstehen. Diese Puncte dienen zugleich dazu, die ihnen entsprechenden Puncte der Meridiancurven der runden Oberflächen zu verzeichnen, welche durch Umdrehung der gemeinschaftlichen Berührungscurve um beide Axen entstehen. Auf diese Meridiancurven kommt es hauptsächlich an, weil sie die bequemsten sind, um als Lehren zur Abdrehung der beiden soliden Oberflächen zu dienen.

Legt man durch den Punct $x = 0$, $y = 0$, $z = \frac{a}{n \pm 1}$ des Hyperboloïds à une nappe eine Ebene senkrecht auf die z Coordinatenaxe, so ist diese zugleich Tangentenebene desselben. Jede, in diesem Puncte auf der Ebene gezogene gerade Linie, kann daher auch als Tangente einer durch diesen Punct gehenden, unsern Bedingungen entsprechenden Curve, betrachtet werden. In diesem Puncte berühren sich daher auch sämmtliche runde Oberflächen, und zugleich auch das Hyperboloïd à une nappe. Dieses wird im Allgemeinen von allen diesen Oberflächen, von dem gedachten Puncte ab, geschnitten. Eine von den beiden geraden Linien, welche sich an diesem Puncte auf der Oberfläche des Hyperboloïds kreuzen, kann daher auch als Tangente der zu suchenden Curve betrachtet, und ein darauf genommener consecutiver Punct als eben dieser Curve zugehörig, angenommen werden. Die folgenden Puncte bestimmen sich nun nach Obigem.

5.

Einige specielle Fälle der allgemeinen Aufgabe haben bedeutendes technisches Interesse, und gestatten eine vollkommene Lösung. Es seien nemlich die beiden Drehungsaxen parallel, so wird $\beta = 0$, und das Hyperboloïd à une nappe verwandelt sich in einen geraden Cylinder von der Gleichung

$$(n^2 - 1)y^2 + (n^2 - 1)z^2 + 2az - a^2 = 0.$$

Man sieht daraus, dafs dessen erzeugende gerade Linie immer mit der x Coordinatenaxe parallel ist, und dafs er als Basis einen Kreis hat, dessen Radius $= \frac{an}{n^2 - 1}$. Die Gleichung I. verwandelt sich für $\beta = 0$ in $-ay = 0$, oder $y = 0$, woraus man sieht, dafs die beiden geraden Linien, in welchen die x, z Ebene den Cylinder schneidet, und deren Gleichungen $z = \frac{a}{1 \pm n}$ sind, den Bedingungen genügen. Dieses ist der Fall der cylindrischen Räder, und je nachdem n eine ganze Zahl oder ein Bruch ist, werden sich die beiden Cylinder, welche durch Umdrehung einer dieser Linien um beide Axen entstehen, entweder äufserlich oder innerlich berühren.

6.

Für die conischen Räder ist $a = 0$ und das Hyperboloïd verwandelt sich in einen Kegel des zweiten Grades, der seinen Scheitel im Anfangs-

puncte der Coordinaten hat, und dessen Gleichung

$$(y^2+z^2)n^2 - z^2 - (x\sin\beta - y\cos\beta)^2 = 0$$

ist. Die Differentialgleichung I. aber wird

$$(yy'+zz')z + zx = 0,$$

welche sich in die beiden Factoren $z=0$ und $yy'+zz'+x=0$ zerfällen läfst. Dieser letzern entspricht die vollständige Integralgleichung $y^2+z^2+x^2=C^2$. Aus $z=0$ sieht man, dafs der Schnitt des Kegels mit der x, y Ebene zwei gerade Linien $y=\frac{x}{\cos\beta \pm n}$ giebt. Dreht man eine von ihnen um die beiden Drehungsaxen, so erhält man zwei Kegel, die sich äufserlich oder innerlich berühren, je nachdem n eine ganze Zahl oder ein Bruch ist. Diese Kegel dienen nun bekanntlich dazu, die sphärisch-epicycloidischen Zähne darauf zu verzeichnen. Die Gleichung $y^2+z^2+x^2=C^2$ zeigt, dafs der Schnitt jeder Kugel, die den Anfangspunct der Coordinaten zum Mittelpunct hat, mit dem Kegel, dessen Gleichung $(y^2+z^2)n^2 - z^2 - (x\sin\beta - y\cos\beta)^2 = 0$, ebenfalls unsern Bedingungen genügt. Dreht man aber einen solchen Schnitt um beide Axen, so entsteht die Kugel selbst, weil jede Curve, welche auf der Oberfläche einer Kugel liegt, durch Drehung um irgend einen Radius, dieselbe im Allgemeinen wieder erzeugt; die Axen sind aber in diesem Falle Radien der Kugel.

7.

Diese beiden angeführten Fälle geben schon bekannte Resultate, aber wenn man annimmt, dafs die Winkelgeschwindigkeiten um beide Drehungsaxen gleich sind, so verwandelt sich für $n=1$ die Gleichung des Hyperboloïds à une nappe in die Gleichung eines parabolischen Hyperboloïds:

$$y^2\sin\beta^2 - x^2\sin\beta^2 + 2yx\sin\beta\cos\beta + 2az - a^2 = 0.$$

Auf dieser Oberfläche finden sich zwei den beiden erzeugenden Systemen angehörige gerade Linien, deren Gleichungen

$$z = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{x\sin\beta}{\cos\beta \pm 1},$$

welche zugleich der Bedingungsgleichung

$$(yy'+zz')(z-a)\operatorname{tg}\beta + zx\operatorname{tg}\beta - ay = 0$$

genügen. — Dreht man daher eine dieser Linien um die beiden Drehungsaxen, so erhält man zwei gleiche, nur der Lage nach verschiedene

runde Hyperboloïde à une nappe. Die Gleichung desjenigen, das sich auf der x Axe befindet, wird erhalten, wenn man in die allgemeine Form für runde Oberflächen auf der x Coordinatenaxe,

$$y^2 + z^2 - \varphi(x)^2 - \pi(x)^2,$$

für $\varphi(x)\frac{x\sin\beta}{\cos\beta \pm 1}$, und für $\pi(x)\frac{a}{2}$ setzt. Es ist dieselbe daher

$$y^2 + z^2 - \frac{x^2\sin\beta^2}{(\cos\beta \pm 1)^2} - \frac{a^2}{4} = 0.$$

Aus der Duplicität des Coefficienten von x^2 ergiebt sich, dafs nur eine von den beiden Linien $y = \frac{x\sin\beta}{\cos\beta \pm 1}$ auf dem runden Hyperboloïd liegt, und dafs die andere durch Umdrehung um beide Drehungsaxen zwei andere erzeugt, welche ebenfalls unsern Bedingungen genügen.

Man erhält die Meridiancurve, indem man in der Gleichung des runden Hyperboloïds $z =$ Null setzt. Dann erhält man

$$\frac{4y^2}{a^2} - \frac{4\sin\beta^2 x^2}{(\cos\beta \pm 1)^2 a^2} = 1,$$

also eine Hyperbel, deren grofse Axe a und deren kleine $\frac{a(\cos\beta \pm 1)}{\sin\beta}$ ist. Verzeichnet man daher eine solche Hyperbel, und dreht sie um die beiden gegebenen Drehungsaxen, indem man dieselben als Richtungen der kleinen Axe der Hyperbel, und die kürzeste Verbindungslinie beider, oder die z Coordinatenaxe, als Richtung der grofsen Axe betrachtet, so berühren sich die dadurch entstandenen Hyperboloïden à une nappe in einer geraden Linie, und es müssen sich deshalb, da die Linie überall gleiche Momente in Bezug auf beide Drehungsaxen hat, diese Hyperboloïden mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten um ihre Axen drehen.

8.

Hiernach ist man auch im Stande, die Schraube ohne Ende zu construiren, und die Möglichkeit darzuthun, wie man beliebig viele Gewinde auf einmal zum Eingriff bringen kann. Es wird nemlich für diesen Fall $\beta = 90°$, und die Bedingungsgleichungen verwandeln sich in

$$n^2y^2 + z^2n^2 - (a-z)^2 - x^2 = 0,$$
$$(yy' + zz')(z-a) + zx = 0.$$

Hieraus erhält man durch Elimination von yy' die Differentialgleichung $x = \frac{(a-z)^2 z'}{(a-z) - n^2 z}$, deren vollständiges Integral

$2a^2n^4\log[a-(n^2+1)z]+4an^2[a-(n^2+1)z]+[a-(n^2+1)z]^2=-x^2(n^2+1)^3+C$,
die Gleichung der Projectionen aller die obigen Bedingungen erfüllenden Curven auf der x, z Ebene giebt.

Setzt man $C=\infty$, so erhält man $z=\frac{a}{n^2+1}$, und durch Substitution dieses Werths in die Gleichung des Hyperboloïds,

$$\frac{x^2(1+n^2)^2}{(1-n^2)n^2a^2}-\frac{y^2(1+n^2)^2}{(1-n^2)a^2}=1.$$

Dieses ist die Gleichung einer Hyperbel, welche parallel mit der x, y Ebene ist, deren Mittelpunct in der z Coordinatenaxe liegt, und deren Axen parallel mit den Drehungsaxen sind.

Dreht man diese Hyperbel um die x Coordinatenaxe, welche zugleich eine der Drehungsaxen ist, so erhält man die Gleichung eines runden Hyperboloïds:

$$y^2+z^2-\frac{x^2}{n^2}-\frac{a^2n^2}{(n^2+1)^2}=0,$$

welches à une nappe ist, da die Constante immer negativ ist. Die Meridianhyperbel desselben wird:

$$\frac{y^2(n^2+1)^2}{a^2n^2}-\frac{x^2(n^2+1)^2}{a^2n^4}=1.$$

Die Gleichung des andern Hyperboloïds auf der zweiten Drehungsaxe, deren Richtung mit der y Coordinatenaxe zusammenfällt, ist

$$x^2+z^2-n^2y^2-\frac{a^2n^2}{(n^2+1)^2}=0,$$

und dessen Meridianhyperbel

$$\frac{(n^2+1)^2x^2}{a^2n^2}-\frac{(n^2+1)^2y^2}{a^2}=1.$$

Man sieht hieraus, dafs bei der ersten Meridianhyperbel die grofse Axe sich zur kleinen wie $n:1$, und bei der zweiten umgekehrt verhält, dafs aber bei beiden die grofsen Axen gleich sind, und die kleinen sich wie $n:1$ verhalten.

Da sich die beiden Hyperboloïden im ganzen Bereich einer Hyperbel berühren, so können sie, wegen der Duplicität der Schenkel, auch nicht frei um ihre Axen gedreht werden; wenn man indessen von dem einen nur ein Stück benutzt, das auf einer Seite der y, z Ebene, und von dem andern ein correspondirendes, das auf einer Seite der x, z Ebene

liegt, so wird die freie Drehung dieser beiden Oberflächen um ihre Axen nicht gehemmet, und sie werden dieselbe durch ihre Berührung in einem Hyperbelbogen mit den gegebenen Winkelgeschwindigkeiten vollstrecken können.

9.

Wir schreiten zum zweiten Theile der allgemeinen Aufgabe, nemlich zur Verzeichnung der Erhöhungen und Vertiefungen, welche, zum wechselseitigen Eingriff, auf den sich berührenden Oberflächen angebracht werden müssen. Diese Oberflächen allgemein zu finden, ist im Obigen gezeigt, nur wenige specielle Fälle, die zum Glück aber die meiste practische Bedeutung haben, lassen elegante und leichte Constructionen zu, und diese sind namentlich für den Fall gleicher Winkelgeschwindigkeiten und für die Schraube ohne Ende interessant und neu. Der Gegenstand, womit wir uns zu beschäftigen haben, gestattet mannichfache und wichtige statische und geometrische Untersuchungen, welche vorzüglich in Bezug auf die Schraube ohne Ende der Folge ausführlicher vorbehalten bleiben; hier sollen blofs einige allgemeine Andeutungen folgen.

Um den Standpunct zu bestimmen, von dem auszugehen, schliefsen wir uns wieder an bekannte Constructionen an. Der La Hireschen Verzeichnung der Zähne läfst sich allgemeine Bedeutung geben, wenn man annimmt, dafs sich die eine Axe um die andere dreht, und dann läfst sich die Oberfläche construiren, welche die Berührungscurve erzeugt, indem sie sich gleichzeitig um beide Axen so dreht, dafs die Winkelgeschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten, wie ihre respectiven Abstände von beiden Drehungsaxen. Der wechselseitige Eingriff wird durch Erhöhungen, die nach diesen, den gewöhnlichen epicycloïdischen analogen Oberflächen geformt sind, wie bei cylindrischen und conischen Rädern vor sich gehen. Diese Methode dürfte aber wegen der Schwierigkeit der practischen Ausführung, im Allgemeinen zu verwerfen, und die Constructionsmethode von White vorzuziehen sein, welcher auf cylindrischen und conischen Rädern, statt der epicycloïdischen Zähne, sich berührende Schraubenlinien verzeichnet (Siehe dessen Abhandlung 1812 in 4to und No. CCXXXVII. Febr. 1822 S. 142 des *Repertory of Arts, Manufactures etc.*).

Für abwickelbare Oberflächen nennt man Schraubenlinien (hélices) diejenigen, welche eine gerade Linie, auf der Abwickelungsebene verzeichnet, auf denselben bildet. Man kann daher auch diejenige Curve eine Schraubenlinie nennen, welche ein biegsamer unausdehnbarer Faden bildet, indem man ihn um irgend eine Oberfläche von beliebiger Natur wickelt. Legt man an allen Puncten einer solchen Schraubenlinie Tangentenebenen zur Oberfläche, worauf sie sich befindet, so bilden diese Ebenen bekanntlich durch ihre Schnitte eine abwickelbare Oberfläche. Die Schraubenlinie wird alle gerade Linien, welche die abwikkelbare Oberfläche formiren, unter gleichen Winkeln durchschneiden, oder sie wird ihre Trajectorie sein, und dieses ist ihre allgemeine Characteristik. Sie hat beiläufig noch die Eigenschaft, dafs sie die kürzeste Verbindungslinie zwischen zweien ihrer Puncte ist, und da die Krümmungslinien eben diese Eigenschaft haben, so folgt daraus, dafs man ebenfalls einen Faden längs dieser letzten Curven auf der Oberfläche ausspannen kann.

Legt man in irgend einem Puncte der Berührungscurve der beiden runden Oberflächen die gemeinschaftliche Tangentenebene, zieht aus diesem Puncte eine beliebige Richtung, und spannt danach einen Faden auf beiden Oberflächen aus, so werden sich die dadurch gebildeten Schraubenlinien immer in irgend einem Puncte der gemeinschaftlichen Curve berühren, wenn man die Oberflächen um ihre Axen dreht. Diese wichtige Eigenschaft ergiebt sich leicht aus dem aequiangulären Character der Schraubenlinien, und aus der Annahme, dafs dieselben die, als erzeugend betrachtete Berührungscurve, auf beiden Oberflächen unter gleichen, den correspondirenden Puncten angemessenen Winkeln durchschneiden. Man sieht leicht, dafs man beliebig viele parallele Schraubenlinien auf beiden Oberflächen construiren kann, und dadurch in den Stand gesetzt wird, die Berührungspuncte zu vervielfältigen, welche immer in der gemeinschaftlichen Berührungscurve liegen, so dafs, wenn man von dieser und von den Oberflächen überhaupt abstrahirt, und ein Netz solcher Schraubenlinien bildet, diese durch ihre Berührung eine Drehung um beide Axen veranlassen werden.

Auf mannichfaltige Weise kann man nun nach diesen dirigirenden Schraubenlinien die Erhöhungen und Vertiefungen des kräftigen Eingriffs

griffs wegen bilden; am zweckmäfsigsten aber wird es sein, wenn man dazu die krummen Oberflächen wählt, welche die auf den Schraubenlinien errichteten Normalen der Oberflächen bilden, sobald man ihnen keine bedeutende Höhe giebt. Diese werden, im Fall man die Schraubenlinien mit den Linien der gröfsten oder kleinsten Krümmung zusammenfallen läfst, abwickelbar und lassen sehr leichte Constructionen zu.

So kann man z. B. bei den runden Hyperboloïden, welche sich in einer geraden Linie berühren, auf dem einen als Schraubenlinien die geraden Linien wählen, welche die Berührungslinie durchschneiden und dem andern System der Erzeugung angehören; auf dem andern Hyperboloïd erhält man als Schraubenlinien doppelt gekrümmte Curven, welche durch die Richtung bestimmt werden, in welcher sich die geraden Linien auf dem ersten Hyperboloïd durchschneiden. Dasselbe Verfahren kann bei den in einer Hyperbel sich berührenden runden Hyperboloïden angewendet werden.

Potsdam, im September 1827.

26.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

1.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

49. Theorème. Si la somme de la série infinie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

est égale à zéro pour toutes les valeurs de x entre deux limites réelles α et β; on aura nécessairement

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0 \ldots a_m = 0 \ldots,$$

en vertu de ce que la somme de la série s'évanouira pour une valeur quelconque de x.

50. Problème. En supposant la série

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

convergente pour toute valeur positive, moindre que la quantité positive α; on propose de trouver la limite vers la quelle converge la valeur de la fonction $f(x)$, en faisant converger x vers la limite α.

51. Theorème. Si l'équation différentielle séparée

$$\frac{a\partial x}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4)}},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, a,$ sont des quantités réelles, est algébriquement intégrable, il faut nécessairement, que la quantité a soit un nombre rationel.

52. Problème. Trouver une intégrale algébrique des deux équations séparées:

$$\frac{\partial x.\sqrt{3}}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(3-3y^2+y^4)}},$$

$$\frac{\partial x.\sqrt{3}}{\sqrt{(1+x^2+x^4)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(1-x^2+x^4)}}.$$

2.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.)

53. Aufgabe. Wenn e die Basis der hyperbolischen Logarithmen, π den halben Kreisumfang, und n eine positive oder negative ganze

Zahl bedeuten, so ist bekanntlich $e^{2n\pi\sqrt{-1}} = 1$, $e^{1+2n\pi\sqrt{-1}} = e$; folglich auch $e^{(1+2n\pi\sqrt{-1})^2} = e = e^{1+4n\pi\sqrt{-1}-4n^2\pi^2}$. Da aber $e^{1+4n\pi\sqrt{-1}} = e$ ist, so würde daraus folgen: $e^{-4n^2\pi^2} = 1$, welches absurd ist. Nachzuweisen, wo in der Herleitung dieses Resultats gefehlt ist.

3.

(Von Herrn *J. Steiner*.)

54. Lehrsatz. „Sind irgend zwei in einer Ebene liegende Dreiecke so beschaffen, dafs, wenn aus den Ecken des einen auf die Seiten des anderen, in irgend einer Ordnung genommen, Lothe gefället werden, dafs alsdann diese drei Lothe einander in irgend einem Puncte treffen, so treffen auch diejenigen drei Lothe, welche in entsprechender Ordnung, aus den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersteren gefället werden, einander allemal in irgend einem Punct." Oder:

I) „Fället man aus einem willkürlichen Punct D (Fig. 3.) in der Ebene eines Dreiecks ABC auf die Seiten des letzteren Lothe Da, Db, Dc, nimmt in diesen Lothen drei beliebige Puncte a, b, c, als Ecken eines anderen Dreiecks abc an, und fället auf dessen Seiten aus den Ecken des gegebenen Dreiecks, in gehöriger Ordnung genommen, Lothe Ad, Bd, Cd, so treffen diese einander allemal in irgend einem Puncte d." Und ferner:

II) „Nimmt man ähnlicherweise ein drittes Dreieck $a_1 b_1 c_1$ an, dessen Ecken in den nemlichen drei ersteren Lothen liegen, so wird demselben auf gleiche Weise ein Punct d_1 entsprechen (I.), und alsdann liegen die drei Durchschnittspuncte der drei Paar entsprehender Seiten des zweiten und dritten Dreiecks, d. h., die Durchschnittspuncte α, β, γ der Seitenpaare bc und $b_1 c_1$, $c\alpha$ und $c_1 a_1$, ab und $a_1 b_1$, allemal in irgend einer Geraden $\alpha\beta\gamma$; und

III) diese Gerade $\alpha\beta\gamma$ ist allemal zu derjenigen Geraden dd_1, welche durch die beiden genannten Puncte d, d_1 geht, senkrecht."

55. Lehrsatz. „Haben irgend zwei sphärische Dreiecke, die in einerlei Kugelfläche liegen, solche gegenseitige Lage, dafs, wenn man aus den Ecken des einen auf die

Seiten des anderen, in irgend einer Ordnung genommen, Lothe fället, dafs alsdann diese Lothe einander in einem Punct treffen, so treffen allemal auch diejenigen drei Lothe, welche man in entsprechender Ordnung, aus den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersteren fället, einander in irgend einem Punct." Oder:

I) „Fället man aus einem willkürlichen Punct D der Kugelfläche, auf die Seiten BC, CA, AB eines gegebenen sphärischen Dreiecks ABC, sphärische Lothe Da, Db, Dc, nimmt in diesen Lothen drei beliebige Puncte a, b, c als Ecken eines zweiten sphärischen Dreiecks abc an, und fället auf dessen Seiten bc, ca, ab, aus den Ecken des ersteren Dreiecks, in gehöriger Ordnung genommen, sphärische Lothe Ad, Bd, Cd, so treffen diese einander allemal in irgend einem Puncte d." Und ferner:

II) „Einem dritten sphärischen Dreieck $a_1b_1c_1$, dessen Ecken in den nemlichen drei ersteren Lothen Daa_1, Dbb_1, Dcc_1 angenommen werden, wird ähnlicherweise ein Punct d_1 entsprechen, und alsdann liegen die drei Durchschnittspuncte α, β, γ, der drei Paar einander entsprechender Seiten, nemlich der Seiten-Paare bc und b_1c_1, ca und c_1a_1, ab und a_1b_1, des zweiten und dritten Dreiecks, allemal in irgend einem Hauptkreise $\alpha\beta\gamma$; und

III) dieser Hauptkreis $\alpha\beta\gamma$ steht allemal auf demjenigen Hauptkreise dd_1, welcher durch die beiden genannten Puncte d, d_1 geht, senkrecht."

56. Lehrsatz. „Haben irgend zwei (irregulaire) Tetraëder solche gegenseitige Lage, dafs, wenn aus den Ecken des einen auf die Seitenebenen des anderen, in irgend einer Ordnung genommen, Lothe gefället werden, dafs alsdann diese vier Lothe einander in einem Punct treffen, so treffen allemal auch diejenigen vier Lothe, welche man in entsprechen- Ordnung, aus den Ecken des zweiten Tetraëders auf die Seitenebenen des ersteren fället, einander in irgend einem Punct." Oder:

I) „Fället man aus einem willkürlich angenommenen Punct E auf die Seitenebenen BCD, CDA, DAB, ABC eines gegebenen Tetraëders $ABCD$ Lothe Ea, Eb, Ec, Ed, nimmt in diesen Lothen vier beliebige Puncte a, b, c, d, als Ecken eines zweiten Tetraëders $abcd$ an, und fället auf dessen Seitenebenen bcd, cda, dab, abc aus den Ecken A, B, C, D

des ersteren Tetraëders, Lothe *Ae*, *Be*, *Ce*, *De*, so treffen diese einander allemal in irgend einem Puncte *e*." Und ferner:

II) „Nimmt man in den vier ersteren Lothen ähnlicherweise vier andere Puncte a_1, b_1, c_1, d_1, als Ecken eines dritten Tetraëders an, so wird diesem in gleicher Beziehung ein Punct e_1 entsprechen; und alsdann liegen die vier Durchschnittslinien α, β, γ, δ der vier Paar einander entsprechender Seitenebenen des zweiten und dritten Tetraëders, nemlich die Durchschnittslinien der vier Paar Seitenebenen bcd und $b_1c_1d_1$, cda und $c_1d_1a_1$, dab und $d_1a_1b_1$, abc und $a_1b_1c_1$, allemal in irgend einer Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ *); und

III) diese Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ steht allemal auf derjenigen Geraden ee_1, welche durch die beiden genannten Puncte e, e_1 geht, senkrecht."

57. Lehrsatz. „Es sei irgend ein unregelmäfsiges Vieleck so beschaffen, dafs sowohl ein Kreis in, als ein anderer Kreis um dasselbe beschrieben werden kann. Werden die Radien der Kreise durch r, R, und der Abstand ihrer Mittelpuncte von einander durch a bezeichnet, so hat man

I. für ein Dreieck: $R^2 - a^2 = 2rR$ (Siehe 3. Aufgabe, S. 96),

II. für ein Viereck: 1) $(R^2-a^2)^2 = 2r^2(R^2+a^2)$, oder

2) $(R+r+a)(R+r-a)(R-r+a)(R-r-a) = r^4$,

III. für ein Fünfeck: $r(R-a) = (R+a).\sqrt{[(R-r+a)(R-r-a)]} + (R+a).\sqrt{[(R-r-a).2R]}$,

VI. für ein Sechseck: $3(R^2-a^2)^4 = 4r^2(R^2+a^2)(R^2-a^2)^2 + 16r^4a^2R^2$.

V. für ein Achteck:

$$8r^2[R^2-a^2)^2 - r^2(R^2+a^2)]\,[(R^2+a^2)\,[(R^2-a^2)^4 + 4r^4a^2R^2] - 8r^2a^2R^2(R^2-a^2)^2] = [(R^2-a^2)^4 - 4r^4a^2R^2]^2."$$

58. Lehrsatz. Wenn irgend ein sphärisches Viereck so beschaffen ist, dafs sowohl ein Kreis in, als ein anderer Kreis um dasselbe beschrieben werden kann, so hat man, wenn die sphärischen Radien der beiden Kreise durch r, R und der sphärische Abstand ihrer Pole von einander durch a bezeichnet werden, folgende Gleichung:"

1) $[\cos(r+a)^2 - \cos R^2]\,[\cos(r-a)^2 - \cos R^2] = \sin r^4 . \cos R^4$, oder

2) $\sin(R+r+a)\sin(R+r-a)\sin(R-r+a)\sin(R-r-a) = \sin r^4 . \cos R^4$.

59. Lehrsatz. Man stelle sich im Raume eine Ebene AB (Fig. 4.) und irgend eine Kugel m vor. Der Radius dieser Kugel soll durch r,

*) Siehe Band I. S. 38. dieses Journals.

und das Loth mA, aus ihrem Mittelpunct auf die Ebene, durch h bezeichnet werden. Ferner sei m_1 irgend eine Kugel, welche die Ebene und jene Kugel äufserlich berührt, so sind alsdann unzählige Kugeln denkbar, welche die Ebene und die beiden Kugeln m, m_1 zugleich berühren, wie z. B. die Kugeln μ, μ_1. Man denke sich nun eine Reihe solcher Kugeln μ_1, μ_2, $\mu_3 \ldots \mu_x$, welche einander der Ordnung nach berühren, und deren Anfangsglied μ_1 an beliebiger Stelle angenommen ist, so ist es möglich, dafs, wenn diese Reihe im Ring herum fortgesetzt wird, bis man zu dem Anfangsgliede μ_1 zurückkömmt, dafs alsdann die letzte Kugel nicht nur die vorletzte, sondern zugleich auch die erste μ_1 berührt; und zwar hängt dieses Eintreffen lediglich von dem Verhältnifs der beiden Gröfsen r, h zu einander, und durchaus nicht von der Gröfse und Lage der Kugel m_1, noch von der Lage des Anfangsglieds μ_1 der Reihe ab. Nemlich die erste Kugel μ_1 der genannten Reihe wird allemal von:

I. der dritten μ_3 berührt, wenn: $h = 5r$,
II. - vierten μ_4 - - $h = 3r$,
III. - fünften μ_5 - - $h^2 - 4hr - 16r^2 = 0$,
IV. - sechsten μ_6 - - $h = r$,
V. - achten μ_8 - - $h^2 - 6hr + r^2 = 0$,

u. s. w.

60. Lehrsatz. „Wenn von irgend vier Kugeln je zwei einander äufserlich berühren, so giebt es allemal zwei bestimmte andere Kugeln m, M, von denen jede jene vier berührt, und zwar berührt entweder α) jede dieselben äufserlich, oder β) die eine berührt dieselben äufserlich und die andere einschliefsend. Werden die Radien dieser beiden Kugeln m, M durch r, R, und der Abstand ihrer Mittelpuncte von einander durch a bezeichnet, so hat man allemal:

$\alpha)$ $a^2 = R^2 + r^2 + 10rR$, oder
$\beta)$ $a^2 = R^2 + r^2 - 10rR$."

61. Lehrsatz. „Sind r, R die Radien und a der Abstand der Mittelpuncte zweier ineinander liegender Kugeln m, M, und findet zwischen jenen drei Gröfsen die Gleichung

$$a^2 = R^2 + r^2 - 6rR$$

Statt, so lassen sich in dem Raume zwischen den beiden Kugelflächen, auf willkürliche Weise, 6 andere Kugeln so beschreiben, dafs jede 4 der übrigen und zugleich jene beiden Kugeln m, M berührt; d. h., denkt

man sich an irgend einer Stelle in dem genannten Zwischenraum eine Kugel μ, welche die Kugeln m, M berührt, so lassen sich um dieselbe herum, auf willkürliche Weise, vier andere Kugeln μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 legen, die einander der Ordnung nach berühren, und von denen jede die drei ersteren Kugeln m, M, μ_1 berührt, und alsdann ist allemal noch eine andere Kugel μ_6 möglich, welche die sechs Kugeln m, M, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 berührt."

62. Lehrsatz. „Sind auf einer Kugelfläche eine beliebige Anzahl willkürlich liegende Puncte A, B, C ..... gegeben, und es soll auf derselben ein anderer Punct P so bestimmt werden, dafs, wenn man die Cosinusse der Hauptkreisbogen AP, BP, CP, ..., welche diesen Punct mit jenen Puncten verbinden, respective mit gegebenen Zahlen a, b, c, ... multiplicirt, die Summe dieser Producte einer gegebenen Gröfse K gleich sei, also dafs

$$a.\cos AP + b.\cos BP + c.\cos CP + ... = K$$

sei, so ist der Ort des Puncts P allemal die Peripherie irgend eines Kreises. Wird die Gröfse K kleiner oder gröfser angenommen, während die Puncte A, B, C, ... fix und die Zahlen a, b, c, ... constant bleiben, so bleibt auch der Pol des Ortskreises unveränderlich, d. h., die verschiedenen Ortskreise, die dadurch entstehen, sind alsdann alle mit einander parallel."

63. Lehrsatz. „Sind im Raume irgend eine Anzahl n beliebiger Puncte gegeben, und man ordnet dieselben auf willkürliche Weise, zieht sodann aus dem ersten nach dem zweiten die Gerade A; aus der Mitte der A nach dem dritten Punct, die Gerade B; aus dem Punct, welcher von der Geraden B, von ihrem Anfange an gerechnet, das erste Drittel abschneidet, nach dem vierten Punct, die Gerade C; aus dem Punct, welcher von C das erste Viertel abschneidet, nach dem fünften Punct, die Gerade D; aus dem Punct, welcher von D das erste Fünftel abschneidet, nach dem sechsten Punct, die Gerade E, u. s. w.; multiplicirt hierauf die Quadrate der genannten Geraden, nach der Ordnung, mit den Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, ..., $\frac{n-1}{n}$, so hat die Summe aller dieser Producte, nemlich die Summe

$$\tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{2}{3}B^2 + \tfrac{3}{4}C^2 + \tfrac{4}{5}D^2 + \tfrac{5}{6}E^2 + ... + \frac{n-1}{n}Z^2$$

allemal einerlei Gröfse, in welcher beliebigen Ordnung man auch die gegebenen Puncte aufeinander folgen läfst."

64. Lehrsatz. „Sind a, b, c, d die Seiten, und e, f die Diagonalen eines sphärischen Vierecks, und ist g derjenige Hauptkreisbogen, welcher die Mitten der beiden Diagonalen verbindet, so ist allemal:

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 2 . \cos \tfrac{1}{2} e . \cos \tfrac{1}{2} f . \cos g.$$"

(Beim geradlinigen Viereck hat man bekanntlich die entsprechende Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4g^2.)$$

65. Lehrsatz. „Sind im Raume irgend zwei fixe Gerade gegeben, und läfst man zwei Ebenen, welche zu einander senkrecht sind, sich so bewegen, dafs jede fortwährend durch eine jener Geraden geht, so beschreibt die Durchschnittslinie der beiden Ebenen ein einfaches Hyperboloïd, in welchem zugleich auch jene beiden Geraden liegen, und welches von jeder Ebene, die zu einer dieser Geraden senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird."

4.

(Von Anderen.)

66. Aufgabe I. Beliebige Puncte in einer und derselben Ebene, in beliebiger Zahl n, werden zu zweien immer durch gerade Linien so verbunden werden können, dafs sich die verbindenden Linien nicht schneiden. Es fragt sich, auf wievielerlei Arten diese Verbindung möglich sei, ob die Zahl der verbindenden Linien verschieden, und welche die gröfste und welche die kleinste Zahl sei.

II. Beliebige Puncte im Raume, in beliebiger Zahl n, werden zu zweien immer durch gerade Linien, und zu dreien durch Ebenen so verbunden werden können, dafs sich die verbindenden Linien und Ebenen nicht schneiden. Es fragt sich, auf wievielerlei Arten diese Verbindung möglich sei, ob die Zahl der verbindenden Linien und Ebenen verschieden, und welche die gröfste und welche die kleinste Zahl sei.

27.

Frottement des vis et des écroux.

Extrait des leçons de Mécanique appliquée aux machines, faites en 1825 et 1826, à l'école spéciale de l'artillerie et du génie à Metz. *)

(Par Mr. *J. V. Poncelet.*)

Soit (Fig. 1. Tab. IV.) MM' l'axe d'une vis à filets triangulaires, supposée verticale et fixe, l'écrou seul étant mobile; soit AH un élément hélicoïde quelconque du filet de cette vis compris entre deux cylindres concentriques à l'axe, AB la tangente en un point quelconque A de cet élément, MC la génératrice correspondante, enfin AA' une verticale parallèle à l'axe MM', soient BCA' les points de rencontre de ces trois droites avec un plan horizontal quelconque, $A'B$, $A'C$, projections de AB et AC sur ce plan, seront les directions respectives de la tangente et du rayon au point A' du cercle de base du cylindre, qui contient l'hélice AH, et le plan ABC sera le plan tangent en A à la surface du filet de vis. Si nous abaissons du point A' la perpendiculaire $A'O$ sur ce plan, puisque nous traçions les droites AOE, BOI, les angles $A'AE$, OBA' seront les angles formés par la verticale AA' et l'horizontale $A'B$ ou Ap avec le plan tangent ABC.

Cela posé, nommons

l'angle $A'AO$ . . . . . α,

l'angle $A'BO$ . . . . . β,

l'angle $A'AB$, ou l'inclinaison donnée de la tangente AB sur la verticale a,

l'angle donné CAA' de l'inclinaison de la génératrice MAC sur la verticale b,

*) Diese und die folgende Abhandlung No. 28. aus der Feder des berühmten Verfassers des classischen Werks: *Traité des proprietés projectives des figures*, und vieler anderen werthvollen Abhandlungen, sind von demselben dem Herausgeber dieses Journals handschriftlich mitgetheilt worden und erscheinen hier zum erstenmale gedruckt.

Auch hat der Herr Verfasser die Güte gehabt, dem Herausgeber des Journals ein so eben im Druck erschienenes „*Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes, mues par dessous; suivi d'expériences sur les effets mécaniques de ces roues, par M. Poncelet, à Metz chez Thiel*, 1827," mitzutheilen. Diese Schrift ist von grofsem Interesse für die Theorie und die Verbesserung der unterschlächtigen Wasserräder, und also der Aufmerksamkeit der Maschinisten angelegentlich zu empfehlen.

le rayon $A'M'$ du cylindre de l'hélice AH . . . . . r,
le pas commun à tous les filets de vis . . . . . h,
la charge totale supportée par ces filets parallèlement à l'axe . . . Q,
la puissance horizontale qui fait équilibre à Q et au frottement, à l'extrémité du bras de levier quelconque R . . . . . P.

La surface supérieure des filets de vis, embrassés par l'écrou supportant la pression verticale Q, on pourra supposer cette charge distribuée uniformément sur tous les points de cette surface, de façon que chacun des élémens superficiels en supportera une portion déterminée par l'étendue de la projection horizontale. D'après cela la pression verticale supportée par le filet de vis élémentaire AH, que je nomme q, sera proportionnelle (π étant le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre) à la surface $2\pi r\partial r$ de la projection horizontale de ce filet; c'est-à-dire qu'on aura, S étant la projection horizontale de la surface entière du filet de la vis,

$$S : Q = 2\pi r\partial r : q = \frac{2\pi r\partial r}{S} Q.$$

Ainsi, à une portion infiniment petite de S, comprise entre deux rayons consécutifs formant un angle $\partial\theta$, répondra une pression verticale élémentaire $q.\frac{\partial\theta}{360^\circ}$, que nous représenterons par ∂q.

Chacune de ces pressions verticales donnera lieu à une pression ∂n, normale à la surface de la vis, qui tendra à faire tourner et glisser cette vis autour et le long de son axe, mais qui sera détruite par la rigidité de cette même vis; à son tour, cette pression normale ∂n fera naître un frottement $f\partial n$, dirigé suivant l'hélice AH, c'est-à-dire tangentiellement à cette hélice suivant AB; ce frottement s'opposera à l'action de la puissance horizontale P. Cela posé, cherchons d'abord pour le filet élémentaire AH la force horizontale Ap ou p nécessaire à appliquer à l'extrémité du rayon AG, pour maintenir toutes les forces dq et $f\partial n$ en équilibre.

Pour cela supprimons la vis en conservant son axe, et remplaçons les pressions normales ∂n souffertes par cette vis, par des forces égales et dirigées en sens contraire contre l'écrou; ce dernier pourra alors être considéré comme un corps libre assujetti seulement à tourner en glissant le long de l'axe MM' de la vis, et qui devra être en équilibre sous

l'action de toutes les forces élémentaires ∂q, ∂p, ∂n, $f\partial n$. Or il est nécessaire et il suffit, comme on sait, qu'en décomposant chacune de ces forces en deux autres, l'une verticale ou parallèle à l'axe, l'autre horizontale ou située dans un plan perpendiculaire à cet axe:

1) la somme algébrique de toutes les composantes parallèles à l'axe soit égale à zero;

2) la somme des momens des composantes horizontales, qui tendent à faire tourner l'écrou autour de l'axe dans un sens, soit égale à celle des momens des mêmes composantes, qui tendent à le faire tourner en sens contraire. Mais comme cette dernière égalité seroit assez difficile à établir, nous pourrons lui substituer celle, qui résulte du principe des vitesses virtuelles, et qui exprime les conditions d'équilibre ordinaires de l'écrou autour de la vis.

Les composantes verticales des forces ∂q, ∂n, $f\partial n$ sont évidemment ∂q, $dN\cos AA'O = \partial n \sin\alpha$, $f\partial n \cos BAA' = f\partial n \cos a$; donc on a, en observant, que ∂n agit en sens contraire de ∂q, et le signe Σ indiquant d'ailleurs la somme des quantités de même espèce:

$$\Sigma\partial q - \Sigma\partial n \sin\alpha + \Sigma f n \cos a = 0, \text{ ou } q - n\sin\alpha + fn\cos a = 0,$$

puisque α et a sont constantes pour toutes les forces ∂n et ∂q.

Le principe des vitesses virtuelles donne encore pour les conditions de l'équilibre autour de la vis, en considérant le mouvement dans un tour entier:

$$p : 2\pi r = qh + fn\sqrt{(h^2 + 4\pi^2 r^2)},$$

car $\sqrt{(h^2+4\pi^2r^2)}$ est le développement du filet AH, pris pour une révolution entière de l'écrou; c'est le chemin parcouru par le point d'application A du frottement, pendant que l'écrou ou ce point s'élève de h.

La tangente de l'angle ABA' étant $\frac{h}{2\pi r}$, on a évidemment

$$\cos a = \cos A'AB = \frac{h}{\sqrt{(h^2+4\pi^2r^2)}};$$

reste à trouver $\sin\alpha$.

Les triangles OBA', OAA' rectangles en O, donnent respectivement:

$$A'O = A'B\sin\beta, \quad A'O = AA'\sin\alpha;$$

or, dans le triangle BAA' rectangle en A', on a $A'B = AA'\tang a$; donc $A'B\sin\beta = AA'\tang a \sin\beta = AA'\sin\alpha$, et par conséquent

$$\sin\alpha = \tang a \sin\beta.$$

Mais à cause des triangles $A'BI$, $AA'I$ rectangles en A' et I, on a aussi

$$\text{tang}\beta = \frac{A'I}{A'B} = \frac{AA'\sin b}{AA'\,\text{tang}\,a} = \frac{\sin b}{\text{tang}\,a};$$

donc enfin

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sqrt{(\sin^2 b + \text{tang}^2 a)}} = \frac{h\sin b}{\sqrt{(h^2\sin^2 b + 4\pi^2 r^2)}}$$

et

$$\sin\alpha = \text{tang}\,a\sin\beta = \frac{2\pi r\sin b}{\sqrt{(h^2\sin^2 b + 4\pi^2 r^2)}}.$$

Substituant las valeurs de $\cos a$ et de $\sin\alpha$ dans les équations d'équilibre, on en déduira tous calculs faits

$$p = q\,\frac{h\sin b\sqrt{(h^2+4\pi^2r^2)} + 2\pi r f\sqrt{(h^2\sin^2 b + 4\pi^2 r^2)}}{2\pi r\sin b\sqrt{(h^2+4\pi^2r^2)} - hf\sqrt{(h^2\sin^2 b + 4\pi^2 r^2)}}.$$

La puissance horizontale P agissant avec le bras de levier R et devant maintenir en équilibre toutes les puissances partielles p, qui répondent aux différens filets de vis, on aura évidemment à cause de

$$q = Q\,.\,\frac{2\pi r\,dr}{S}:$$

$$PR = \Sigma pr = Q\,\frac{2\pi}{S}\int r^2\,dr\,\frac{h\sin b\sqrt{(h^2+4\pi^2r^2)} + 2\pi r f\sqrt{(h^2\sin^2 b + 4\pi^2 r^2)}}{2\pi r\sin b\sqrt{(h^2+4\pi^2r^2)} - hf\sqrt{(h^2\sin^2 b + 4\pi^2 r^2)}},$$

dans la quelle il faut attribuer à f un signe contraire à celui qu'il a, lorsque c'est la charge Q qui est sur le point d'entraîner la force P.

Cette formule est due à Mr. le Professeur Persy, qui l'a obtenue par une marche purement analytique, différente de celle, que nous avons mise en usage; on peut voir dans la nouvelle architecture hydraulique de Mr. Prony une formule de la même espèce et qui, bien que moins rigoureuse dans le fond, conduit cependant à des résultats peu différents dans le cas des applications ordinaires. Malheureusement la formule de Mr. Persy n'est pas intégrable: mais le fut-elle, on ne gagneroit pas beaucoup à en rechercher l'expression finie, à cause de la complication, qui empécheroit toujours de l'appliquer à la pratique.

On doit ici se borner à une approximation; or si l'on met la fraction comprise sous le signe d'intégration, sous cette forme:

$$\frac{\frac{h}{2\pi r}\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2r^2}\right)} + f\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2 b}+\frac{h^2}{4\pi^2r^2}\right)}}{\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2r^2}\right)} - \frac{h}{2\pi r}f\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2 b}+\frac{h^2}{4\pi^2r^2}\right)}} = \frac{\cot a\sqrt{(1+\cot^2 a)} + f\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2 b}+\cot^2 a\right)}}{\sqrt{(1+\cot^2 a)} - \cot a f\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2 b}+\cot^2 a\right)}},$$

et qu'on la développe en série par rapport à $\cot a$, qui est nécessairement

une quantité très petite, il viendra, en remettant pour $\cot a$ sa valeur, et intégrant ensuite (pour obtenir PR) depuis $r=r''$ jusqu'à $r=r'$, rayons des hélices extrêmes du filet de vis, observant enfin que $S=\pi(r^2-r''^2)$,

$$PR = Q\left\{A\frac{h}{2\pi} + B\,\tfrac{2}{3}\,\frac{(r'^2+r'r''+r''^2)}{r'+r''} + C\,\frac{h^2}{4\pi^2\,\frac{(r'+r'')}{2}} + \text{etc.}\right\},$$

dans la quelle on a

$$A = 1+\frac{f^2}{\sin^2 b},\quad B=\frac{f}{\sin b},\quad C=\frac{f^3}{\sin^3 b}+\tfrac{1}{2}f\left(\sin b+\frac{1}{\sin b}\right).$$

La série a été poussée beaucoup plus loin, mais elle est tellement convergente dans les cas ordinaires de pratique, qu'il suffira toujours de s'arrêter aux deux premiers termes en A et B, ensorte qu'on aura simplement, en multipliant tout par 2π,

$$2\pi R.P = \left(Q+\frac{f^2}{\sin^2 b}Q\right)h + \frac{fQ}{\sin b}2\pi.\tfrac{2}{3}\,\frac{(r'^2+r'r''+r''^2)}{r'+r''}.$$

On remarquera que $\frac{2}{3}\,\frac{r'^2+r'r''+r''^2}{r'+r''}$ est le bras de levier moyen de la projection horizontale du filet de la vis, dont la surface est S ou $\pi(r'^2-r''^2)$; de sorte que l'équation ci-dessus exprime les conditions d'équilibre de l'écrou, en le supposant chargé du poids $Q+\frac{f^2}{\sin^2 b}Q$, et son frottement sur le filet de la vis remplacé par celui de la zône qui est la projection horizontale de la surface des filets, supposée pressée verticalement par le poids $\frac{Q}{\sin b}$ donnant lieu au frottement $f\frac{Q}{\sin b}$, qui agit à l'extrémité du bras de levier moyen de cette zône.

Dans tous les cas, il sera suffisamment exact pour la pratique, de calculer le frottement de la vis en supposant que le filet se réduise au filet moyen, c'est-à-dire par la formule

$$PR = Qr\,\frac{h\sin b\sqrt{(h^2+4\pi^2r^2)}+2\pi rf\sqrt{(h^2\sin^2 b+4\pi^2r^2)}}{2\pi r\sin b\sqrt{(h^2+4\pi^2r^2)}-hf\sqrt{(h^2\sin^2 b+4\pi^2r^2)}},$$

qu'on obtient sur le champ, en remplaçant q par Q, et p par $\frac{PR}{r}$, dans la formule en p et q trouvée ci-dessus.

En effet, en développant cette expression en série et comparant avec l'expression rigoureuse de RP, on trouve que pour les données les plus ordinaires, la différence de RP ne s'élève qu'à 0,001 . Qh environ, lors même que l'on prend $r=\frac{r'+r''}{2}$; l'erreur seroit moindre encore si l'on prenoit

$$r = \tfrac{2}{3}.\frac{r'^2+r'r''+r''^2}{r'+r''},$$

ou le bras de levier moyen de la projection horizontale du filet. Or, si l'on divise les deux termes de la fraction ci-dessus par $2\pi r.\sin b$, pour la mettre sous la forme

$$RP = Qr.\frac{\frac{h}{2\pi r}\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2r^2}\right)}+f\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2 b}+\frac{h^2}{4\pi^2r^2}\right)}}{\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2r^2}\right)}-\frac{h}{2\pi r}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2 b}+\frac{h^2}{4\pi^2r^2}\right)}},$$

on pourra négliger le terme $\frac{h^2}{4\pi^2r^2}$ vis-à-vis de 1 et de $\frac{1}{\sin^2 b}$, ce qui donne la formule très simple

$$2\pi RP = 2\pi r.\frac{\frac{h}{2\pi r}+\frac{f}{\sin b}}{1-\frac{h}{2\pi r}.\frac{f}{\sin b}}.Q = 2\pi r\frac{h\sin b+2\pi rf}{2\pi r\sin b-fh}.Q,$$

qui devient identique à celle que l'on connoit déjà pour la vis à filets carrés, en remplaçant $\frac{f}{\sin b}$ par f, ou en y faisant $\sin b = 1$, c'est-à-dire $b = 100^{\circ}$.

En faisant la même supposition dans la formule approximative trouvée ci-dessus pour la vis à filets triangulaires, et désignant par r la valeur $\frac{2}{3}.\frac{r'^2+r'r''+r''^2}{r'+r''}$ du rayon moyen de la surface du filet, il viendra pour l'équation d'équilibre de la vis à filets carrés eu égard au frottement de l'écrou:

$$2\pi RP = (Q+f^2Q)h+fQ.2\pi r;$$

en la comparant avec celle d'où elle provient, et supposant les grandeurs de R, r, f, h et Q les mêmes de part et d'autre, on en conclut, que la valeur, qu'elle donne pour la puissance P, est nécessairement moindre de toute la quantité

$$Q\left\{f^2\left(\frac{1}{\sin^2 b}-1\right)\frac{h}{2\pi r}+f\left(\frac{1}{\sin b}-1\right)\frac{r}{R}\right\},$$

laquelle étant essentiellement positive exprime l'excès de résistance occasionnée par la surface des filets triangulaires sur celles des filets carrés, supposée dans les mêmes circonstances.

Pour nous former des idées plus exactes des valeurs absolues et relatives de la résistance de ces deux genres de vis, nous introduirons dans leur expression des suppositions conformes à ce qui est pratiqué par les bons constructeurs, et qu'il nous seroit facile de justifier d'une manière directe: conservant toutes les dénominations précédentes et ne considé-

rant que le cas d'un filet de vis simple, on aura pour la vis à filets carrés

$$r' = \tfrac{3}{2}h,\quad r'' = 2h,\quad r = \tfrac{7}{4}h,$$

et pour la vis à filets triangulaires, en supposant le triangle générateur équilatéral:

$$r' = 2,\ 598h,\quad r'' = 3{,}464h,\quad r = 3{,}032h,\quad \frac{1}{\sin b} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = 1{,}155.$$

Supposant l'écrou en cuivre et la vis en fer, nous pourrons prendre d'après les expériences de Coulomb: $f = 0{,}17$, ce qui se rapporte au cas où les surfaces ont longtems frotté, et se sont polies, en restant onctueuses, on aura pour la vis à filets carrés:

$$2\pi RP = Qh + 1{,}90\,Qh = 2{,}90\,Qh,$$

et pour la vis à filets triangulaires:

$$2\pi RP = Qh + 3{,}78\,Qh = 4{,}78\,Qh.$$

On auroit sans frottement $2\pi RP = Qh$; ainsi la résistance, dans la vis à filets triangulaires est presque double de ce qu'elle est dans la vis à filets carrés. On voit aussi, que par suite de cette même résistance, la puissance doit être, pour cette dernière vis, près de trois fois ce qu'elle seroit, si le frottement n'avoit pas lieu, et près de cinq fois pour la vis à filets triangulaires: ces résultats d'une utilité pratique nous parraissent très dignes d'être remarqués des constructeurs de machines.

Pour en finir sur ce sujet, nous remarquerons que les considérations, qui précèdent, sont uniquement relatives à l'hypothèse, où la puissance P seroit destinée à faire monter Q le long de la vis; si elle devoit, au contraire, le faire descendre, il faudroit simplement supposer, dans les divers équations trouvées, P ou Q négatifs ainsi que f. En y faisant de plus $P = 0$, on auroit la relation nécessaire pour exprimer que la charge Q est sur le point d'entrainer la vis sans l'intermédiaire d'aucune autre puissance, et cette relation seroit, comme on voit, indépendante de Q. Il arrive souvent, que cette circonstance a lieu pour les vis à filets carrés doubles, triples etc., telles que celles des balanciers à découper ou à frapper la monnoie: quelque fois aussi, quoique la relation soit loin d'être satisfaite, il arrive que les secousses éprouvées par la machine où il entre des vis servant à lier les diverses parties, font déserrer les écroux; on l'oppose alors à cet effet en plaçant deux écroux l'un sur l'autre, ou en mettant directement obstacle au mouvement de l'écrou par un moyen quelconque.

Nous n'avons tenu compte dans ce qui précède, que du seul frottement occasionné par la surface de filets de vis; mais ce frottement est nécessairement accompagné d'un ou de plusieurs autres, agissant sur la vis ou sur l'écrou et dont la résistance est presque toujours comparable à celle du premier.

Si la vis en tournant, frottoit inférieurement contre une crapaudine, que ϱ fut le rayon du pivot qui frotte, Q' la charge totale supportée par ce pivot, et qui, lorsque la vis est verticale, se compose de $Q \pm$ le poids de la vis ou de l'écrou, on en tiendroit compte évidemment en ajoutant à la valeur de P trouvée précédemment, celle de $\frac{2}{3}.\frac{\varrho}{R}.fQ'$, expression dans la quelle $\frac{2}{3}\varrho$ est le rayon moyen du pivot.

Le frottement des pivots est toujours très faible par rapport à celui des filets de vis, et l'on peut, en général, se dispenser d'en tenir compte: mais il n'en est plus de même du cas ou la tête de la vis frotte contre des épaulemens, et surtout de celui ou l'écrou tourne en frottant sur une platine ou sur une bande circulaire en saillie, comme cela a lieu dans la manoeuvre des grandes vannes d'écluses etc., en nommant toujours ϱ le rayon moyen de la partie qui frotte, Q' la charge, la valeur à ajouter à la puissance P, et qui fait équilibre au frottement de l'épaulement, sera $\frac{\varrho}{R}fQ'$. En général on voit que dans le calcul des conditions d'équilibre de la vis, il sera facile de tenir compte des divers frottemens*); on reconnoîtra aussi quels sont ceux de ces frottemens dont il importe de diminuer l'influence le plus possible par des dispositions bien entendues: par exemple on évitera autant que possible le frottement des épaulemens, qui est toujours considérable, ou si on ne le peut entièrement, on cherchera à en diminuer le bras de levier moyen; enfin on pourra faire usage de rouleaux de friction, placés entre les bandes annulaires qui frottent etc.

*) On remarquera que la résultante des pressions qui agissent dans les plans perpendiculaires aux tourillons ou à l'axe de la vis, se réduit à la force totale P qui fait équilibre à la fois à toutes les résistances, attendu que les efforts partiels qui s'exercent sur la surface des filets, ont des valeurs égales et tout distribués symétriquement autour de cet axe; ainsi il sera facile d'évaluer le frottement qui en résulte sur les tourillons. Il arrive quelque fois que l'écrou mobile porte des oreilles, qui glissent dans des coulisses verticales, alors la charge Q de cet écrou doit être augmentée du frottement sur les coulisses: en nommant n la pression qui produit ce frottement, d la distance moyenne à l'axe, on aura $nd = P.R$ et le frottement $fn = f\frac{P.R}{d}$; il est entendu d'ailleurs que l'on devra attribuer à f les diverses valeurs qui conviennent aux substances qui sont en contact ou qui frottent, et que l'on prendra pour P la valeur de la puissance calculée en tenant compte de tous les frottemens inhérens à la vis.

28.

Methode abrégée pour le tracé des engrenages des roues d'angle.

Extrait des leçons de Mécanique appliquée aux machines, faites en 1825 et 1826, à l'école spéciale de l'artillerie et du génie à Metz.

(Par Mr. *J. V. Poncelet.*)

Soint CS, $C'S$ (Fig. 2.) les axes des deux roues dont il s'agit d'exécuter la denture, on divisera l'angle CSC' de ces axes en deux autres CST, $C'ST$, dont les sinus CT, $C'T$ soient réciproquement comme les vitesses de rotation à imprimer aux roues. En faisant tourner ces angles autour des axes respectifs, qui leur correspondent, on aura les cônes primitifs, se touchans suivant l'arête commune TS. C'est sur les bases circulaires TCt, $TC't'$ de ces cônes, prises à l'une des extrémités des couronnes, qui portent les dents, qu'on fait ordinairement la division de l'engrenage. Cela posé, tout ce qu'on peut dire sur le tracé des engrenages cylindriques ou dans un plan*) sera applicable à l'espace, pourvu qu'on remplace les lignes droites, rélatives à ce tracé par des plans passant par le sommet S des cônes, et les lignes courbes par des cônes ayant ce même point pour sommet. Ainsi, par exemple, pour que les surfaces coniques des dents, en se poussant, puissent imprimer des vitesses uniformes aux roues, il sera nécessaire que le plan normal à l'arête commune de contact de ces surfaces passe continuellement par l'arête de contact ST des cônes primitifs; pareillement les courbes épicycloïdes des dents, relatives au cas du plan, seront remplacées par des cônes épicycloïdes produits par le monvement d'une arête de l'un des cônes primitifs roulant sur l'autre cône primitif; et si l'on considère simplement les cercles de base tCT, $tCTt'$ qu'on peut appeler les cercles primitifs, les choses se passeront encore d'une manière analogue sur la sphère, qui renferme ces cercles et a S pour centre; seule-

---

*) Ce tracé étant exposé fort au long dans un grand nombre de traités de mécanique pratique, nous croyons pouvoir nous dispenser de le rappeler ici.

ment les droites seront remplacées par des arcs de grands cercles, et les épicycloïdes, les développantes planes etc., deviendront des épicycloïdes, des développantes sphériques etc.

D'après cette analogie, qui règne entre les deux cas du plan et de l'espace, il devient inutile d'entrer dans des détails sur la manière de disposer le engrenages selon les diverses circonstances; il est évident, que toute la difficulté réside dans les opérations graphiques nécessaires pour tracer les differentes courbes ou surfaces de dents d'après les principes de la géométrie descriptive. Or je ferai remarquer, que la rigueur, qu'on apporteroit ici dans le tracé, en suivant les méthodes connues, ne conduiroit pourtant qu'à des résultats fort incertains, vu la multiplicité des opérations nécessaires pour obtenir le tracé d'une surface de dents, ou même d'un seul point de sa courbe de base; il me semble que le procédé qui suit est suffisamment exact pour la pratique, et n'offre pas ces inconvéniens.

On remarquera, que les couronnes ou jantes qui portent les dents ou fuseaux etc., sont et doivent en général être terminées, du coté opposé au sommet S des cônes, par d'autres surfaces coniques, dont les sommets s, s', sont sur les axes SC et SC' des roues, et dont les arêtes $s'T$, sT comprises dans le plan de ces axes sont perpendiculaires à l'arête de contact ST des cônes primitifs, en sorte qu'elles sont le prolongement l'une de l'autre, et se trouvent comprises dans le plan perpendiculaire à ST, tangent à la fois aux cônes s, s': c'est sur la surface de ces cônes, que l'on applique les panneaux des dents, et qu'on vérifie le tracé général de l'engrenage; or, vu le peu d'étendue, qu'occupe sur ces cônes, le profil de la courbe d'une dent et de celle qui la conduit, on pourra, sans erreur sensible pour la pratique, regarder les petites portions des surfaces coniques s, s' correspondantes à ces dents comme se confondant continuellement avec le plan tangent sTs', pendant la durée de leur contact mutuel.

Cela posé, développant donc les deux surfaces de cône s et s' sur le plan tangent dont il s'agit, ce qui n'offre aucune difficulté, puisqu'on a la longueur des arêtes et le perimètre des bases, et observant que, dans ce développement, les longueurs dans le sens des arêtes, et les largeurs

dans le sens des cercles méridiens concentriques aux sommets, ne sont nullement altérées, on ramènera de suite le problème des engrenages coniques à celui des engrenages cylindriques ou sur un plan; car les cercles primitifs des dents sur la surface des cônes, seront devenus sur le développement des arcs de cercle tangens entre eux et qu'on pourra regarder comme les cercles primitifs de deux roues planes à tracer par les méthodes connues selon le genre d'engrenage, que l'on désire adopter. On aura ainsi obtenu tous les panneaux nécessaires pour tracer les dents sur la surface des cônes limites s, s'; d'après quoi l'on exécutera facilement les dents tout entières.

On pourra d'ailleurs préparer de nouveaux panneaux développés pour les surfaces coniques, qui terminent inférieurement les couronnes du coté de S et qui, ayant leurs arêtes parallèles à celles des premiers cônes limites, donnent, pour les dents, des profils exactement semblables, en sorte qu'il suffira de réduire les dimensions des premiers panneaux dans un rapport convenable, celui des arêtes ST, ST'.

29.
Casum irreducibilem solvendi conatus.

(Auct. Dr. *C. J. D. Hill*, Holm.)

Aequatio cujuscunque gradus non nisi per aliam, ejusdem quidem gradus, simpliciorem vero, solvitur.

Sic vulgo aequationis $x^3 = a$ solutio ita significatur: $x = \sqrt[3]{a}$; qua postulata atque concessa, hujus etiam aequationis cubicae $x^3 = 3\alpha x + 2\beta$, solutio generatim quidem habetur, interdum tamen imaginaria evadit, quando nempe $\alpha^3 > \beta^2$, qui casus irreducibilis dicitur. Hoc tamen impedire nequit, quominus alia concessa aequatione simplici, hic etiam nodus solvi possit. Quod quidem, solutionem hujus aequationis:

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$$

postulando, et ita signando:

$$x = \Lambda_3 a,$$

optime effici posse vidi. Mox enim illius aequationis

$$x^3 = 3\alpha x + 2\beta,$$

posito $\varrho = \sqrt{(\alpha^3 - \beta^2)}$, haec habetur solutio:

$$x = \frac{\varrho \Lambda_3 \frac{\beta}{\varrho} - \beta}{\alpha}.$$

Posito enim $\alpha x = \varrho y - \beta$ et in aequationem datam substituto, habetur:

$$\varrho^3 y^3 - 3\varrho^2 \beta y^2 - 3\varrho(\alpha^3 - \beta^2) y + \beta(\alpha^3 - \beta^2) = 0,$$

seu, ex valore ipsius ϱ accepto:

$$y^3 - 3\frac{\beta}{\varrho} y^2 - 3y + \frac{\beta}{\varrho} = 0,$$

indeque

$$y = \Lambda_3 \frac{\beta}{\varrho} \quad \text{et} \quad x = \frac{\varrho \Lambda_3 \frac{\beta}{\varrho} - \beta}{\alpha}.$$

Hanc solutionem, in casu irreducibili, ut vides, realem, aeque simplicem, itemque algebraicam, ac ipsam notissimam Tartagliae

$$\left(x = \sqrt[3]{(\beta + \sqrt{-\varrho^2})} + \sqrt[3]{(\beta - \sqrt{-\varrho^2})}\right)$$

praedico. Functionis enim simplicitatem non nisi ex arbitrariorum pau-

citate aestimo: $\underset{3}{\wedge} a$ vero simplicissima est aeque ac $\sqrt[3]{a}$, utut unico ab quanto pendens. De cetero $\underset{3}{\wedge} a$ utut aequationis algebraicae radix, algebraica habenda est functio, cujus proprietatem hanc generalem (quod praecipuum est) illi radicis cubicae, $\sqrt[3]{(xy)} = \sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{y}$, aemulam detexi:

$$\underset{3}{\wedge} \frac{a+b}{1-ab} = \frac{\underset{3}{\wedge} a + \underset{3}{\wedge} b}{1 - \underset{3}{\wedge} a . \underset{3}{\wedge} b}.$$

Consideratis enim tribus aequationibus elementariis

$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$, unde $x = \underset{3}{\wedge} a$ et $a = x.\frac{3-x^2}{1-3x^2}$,

$y^3 - 3by^2 - 3y + b = 0$, unde $y = \underset{3}{\wedge} b$ et $b = y.\frac{3-y^2}{1-3y^2}$, et

$z^3 - 3cz^2 - 3z + c = 0$, unde $z = \underset{3}{\wedge} c$ et $c = z.\frac{3-z^2}{1-3z^2}$,

positoque $z = \frac{x+y}{1-xy}$, habetur:

1) $c = z.\frac{3-z^2}{1-3z^2} = \frac{x+y}{1-xy} \cdot \frac{3(1-xy)^2 - (x+y)^2}{(1-xy)^2 - 3(x+y)^2}$,

i. e. $c = \frac{x+y}{1-xy} \cdot \frac{3-x^2-y^2-8xy+3x^2y^2}{1-3x^2-3y^2-8xy+x^2y^2}$;

2) $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{x(1-3y^2)(3-x^2)+y(3-y^2)(1-3x^2)}{(1-3x^2).(1-3y^2)-xy(3-x^2)(3-y^2)}$,

i. e. $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{(x+y)(3+3x^2y^2)-x^3-y^3-9xy(x+y)}{1-x^3y^3-(1-xy)(3x^2+3y^2+9xy)}$,

seu $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{x+y}{1-xy} \cdot \frac{3+3x^2y^2-(x^2-xy+y^2)-9xy}{1+xy+x^2y^2-(3x^2+3y^2+9xy)}$,

ideoque aperte $\frac{a+b}{1-ab} = c$; unde $\underset{3}{\wedge} \frac{a+b}{1-ab} = \underset{3}{\wedge} c = z = \frac{\underset{3}{\wedge} a + \underset{3}{\wedge} b}{1 - \underset{3}{\wedge} a \underset{3}{\wedge} b}$.

Ex hoc theoremate varia fluunt corrolaria, ut:

1) $\underset{3}{\wedge} \frac{2a}{1-a^2} = 2.\frac{\underset{3}{\wedge} a}{1-(\underset{3}{\wedge} a^2)}$,

2) $\underset{3}{\wedge} -a = -\underset{3}{\wedge} a$

3) $\underset{3}{\wedge} \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\underset{3}{\wedge} a}$,

4) $\underset{3}{\wedge} a = \frac{\underset{3}{\wedge} a + \underset{3}{\wedge} 0}{1 - \underset{3}{\wedge} a . \underset{3}{\wedge} 0}$ $\left(\text{i. e. } = \frac{\underset{3}{\wedge} a \pm \sqrt{3}}{1 \mp \sqrt{3} \underset{3}{\wedge} a} \text{ vel } \underset{3}{\wedge} a\right)$,

5) $\underset{3}{\wedge} \frac{1+a}{1-a} = \frac{\underset{3}{\wedge} 1 + \underset{3}{\wedge} a}{1 - \underset{3}{\wedge} 1 . \underset{3}{\wedge} a}$.

Ex aequatione elementari vero habetur

$\underset{3}{\wedge}0 = 0$, vel $\pm\sqrt{3}$; $\underset{3}{\wedge}\infty = \infty$, vel $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\underset{3}{\wedge}1 = -1$, vel $2\pm\sqrt{3}$.

De cetero, posito $a = \frac{a_1 - \omega}{1 + a_1\omega}$, habetur $\omega = \frac{a_1 - a}{1 + aa_1}$ et

$\underset{3}{\wedge}a = \frac{\underset{3}{\wedge}a_1 - \underset{3}{\wedge}\omega}{1 + \underset{3}{\wedge}a_1 \cdot \underset{3}{\wedge}\omega}$, et posito $\underset{3}{\wedge}a_1 = \frac{a}{3}$, quo casu $\omega = \frac{8a^3}{27 + 18a^2 - a^4}$,

habetur $\underset{3}{\wedge}a = \frac{a - 3\underset{3}{\wedge}\omega}{3 + a\underset{3}{\wedge}\omega}$.

Similiter posito $\omega_1 = \frac{8\omega^3}{27 + 18\omega^2 - \omega^4} = f\omega$, erit $\underset{3}{\wedge}\omega = \frac{\omega - 3\underset{3}{\wedge}\omega_1}{3 + \omega\underset{3}{\wedge}\omega_1}$.

Quoniam vero juxta corollaria jam proposita, inde ab initio $\omega < \sqrt{2} - 1 = 0{,}414$ effici potest; ideoque $\omega_1 < 0{,}019$, et iterando $\omega_{,,} = f\omega_1 < 0{,}000002$ etc.; semper operationibus quam maxime convergentibus habebitur $\underset{3}{\wedge}\omega$, indeque haec casus irreducibilis solutio:

$$y^3 = 3\alpha y + 2\beta, \quad \alpha^3 > \beta^2.$$

Resolutio. Capiatur $\varrho = \sqrt{(\alpha^3 - \beta^2)}$, et

1) $\frac{\beta}{\varrho} = \omega$, quando $\frac{\beta}{\varrho} < \sqrt{2} - 1$, et erit

$$y = \frac{\varrho\underset{3}{\wedge}\omega - \beta}{\alpha} \text{ vel } \frac{1}{\alpha}\left(\varrho \cdot \frac{\underset{3}{\wedge}\omega \pm \sqrt{3}}{1 \mp \sqrt{3}\underset{3}{\wedge}\omega} - \beta\right),$$

2) $\frac{\varrho - \beta}{\varrho + \beta} = \omega$, quando $\sqrt{2} - 1 < \frac{\beta}{\varrho} < \sqrt{2} + 1$, et erit

$y = \frac{1}{\alpha}\left(\varrho \cdot \frac{\underset{3}{\wedge}1 - \underset{3}{\wedge}\omega}{1 + \underset{3}{\wedge}1 \cdot \underset{3}{\wedge}\omega} - \beta\right)$ existente $\underset{3}{\wedge}1$ vel $= -1$, vel $= 2 \pm \sqrt{3}$.

3) $\frac{\varrho}{\beta} = \omega$, quando $\sqrt{2} + 1 < \frac{\beta}{\varrho}$, et erit

$$y = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\varrho}{\underset{3}{\wedge}\omega} - \beta\right) \text{ vel } = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1 \mp \sqrt{3} \cdot \underset{3}{\wedge}\omega}{\pm\sqrt{3} + \underset{3}{\wedge}\omega} - \beta\right).$$

Ex. $2\beta^2 = \alpha^3$; ex quo $\varrho = \beta$, et juxta 2) $\omega = 0$, et $y = \frac{\beta}{\alpha}(\underset{3}{\wedge}1 - 1)$, juxta 1) vero $\omega = 1$, $\omega_{,} = \frac{2}{11}$, $\omega_{,,} = \frac{704}{4042223} = 0{,}0017425613176$, unde, vel neglecto $\omega_{,,}$, habetur $\underset{3}{\wedge}1 = \frac{27}{101}$, et $y = -\frac{\beta}{\alpha}0{,}7326$, admisso vero $\omega_{,,}$ habetur $\underset{3}{\wedge}1 = 0{,}2679491925 = 2 - \sqrt{3}$.

30.

Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Schalls in den Ebenen Süd-America's, angestellt von Espinosa und Bauza.

(Mitgetheilt vom Herrn Prof. *Oltmanns*, zu Berlin.)

Seit der letzten Hälfte des vorigen Jahrhunderts fingen die seefahrenden Mächte an, ihr vorzügliches Augenmerk auf Erweiterung oder Vervollkommnung von Länder- und Völker-Kunde zu richten. Alle dazu benöthigten Hülfsmittel waren von den ersten Astronomen, Mathematikern und Künstlern vorbereitet. Ohne den Verdiensten älterer, würdiger Seefahrer zu nahe zu treten, darf man aber annehmen, dafs nur mit Bougainville's und James Cooks Erdumseegelungen der Sinn und die preiswürdige Absicht zweier Regierungen recht aufgefafst worden ist. Ihre Beobachtungen, vorzüglich des letztern, liegen dem Publikum mit aller Offenkundigkeit dargelegt vor Augen. Lapeyrouse, Marchand, Vancouver suchten die Lücken zu ergänzen, welche die Geographen, freilich gröfstentheils am Schreibetisch, aufgefunden haben wollten. Lapeyrouse's Papiere sind theilweise im Schiffbruch verloren gegangen. Wenn man diesen Verlust hoch, und nicht selten übertriebenermafsen, betrauert hat, so hatte man vielleicht noch gröfsere Ursachen zu wünschen, die Resultate einer Expedition bekannt gemacht zu sehen, die unter die glänzendsten geschätzt zu werden verdient, welche die Geographie aufweisen kann. Ich meine die Reise des grofsen Don Alexandro Malaspina um die Welt, dessen Papiere zwar nicht, wie Lapeyrouse's in den Wellen, sondern in den Archiven von Madrid vergraben waren. Ausgerüstet mit den vortrefflichsten astronomischen und physikalischen Werkzeugen, und begleitet von den geschicktesten Seeofficieren, Physikern, so wie von andern Gelehrten, kehrte er nach Spanien mit einem Schatze von Beobachtungen, Charten u. s. w. zurück, desgleichen vielleicht keine andere Nation aufweisen kann. Seine Reisebeschreibung ist nie ans Licht getreten. Die nautischen Charten tragen nicht einmal seinen Namen. Der

spanische Revolutions-Krieg gab ihm die Freiheit, — die Franzosen besetzten die Hauptstadt. Espinosa y Tello, sein Begleiter, rettete die Schätze des hydrographischen Depots vor Feindes Händen nach England, mit ihnen Malaspina's Reise-Nachrichten und astronomisch-physikalische Beobachtungen. —

Es ist mir nicht unbekannt dafs Espinosa Bruchstücke der denkwürdigen Reise herausgegeben hat, allein sie gründen sich auf Vergleichungen mit unverbesserten Tafeln, sind also blos als vorläufige Resultate zu betrachten. Ja! gegen die Richtigkeit der Rechnung haben die Spanier selbst nicht neuerhebliche Zweifel geäufsert, auch sind die erwähnten Bruchstücke so wenig bekannt, oder ihre Kenntnifs ist doch so wenig allgemein geworden, dafs Herr von Zach, noch im Jahre 1813 in seiner monathlichen Correspondenz eine kleine Notiz des unglücklichen Malaspina über die Lage der Philippinen, als eine grofse Seltenheit, gleichsam als eine Reliquie, bekannt machte. Espinosa starb. Sein College und Gefährte bei seiner Reise um die Welt, Don Felipe Bauza wurde Erbe von Malaspina's Reise-Papieren, die er sorgfältig aufbewahrt und mit rühmlichen Eifer benutzt, um eben dadurch in England seinen Lebensunterhalt für die Zukunft zu sichern. Sehr überrascht wurde ich daher durch ein an Herrn von Humboldt gerichtetes Schreiben des etc. Bauza, worin er mir mehrere Beobachtungen mittheilt, die alle zu Malaspina's Reise gehören. Unter dieser ersten Sendung (denn seitdem erhielt ich von ihm noch eine zweite unschätzbare Masse) befinden sich zahlreiche, sowohl astronomische als auch physikalische Beobchtungen. Erstere habe ich bereits für die Geographie von Süd-Amerika, von Buenos-Ayres an, um das Kap Hoorn herum, bis nach Acapulco berechnet. Ich theile hier blos die Resultate der Beobachtungen über die Schall-Geschwindigkeit mit, welche zwei der geschicktesten spanischen Astronomen in den unermefslichen Ebenen Süd-Amerika's, zwischen San Yago de Chili und Buenos-Ayres, angestellt haben. Die Beobachtungs-Methode ist derjenigen ganz ähnlich, welche im Jahre 1820, in der Umgegend von Paris, von Humboldt, Gay-Lussac, Arago etc. angewendet, und in der *Conn. des tems*, 1825, näher angegeben worden ist.

Der Titel des Manuscripts ist übrigens:

Observationes de la velocidad del sonido hechas en Santiago de chile por

por el teniente de navio Don Josef de Espinosa *y el* Alferez de Navio Don Felipe Bauza *en* 1794.

Man ging dabei von dem sehr vernünftigen Gedanken aus, zu untersuchen:

ob das Gesetz, nach welchem der Schall sich fortpflanzt, für alle und ebendieselben Klimate und Zonen ein und dasselbe sei;

wenn nicht:

so können die Beobachtungs-Resultate nur von sehr beschränktem Nutzen sein, sowohl für geographische als auch für nautische Beobachtungen.

In dieser Absicht also stellten die ruhmwürdigen Spanier folgende Versuche an, welche in der Anlage *A* ganz umständlich mitgetheilt werden.

Es ist nicht zu leugnen, dafs man etwas mistrauisch gegen einige von den bis dahin bekannt gewordenen Resultaten sein mufste; denn jene seit etwa 100 Jahren angestellten Beobachtungen waren sehr unvollkommen, die Standlinien aus welchen der vom Schall durchlaufene Raum hergeleitet werden sollte, gröfstentheils sehr klein, und verhältnifsmäfsig noch kleiner die Zahl der Beobachtungen; die Uhren unvollkommen.

Unter solchen Umständen beobachtete

Cassini die Geschwindigkeit	1473	Fufs in der Secunde,
Mersinno	1380	- - - - - ,
die Florentiner	1185	- - - - - ,
Huyghens	1172	- - - - - ,
Fleamstead und Derham .	1070	- - - - - ,
Condamine, in Cayenne .	1100	- - - - - ,
Condamine, in Quito . . .	1050	- - - - - ,

La Caille, Maraldi und Cassini wiederholten diese Versuche, und bei verschiedenen Temperaturen fanden sie die Schall-Geschwindigkeit 1038 bis 1048 Fufs in der Secunde. Sie war auf eine Linie von etwa 88000 Fufs gegründet.

Zwanzig Jahre später stellten Kästner, Huyghens, Lichtenberg, Mayer und Müller ähnliche Versuche an, und fanden die Geschwindigkeit 1037 Fufs, — leider gegründet auf eine nur kleine Basis.

Professor Benzenberg dagegen machte den 3ten Decbr. 1809, bei einer Grundlinie von 28000 pariser Fufs, Schall-Beobachtungen, welche

ihm, beim Gefrierpunct, 1028,4 Fufs für die Secunde gaben. Bald darauf, im Junius 1811, will er sie 1027,1 Fufs gefunden haben, während der Trigonometer Windgassen 1026,8 Fufs dafür fand. Dafs übrigens diese Geschwindigkeit sich nach dem Einflusse der Wärme und Kälte richtet, war schon aus den Beobachtungen des Italieners Bianconi (auf der Festung Urbano) bekannt.

Der unsterbliche Jsaac Newton hatte diese Geschwindigkeit für die Zeit-Secunde auf etwa 861 Fufs nach der Theorie berechnet.

Eine Abweichung von dritthalb hundert Fufs von der Erfahrung war denn doch zu grofs, und für See- und Erdkunde zu wichtig, als dafs sie nicht näher hätte geprüft und erwogen werden sollen.

Bereits vor 30 bis 40 Jahren versuchten es schon die Spanier solche Zweifel zu heben.

Espinosa und Bauza nemlich mafsen in der Ebene von Maypo, im Königreiche Chili, eine Standlinie von 2900 pariser Fufs auf einem ganz ebenen Boden. Durch Horizontal-Winkel bestimmten sie die Lage der in Figur 3. angedeuteten Puncte. Auch standen ihnen zwei schöne Längen-Uhren zu Gebote, um den Zeit-Unterschied zwischen Pulverblitz und Schall zu beobachten.

Die oben erwähnte Grundlinie wurde zweimal gemessen und dabei ein Unterschied von nur 6 Zoll gefunden; die Winkel wurden mit einem Theodoliten von Ramsden beobachtet. Die Figur 3. zeigt die vortheilhafte Stellung der gemessenen Basis, und erweckt zugleich Vertrauen zu der Richtigkeit der darauf begründeten Entfernungen der Puncte *C, D, E, F, G* von der Grundlinie an *B*. Es ergab sich: *CB* 13841, *EB* 43365, *GB* 9557, *FB* 29558 und *DB* 50316 Fufs.

Nachdem man also von der vollkommenen Genauigkeit dieser Längen sich versichert halten durfte, wurde (wie bei den neuesten Beobachtungen der französischen Academiker) an dem einen Ende eine 8pfündige Kanone in *B* aufgestellt und losgebrannt.

Sämmtliche Beobachtungen (bemerken die Spanier) verdienen das gröfste Vertrauen. Die einzelnen Zeit-Unterschiede weichen nicht über $\frac{1}{2}$ Secunde von einander ab. Und dieser Unterschied wird noch durch die Anzahl der Beobachtungen sehr vermindert. Man bemerkt ferner, und mit Recht, dafs bei der vierten Beobachtungs-Station die Richtung des Windes einigen Einflufs auf die Schall-Geschwindigkeit habe äufsern

können, etwa von einer halben Toise auf die Secunde. Bei den übrigen Beobachtungen aber war entweder gar keine Luft-Bewegung, oder sie war doch stets sehr schwach und vollkommen transversal. Der Wind vermehrt allerdings die Geschwindigkeit des Schalls, vermindert sie, wenn er ihr entgegen geht; senkrecht wirkend mag er keinen bedeutenden Einflufs haben. Denn:

Nach Benzenberg's Beobachtungen soll, bei schwachem Winde, die Geschwindigkeit des Schalls um 5 Fufs vermehrt und vermindert worden sein. Bei andern Versuchen, wo er stofsweise bei starkem Ost-Westwinde kam, zeigte sich doch nur eine mittlere Geschwindigkeits-Aenderung von 7 Fufs.

Die Beobachtungen in Cañas geben 190′,2,
- - - in Peral - 193′,5,
- - - in Macul - 189′,5,
- - - im Puncte *C* - 189′,6,

im Mittel 190′,7 = 1144,2 Fufs

für die Geschwindigkeit des Schalls in Chili. Don Jorge Juan hatte sie, für Quito, nur 175′,0 = 1050 Fufs gefunden.

Die vorerwähnten Gelehrten beobachteten diese Geschwindigkeit (im Junius 1822) bei + 10°,0 (Centigrad) Temperatur, 173,01 toises = 337,2 métres, womit die neuesten Beobachtungen der Herren Moll und van Beek Calkoen, Gregory, Heatstone und Goldingham genau genug übereinstimmen.

Laplace findet sie bis auf 3″,174 mit seiner Theorie übereinstimmend (C. d. t. 1825 p. 372.).

Es ist jedoch zu bemerken, dafs die americanischen Beobachtungen bei einer Höhe der Temperatur von

18°
16°
23°
25°
20°
18°

} im Durchschnitt also bei 19° R. = 23,7 Ctg.

angestellt wurden.

Der Unterschied in Vergleich mit obigen beträgt 13°,7 Ctg.

Nach Arago's Bemerkung bringt eine Aenderung von 1° des Thermometerstandes eine von 0',321 hervor. Reduciren wir also Espinosa's Beobachtungen auf + 10° Ctg., so erhalten wir $190',7 - (13,7 \times 0',321) = 185',3 = 1111,8$ Fufs.

Der Unterschied ist noch immer 12' für die Secunde.

Diese Schallbeobachtungen der Spanier waren keine blofs wissenschaftliche Speculationen: sie bezweckten vielmehr die Vervollkommnung der Geopraphie und Nautik. Denn schon der Seecapitain Don Jorge Juan hatte auf den grofsen Nutzen aufmerksam gemacht, welchen dergleichen Beobachtungen vorzugsweise auf dem Meere darbieten können. Nemlich nach dem Blitz und Schall einer Musquete läfst sich die Entfernung der Schiffe von einander bestimmen. Und der geschickte spanische Seeofficier Don Dionisio Alcala Galiano hat sie mit glücklichem Erfolge angewendet (im mittelländischen Meere), um grofse Standlinien zu messen, und die Lage der Küstenpuncte darauf zu gründen.

Neuerdings hat Prof. Benzenberg ähnliche Versuche auf dem Festlande angestellt, um Entfernungen durch den Schall zu bestimmen. Er fand auf 28,000 Fufs einen Unterschied von 37 Fufsen, oder $\frac{1}{775}$ des Ganzen.

Ein anderes Mal fand der Trigonometer Windgassen auf dieselbe Distanz Düsseldorf und Ratingen $\frac{1}{5982}$, oder auf 4 Fufs mit der trigonometrischen Messung zusammenstimmend.

Benzenberg glaubte übrigens, dafs 10 Schall-Beobachtungen eine Entfernung bis auf $\frac{1}{1000}$ genau angeben können, wenn nemlich die Luft ruhig und der Schall deutlich zu hören ist. Nur müsse (bemerkt er) die wahre Temperatur der Luft genau bekannt sein. Denn ein Grad Fehler in der Wärme ändert die Entfernung um $\frac{1}{400}$. Aber von dieser Seite haben wir nichts zu befürchten; denn die umsichtigen Spanier bemerken, dafs der Thermometerstand und Gang sehr regelmäfsig und plötzlichen Aenderungen nicht unterworfen gewesen sei, und da zweitens die Beobachtung in den unermefslichen Steppen (Llanos) angestellt wurden, welche von gleicher physischer Bildung, und so eben wie das Weltmeer sind, so ist auch, meines Bedünkens, vom Einflusse einer Wärme-Verschiedenheit an den Stationen nichts zu besorgen.

Beilage *A.*

El 13 de Enero al anochecer. Experiencia primera observada desde la Chacara de Cañas (E) á 7^h 50′ de la tarde cohete en el conventillo, señal de preparacion contestado desde Cannas á 7^h 52′

Tiros en el conventillo	Sevió la Luz desde Cañas	Se oyó el estallido	
8^h. 0′. 0″	8^h. 0′. 0″	8^h. 0′. 38″	Viento S. O. muy floxo, casi
8^h. 10′. 0″	8^h. 10′. 0″	8^h. 10′. 38″	calma. la atmosph. cargada
8^h. 20′. 0″	8^h. 20′. 0″	8^b. 20′. 38″	Bar. 25 p. 9 L. Term. 18°, 0.

Dia 14 de madrugada en el proprio parage *A* 3^h. 50′ de la madre guda cohete de preparacion en el conventillo;
contestado desde Cañas á 3^h. 52′

Tiros en el Conventillo	Se vió la Luz desde Cañas	Se oyó el estallido	
4^h. 0′. 0″	4^h. 0′. 0″	4^h. 0′. 38″	en Calma, alguna calima
4^h. 10′. 0″	4^h. 10′. 0″	4^h. 0′. 38″	Bar. 25 p. 9 L. Term. 16°, 0.
4^h. 20′. 0″	4^h. 20′. 0″	4^h. 0′. 38″	

Desde Cañas demora el canon situado en el Conventillo N. 69°. 0 del mundo.

Dia 14 Eubo al anochecer: Experiencia segunda observada desde la Chacara del Peral (D)

Tiros en el Conventillo	Se vió la Luz desde el Peral	Se oyó estallido	
7^h. 30′. 0″	7^h. 30′. 0″	7^h. 30′. 43″	
7^h. 40′. 0″	7^h. 40′. 0″	7^h. 30′. 43″	Viento S. O. fresquito en el
7^h. 50′. 0″	7^h. 50′. 0″	7^h. 30′. 43″	Conventillo en el Peral algu-
8^h. 0′. 0″	8^h. 0′. 0″	7^h. 30′. 43½″	nas bocanadas de N.
8^h. 10′. 0″	8^h. 10′. 0″	No se oyó	Barom. 25 p. 9 L. Term. 23°, 0.
8^h. 20′. 0″	8^h. 20′. 0″	7^h. 30′. 43″	

Nach Arago's Bemerkung bringt eine Aenderung von 1° des Thermometerstandes eine von 0',321 hervor. Reduciren wir also Espinosa's Beobachtungen auf + 10° Ctg., so erhalten wir $190^t,7 - (13,7 \times 0^t,321) = 185^t,3 = 1111,8$ Fufs.

Der Unterschied ist noch immer 12^t für die Secunde.

Diese Schallbeobachtungen der Spanier waren keine blofs wissenschaftliche Speculationen: sie bezweckten vielmehr die Vervollkommnung der Geopraphie und Nautik. Denn schon der Seecapitain Don Jorge Juan hatte auf den grofsen Nutzen aufmerksam gemacht, welchen dergleichen Beobachtungen vorzugsweise auf dem Meere darbieten können. Nemlich nach dem Blitz und Schall einer Musquete läfst sich die Entfernung der Schiffe von einander bestimmen. Und der geschickte spanische Seeofficier Don Dionisio Alcala Galiano hat sie mit glücklichem Erfolge angewendet (im mittelländischen Meere), um grofse Standlinien zu messen, und die Lage der Küstenpuncte darauf zu gründen.

Neuerdings hat Prof. Benzenberg ähnliche Versuche auf dem Festlande angestellt, um Entfernungen durch den Schall zu bestimmen. Er fand auf 28,000 Fufs einen Unterschied von 37 Fufsen, oder $\frac{1}{775}$ des Ganzen.

Ein anderes Mal fand der Trigonometer Windgassen auf dieselbe Distanz Düsseldorf und Ratingen $\frac{1}{6982}$, oder auf 4 Fufs mit der trigonometrischen Messung zusammenstimmend.

Benzenberg glaubte übrigens, dafs 10 Schall-Beobachtungen eine Entfernung bis auf $\frac{1}{1000}$ genau angeben können, wenn nemlich die Luft ruhig und der Schall deutlich zu hören ist. Nur müsse (bemerkt er) die wahre Temperatur der Luft genau bekannt sein. Denn ein Grad Fehler in der Wärme ändert die Entfernung um $\frac{1}{400}$. Aber von dieser Seite haben wir nichts zu befürchten; denn die umsichtigen Spanier bemerken, dafs der Thermometerstand und Gang sehr regelmäfsig und plötzlichen Aenderungen nicht unterworfen gewesen sei, und da zweitens die Beobachtung in den unermefslichen Steppen (Llanos) angestellt wurden, welche von gleicher physischer Bildung, und so eben wie das Weltmeer sind, so ist auch, meines Bedünkens, vom Einflusse einer Wärme-Verschiedenheit an den Stationen nichts zu besorgen.

Beilage *A.*

El 13 de Enero al anochecer. Experiencia primera observada desde la Chacara de Cañas (E) á 7^h 50′ de la tarde cohete en el conventillo, señal de preparacion contestado desde Cannas á 7^h 52′

Tiros en el conventillo	Sevió la Luz desde Cañas	Se oyó el estallido	
8^h. 0′. 0″	8^h. 0′. 0″	8^h. 0′. 38″	Viento S. O. muy floxo, casi
8^h. 10′. 0″	8^h. 10′. 0″	8^h. 10′. 38″	calma. la atmosph. cargada
8^h. 20′. 0″	8^h. 20′. 0″	8^b. 20′. 38″	Bar. 25 p. 9 L. Term. 18°, 0.

Dia 14 de madrugada en el proprio parage *A* 3^h. 50′ de la madre guda cohete de preparacion en el conventillo;
contestado desde Cañas á 3^h. 52′

Tiros en el Conventillo	Se vió la Luz desde Cañas	Se oyó el estallido	
4^h. 0′. 0″	4^h. 0′. 0″	4^h. 0′. 38″	en Calma, alguna calima
4^h. 10′. 0″	4^h. 10′. 0″	4^h. 0′, 38″	Bar. 25 p. 9 L. Term. 16°, 0.
4^h. 20′. 0″	4^h. 20′. 0″	4^h. 0′. 38″	

Desde Cañas demora el canon situado en el Conventillo N. 69°. 0 del mundo.

Dia 14 Eubo al anochecer: Experiencia segunda observada desde la Chacara del Peral (D)

Tiros en el Conventillo	Se vió la Luz desde el Peral	Se oyó estallido	
7^h. 30′. 0″	7^h. 30′. 0″	7^h. 30′. 43″	
7^h. 40′. 0″	7^h. 40′. 0″	7^h. 30′. 43″	Viento S. O. fresquito en el
7^h. 50′. 0″	7^h. 50′. 0″	7^h. 30′. 43″	Conventillo en el Peral algu-
8^h. 0′. 0″	8^h. 0′. 0″	7^h. 30′. 43½″	nas bocanadas de N.
8^h. 10′. 0″	8^h. 10′. 0″	No se oyó	Barom. 25 p. 9 L. Term. 23°, 0.
8^h. 20′. 0″	8^h. 20′. 0″	7^h. 30′. 43″	

Dia 15 de madrugada en el proprio Sitio

Tiros en el Conventillo	Se vió la Luz desde el Peral	Se oyó el estallido	
$4^h.\ 0'.0''$	$4^h.\ 0'.0''$	$4^h.0'.43\frac{1}{2}''$	la calma, alguna calima Barom. 25, 90. Term. 20°, 0.
$4^h.10'.0''$	$4^h.10'.0''$	$4^h.0'.43''$	
$4^h.20'.0''$	$4^h.20'.0''$	$4^h.0'.43\frac{1}{2}''$	
$4^h.30'.0''$	$4^h.30'.0''$	$4^h.0'.43\frac{1}{2}''$	
$4^h.40'.0''$	$4^h.40'.0''$	$4^h.0'.45\frac{1}{2}''$	

Desde el Peral demora el Cañon del Conventillo N. 44°. O.

Dia 16 del mismo al anochecer, experiencia tercera observada desde la chacara de Macul (F): á las 7^h 50′ de la tarde cohete, señal de preparcion en el conventillo, contestado desde Macul á $7^h.52'$.

Tiros en el Conventillo	Se vió la Luz desde Macul	Se oyó el estallido	
$8^h.\ 0'.0''$	$8^h.\ 0'.0''$	$8^h.0'.26''$	Viento N. E, floxo in Macul y S. O. fresquito en el Conventillo. Barom. 25 p. 9 L. Term. 20°, 0.
$8^h.10'.0''$	$8^h.10'.0''$	$8^h.0'.26''$	
$8^h.20'.0''$	$8^h.20'.0''$	$8^h.0'.26''$	
$8^h.30'.0''$	$8^h.30'.0''$	$8^h.0'.26''$	
$8^h.40'.0''$	$8^h.40'.0''$	$8^h.0'.26''$	

Desde Macul demora el conventillo al N. 72°. O del mundo.

Die 17 del mismo al anochecer experiencia quarta observada desde el punto C del llano a las $7^h.20'$ de la tarde cohete de preparacion contestado á $7^h.22'$.

Tiros en el Conventillo	Se vió la Luz desde el punto C.	Se oyó el Estallido	
$7^h.30'.0''$	$7^h.30'.0''$	$7^h.30'.13''$	Viento S. O. fresquito Tiempo claro Barom. 25 p. 9 L. Term. 180,0.
$7^h.35'.0''$	$7^h.35'.0''$	$7^h.30'.12''$	
$7^h.40'.0''$	$7^h.40'.0''$	$7^h.30'.12''$	
$7^h.45'.0''$	$7^h.45'.0''$	$7^h.30'.12''$	
$7^h.50'.0''$	$7^h.50'.0''$	$7^h.30'.12''$	

Desde el punto C. demora el Conventillo N. 20°. O del mundo.

Beilage *B.*

Folgende Beobachtungen stehen hier, dünkt mich, gerade auf dem rechten Platze.

a. Thermometer-Stand.

Zu S. Yago erreichte das Thermometer, während Espinosa's Aufenthalt daselbst, nur selten 24° Reaumur. Gewöhnlich zeigte es bei Sonnen-Aufgang 16° bis 18° R., um 10 Uhr 20°, um Mittag 22°, Abends und Nachts 20°, 18°, 16°, um Mitternacht 14°.

b. Barometer-Stand.

Der Zustand der Athmosphäre ist in dieser Gegend (San Yago) so gleichförmig, dafs die Barometer-Aenderungen nur bis auf etwa $\frac{1}{3}$ einer Linie gehen. Der mittlere Stand vom December- bis zum März-Monat 25 Zoll 9 Linien.

Während dieser Zeit hatte man nur 4 Tage, an welchen der Himmel bewölkt war und kein Tropfen Regen fiel.

Eine Vergleichung dieses Barometer-Standes mit dem am Meeresspiegel beobachteten, giebt nach der Bouguerschen Formel, die Höhe von S. Yago über der See 821 varas Castellanas.

c. Abweichung der Magnetnadel.

Beobachtungen, welche mit einem Theodoliten angestellt wurden, gaben die Abweichung 14° 28′ nordöstlich, im Mittel aus mehreren Azimuth-Vergleichungen.

Espinosa und Bauza beobachteten:

Orts-Name	Barometer-Stand	Thermometer-Stand	Höhe über der See
	Zoil		
V. Valparaiso . . .	30,00	62°	0 toises
San Yago de Chile .	27,39	72°	409′,7
Casa de las Calaveras	20,64	61°	1658′,1
Casa de la Cumbre	19,03	45°	1987′,4
Casa de las Cuevas	20,16	54°	1747′,2
Casa de Puquios . .	21,45	57°	1487′,7
Mendoza	26,91	68°	699′,7

Auf dieser wirklich wissenschaftlichen Reise wurden auch noch folgende geographische Orts-Bestimmungen gemacht.

Name der Orte	Südliche Breite	Länge westlich von Cadix	Abweichung der Magnetnadel
San Yago de Chili .	33°. 26 1/3	64°. 34′	14° 1/2 nordöstlich
Los Andes	32°. 49 1/2		
Casa de las Puquios .	32°. 57	. . . . .	15 1/2 - -
Uspallata	32°. 35		
Mendoza	32°. 52 2/3	. . . . .	14° - -
	32°. 53	62°. 46	
	32°. 51		
Desaguadero. . . .	32°. 27	. . . . .	14° - -
San Luis	33°. 16 1/2		
	33°. 18 1/4	59°. 27′	
Punta del rio Tercero	32°. 29		
Zanyon	32°. 41	55°. 27	
Esquina de Labaten	32°. 56 1/3	. . . . .	14° - -
	32°. 57 2/3		
Los Vesmochados .	33°. 10 1/2	. . . . .	14° - -
Pontezuelas	33°. 53 1/2		

31.

Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

1.

Die Entstehung und Ausbildung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen bildet einen der wichtigsten Momente in der Geschichte der Mathematik des 18ten Jahrhunderts. Euler hatte diesen so fruchtbaren Zweig der Analysis ans Licht gerufen, und in einer grofsen Zahl von Beispielen durch besondre, dem jedesmaligen Falle angepafste Kunstgriffe die Integration bewerkstelligt. Lagrange gab hierauf die ersten allgemeinen Vorschriften, die lineären partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen jeder Anzahl Variabeln, und insbesondere jede auch nicht lineäre zwischen 3 Variabeln auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen. Die von Lagrange zu letzterem Zwecke angewandte Methode schien keiner Ausdehnung auf jede Anzahl Variabeln fähig zu sein, da die Analysten, die dieses versuchten, die ihnen aufstofsenden Schwierigkeiten nicht überwinden konnten. Pfaff betrachtete daher den Gegenstand aus einem von allen bisherigen gänzlich verschiedenen Gesichtspuncte. Er sah nemlich das ganze Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als speciellen Fall des weit umfassenderen an, jede gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren; und indem er dieses Problem vollständig löste, hat er zugleich die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vollendet.

Ich werde im Folgenden diesen Gegenstand wieder aufnehmen, und ihn einer, wie ich glaube, neuen Behandlung unterwerfen, welche sich vielleicht durch ihre Leichtigkeit den Analysten empfiehlt. Durch sie werden die Schwierigkeiten, welche der Ausdehnung der Lagrangeschen Methode auf jede Anzahl Variabeln entgegen standen, so weit die

Natur dieser Methode es möglich macht, gehoben werden, und man wird so auf dem entgegengesetzten Wege zu denselben Resultaten gelangen, welche Pfaff gefunden hat. —

2.

Ich beginne mit einigen Betrachtungen über die Integration eines Systems von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln.

Es seien die $n+1$ Variabeln x, x', x'', ..., $x^{(n)}$. Es sollen n derselben, z. B., x', x'', ..., $x^{(n)}$ als Functionen der übrigen durch ein System von n Differentialgleichungen bestimmt werden, in welchen nur die ersten Differentiale von x', x'', ..., $x^{(n)}$, in Beziehung auf x genommen, vorkommen. Diese n Gleichungen lassen sich immer unter die Form bringen:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{X'}{X}, \quad \frac{\partial x''}{\partial x} = \frac{X''}{X}, \ldots, \frac{\partial x^{(n)}}{\partial x} = \frac{X^{(n)}}{X},$$

welche man auch als Proportion darstellen kann:

$$\partial x : \partial x' : \partial x'' : \ldots : \partial x^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)},$$

wo X, X', X'', ..., $X^{(n)}$ Functionen von x, x', x'', ..., $x^{(n)}$ sind, und wo es gleichgültig ist, welche der $n+1$ Variabeln man als unabhängig betrachtet.

Es ist seit langer Zeit bekannt, wie man aus diesen Gleichungen $n-1$ Variabeln, z. B. x'', x''', ..., $x^{(n)}$ eliminiren kann. Differentiirt man nemlich die Gleichung $\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{X'}{X}$, $(n-1)$ Mal hintereinander nach x, und setzt jedesmal für die vorkommenden Differentiale $\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial x''}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}$ ihre Werthe in x, x', x'', ..., $x^{(n)}$, so erhält man $\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 x'}{\partial x^3}, \ldots, \frac{\partial^n x'}{\partial x^n}$ gegebnen Functionen dieser Variabeln gleich. Aus den so entstehenden n Gleichungen kann man dann die $n-1$ Variabeln x'', x''', ..., $x^{(n)}$ eliminiren, und erhält so eine Gleichung von der Form:

$$\varphi\left(x, x', \frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n x'}{\partial x^n}\right) = 0.$$

Es hat aber bekanntlich jede solche Differentialgleichung der $n$ten Ordnung n verschiedene Integralgleichungen der $(n-1)$ten Ordnung, von denen jede eine willkürliche Constante enthält. Es seien diese:

$$F_1\left(x,\ x',\ \frac{\partial x'}{\partial x},\ \frac{\partial^2 x}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}}\right) = C_1,$$
$$F_2\left(x,\ x',\ \frac{\partial x'}{\partial x},\ \frac{\partial^2 x}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}}\right) = C_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n\left(x,\ x',\ \frac{\partial x'}{\partial x},\ \frac{\partial^2 x}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}}\right) = C_n,$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die willkürlichen Constanten bedeuten. Substituirt man hierin für $\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}}$ ihre Werthe in $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$, so hat man das verlangte System von n endlichen Gleichungen mit n willkürlichen Constanten, welches die Gleichungen:

$$\partial x : \partial x' : \partial x'' : \ldots : \partial x^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

integrirt.

3.

In welcher Form auch die n Integralgleichungen mit n willkürlichen Constanten gefunden werden, so wird man sie immer durch Auflösung nach den n willkürlichen Constanten in diese Form bringen können:

$$F_1 = C_1,\ F_2 = C_2,\ \ldots,\ F_n = C_n,$$

wo $F_1, F_2, \ldots, F_n$ die willkürlichen Constanten nicht enthalten. In dieser Form haben die Integralgleichungen die merkwürdige Eigenschaft, dafs, wenn man sie differentiirt, unmittelbar auch die willkürlichen Constanten verschwinden, so dafs die Differentialgleichungen

$$0 = \partial F_1 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right)\partial x' + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x''}\right)\partial x'' + \ldots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x^{(n)}}\right)\partial x^{(n)},$$
$$0 = \partial F_2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x'}\right)\partial x' + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x''}\right)\partial x'' + \ldots + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x^{(n)}}\right)\partial x^{(n)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = \partial F_n = \left(\frac{\partial F_n}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial F_n}{\partial x'}\right)\partial x' + \left(\frac{\partial F_n}{\partial x''}\right)\partial x'' + \ldots + \left(\frac{\partial F_n}{\partial x^{(n)}}\right)\partial x^{(n)},$$

ohne Dazwischenkunft der Integralgleichungen

$$F_1 = C_1,\ F_2 = C_2,\ \ldots,\ F_n = C_n,$$

mit den gegebenen Gleichungen

$$\partial x : \partial x' : \partial x'' : \ldots : \partial x^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

übereinkommen werden, denn durch solche Dazwischenkunft würden die willkürlichen Constanten wieder eingeführt werden. Hieraus folgt aber das Stattfinden folgender identischen Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)X + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right)X' + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x''}\right)X'' + \ldots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x^{(n)}}\right)X^{(n)} = 0, \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)X + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x'}\right)X' + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x''}\right)X'' + \ldots + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x^{(n)}}\right)X^{(n)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{\partial F_n}{\partial x}\right)X + \left(\frac{\partial F_n}{\partial x'}\right)X' + \left(\frac{\partial F_n}{\partial x''}\right)X'' + \ldots + \left(\frac{\partial F_n}{\partial x^{(n)}}\right)X^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Die Integration der Differentialgleichungen:

$$\partial x : \partial x' : \partial x'' : \ldots : \partial x^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

kommt also mit der Lösung der Aufgabe überein: n verschiedene Functionen zu finden, von denen jede F der Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)X + \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)X' + \left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)X'' + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\right)X^{(n)} = 0$$

identisch Genüge leiste.

Wenn die Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$, jede für F gesetzt, diese Bedingung erfüllen, so ist dies auch der Fall mit jeder wieder aus diesen zusammengesetzten Function. Denn es sei solche $\Pi(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, so wird man, wenn man die Gleichungen I. respective mit $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial F_1}\right), \left(\frac{\partial \Pi}{\partial F_2}\right), \ldots, \left(\frac{\partial \Pi}{\partial F_n}\right)$ multiplicirt, und hierauf addirt, die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)X + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x'}\right)X' + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x''}\right)X'' + \ldots + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x^{(n)}}\right)X^{(n)} = 0$$

erhalten, so dafs auch Π für F gesetzt werden kann.

4.

Nach diesen vorausgeschickten Betrachtungen ergiebt sich die Integration der lineären partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von selbst. Es sei nemlich x als Function von $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ zu finden, vermittelst der Gleichung:

$$X = X'\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) + X''\left(\frac{\partial x}{\partial x''}\right) + \ldots + X^{(n)}\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right).$$

Es werde die zwischen den $n+1$ Variabeln zu suchende Relation ausgedrückt durch $\Pi = 0$, so hat man:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x'}\right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x''}\right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x''}\right) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x^{(n)}}\right) &= 0, \end{aligned}$$

wodurch die gegebene Gleichung sich verwandelt in:

$$0 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) X + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x'}\right) X' + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x''}\right) X'' + \ldots + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x^{(n)}}\right) X^{(n)},$$

welcher Gleichung, wie wir gesehen haben, Genüge geschieht, wenn man für Π irgend eine Function von $F_1, F_2, \ldots, F_n$ setzt.

Ist also eine lineäre partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$X = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) X' + \left(\frac{\partial x}{\partial x''}\right) X'' + \ldots + \left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right) X^{(n)}$$

gegeben, so integrire man die Gleichungen:

$$\partial x : \partial x' : \partial x'' : \ldots : \partial x^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}.$$

Ist das System der n endlichen Integralgleichungen derselben

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots, \quad F_n = C_n,$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die willkürlichen Constanten bedeuten, $F_1, F_2, \ldots$ $\ldots, F_n$ aber diese nicht enthalten, und nennt man Π irgend eine Function von $F_1, F_2, \ldots, F_n$, so wird $\Pi = 0$ das gesuchte Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung.

5.

Wenn der Gleichung

$$X = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) X' + \left(\frac{\partial x}{\partial x''}\right) X'' + \ldots + \left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right) X^{(n)}$$

durch irgend eine Gleichung oder Relation zwischen den n Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ Genüge geschieht: so kann man sagen, dafs die Gleichungen

$$\partial x : \partial x' : \partial x'' : \ldots : \partial x^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

durch irgend n Relationen zwischen jenen Functionen integrirt werden. Denn aus n Relationen zwischen n Gröfsen werden diese Constanten gleich, und die Willkürlichkeit der Relationen reducirt sich auf eine bloſse Willkürlichkeit der Constanten. Es zeigt sich nur hier eine Lücke. Man kann nemlich nach demjenigen System Differentialgleichungen fragen, welches durch irgend 2, 3, oder überhaupt m Relationen zwischen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ integrirt wird, wo m zwischen 1 und n liegt. Diese Lücke wird ausgefüllt durch folgendes allgemeine Theorem, welches zu gleicher Zeit auch die beiden bisher behandelten extremen Fälle, wo $m = 1$ und $m = n$ ist, umfafst.

Theorem. „Es seien $F_1, F_2, \ldots, F_n$ solche Functionen der Variabeln $x, x', \ldots, x^{(n)}$, welche, für F gesetzt, die Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)X+\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)X'+\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)X''+\ldots.+\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\right)X^{(n)}=0$$

identisch erfüllen, oder welche, willkürlichen Constanten gleich gesetzt, die Gleichungen

$$\partial x:\partial x':\partial x'':\ldots.:\partial x^{(n)}=X:X':X'':\ldots.:X^{(n)}$$

integriren, so wird das System der m Gleichungen:

$$X=X^{(m)}\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(m)}}\right)+X^{(m+1)}\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(m+1)}}\right)+\ldots.+X^{(n)}\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right),$$

$$X'=X^{(m)}\left(\frac{\partial x'}{\partial x^{(m)}}\right)+X^{(m+1)}\left(\frac{\partial x'}{\partial x^{(m+1)}}\right)+\ldots.+X^{(n)}\left(\frac{\partial x'}{\partial x^{(n)}}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X^{(m-1)}=X^{(m)}\left(\frac{\partial x^{(m-1)}}{\partial x^{(m)}}\right)+X^{(m+1)}\left(\frac{\partial x^{(m-1)}}{\partial x^{(m+1)}}\right)+\ldots.+X^{(n)}\left(\frac{\partial x^{(m-1)}}{\partial x^{(n)}}\right),$$

wo x, x', ..., $x^{(m-1)}$ als Functionen von $x^{(m)}$, $x^{(m+1)}$, ..., $x^{(n)}$ betrachtet werden, integrirt durch die m Gleichungen:

$$\Pi_1=0,\ \Pi_2=0,\ \ldots.,\ \Pi_m=0,$$

wo Π_1, Π_2, ..., Π_m willkürliche Functionen von F_1, F_2, ..., F_n sind."

Das Characteristische dieses Systems Differentialgleichungen besteht darin, dafs in jeder Gleichung nur die partiellen Differentialen einer Variabeln vorkommen, und dafs in allen Gleichungen die Coefficienten der nach derselben Variabeln genommenen Differentiale dieselben sind.

6.

Um den Beweis dieses Theorems in aller Allgemeinheit zu geben, wollen wir zuerst die Werthe der partiellen Differentiale von x, x', x'', ..., $x^{(m-1)}$ nach $x^{(m)}$, $x^{(m+1)}$, ..., $x^{(n)}$ genommen, aus den Gleichungen $\Pi_1=0$, $\Pi_2=0$, ..., $\Pi_m=0$ ableiten. Um die partiellen Differentiale von x zu finden, bestimme man m Gröfsen A, B, C, ..., M dergestalt, dafs sie den $m-1$ Gleichungen

$$A\left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial x'}\right)+B\left(\frac{\partial\Pi_2}{\partial x'}\right)+\ldots.+M\left(\frac{\partial\Pi_m}{\partial x'}\right)=0,$$

$$A\left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial x''}\right)+B\left(\frac{\partial\Pi_2}{\partial x''}\right)+\ldots.+M\left(\frac{\partial\Pi_m}{\partial x''}\right)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A\left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial x^{(m-1)}}\right)+B\left(\frac{\partial\Pi_2}{\partial x^{(m-1)}}\right)+\ldots.+M\left(\frac{\partial\Pi_m}{\partial x^{(m-1)}}\right)=0$$

Genüge leisten, wodurch man, wenn man der Kürze wegen

$$A\left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial\Pi_2}{\partial x}\right)+\ldots.+M\left(\frac{\partial\Pi_m}{\partial x}\right)=N$$

setzt, die Gleichungen

$$N\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(m)}}\right) = -\left\{A\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m)}}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m)}}\right) + \ldots + M\left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m)}}\right)\right\},$$

$$N\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(m+1)}}\right) = -\left\{A\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m+1)}}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m+1)}}\right) + \ldots + M\left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m+1)}}\right)\right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right) = -\left\{A\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(n)}}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(n)}}\right) + \ldots + M\left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(n)}}\right)\right\}$$

erhält, und ganz auf ähnliche Art finden sich die partiellen Differentiale von x', x'', ..., $x^{(m-1)}$. Nun hat man aber, weil Π_1, Π_2, ..., Π_m Functionen von F_1, F_2, ..., F_n sind, aus (3.) die identischen Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}\right)X + \left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x'}\right)X' + \left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x''}\right)X'' + \ldots + \left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(n)}}\right)X^{(n)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x}\right)X + \left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x'}\right)X' + \left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x''}\right)X'' + \ldots + \left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(n)}}\right)X^{(n)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x}\right)X + \left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x'}\right)X' + \left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x''}\right)X'' + \ldots + \left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(n)}}\right)X^{(n)} = 0.$$

Multiplicirt man diese respective mit A, B, C, ..., M, und addirt, so erhält man:

$$X\left\{A\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x}\right) + \ldots + M\left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x}\right)\right\} +$$

$$X^{(m)}\left\{A\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m)}}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m)}}\right) + \ldots + M\left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m)}}\right)\right\} +$$

$$X^{(m+1)}\left\{A\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m+1)}}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m+1)}}\right) + \ldots + M\left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m+1)}}\right)\right\} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X^{(n)}\left\{A\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(n)}}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(n)}}\right) + \ldots + M\left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(n)}}\right)\right\} = 0,$$

woraus sich, dem eben Gefundenen zufolge, ergiebt:

$$X = X^{(m)}\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(m)}}\right) + X^{(m+1)}\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(m+1)}}\right) + \ldots + X^{(n)}\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right),$$

welches die erste Gleichung des Theorems ist. Auf dieselbe Art erweisen sich auch die übrigen Gleichungen desselben.

7.

Wir wenden uns jetzt zu den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung überhaupt, da wir bisjetzt nur die lineären betrachtet haben. Lagrange führt für 3 Variabeln jede solche Gleichung auf eine

lineäre partielle Differentialgleichung zwischen 4 Variabeln zurück. Die Bestimmung der, bei Integration derselben vorkommenden willkürlichen Functionen ist, wie er zeigt, von der Integration einer gewöhnlichen lineären Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 3 Variabeln durch das System zweier Gleichungen abhängig. Diese ist immer möglich, und erfordert, indem man eine der Variabeln, was erlaubt ist, constant setzt, nur die Integration einer lineären Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 2 Variabeln.

Wir werden im Folgenden sehen, wie aus einer gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln, immer ein solches System von lineären partiellen Differentialgleichungen abgeleitet werden kann, das sich durch das oben aufgestellte Theorem integriren läfst. Die Bestimmung der willkürlichen Functionen erfordert dann weiter die Integration einer gewöhnlichen lineären Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $2n-1$ Variabeln durch das System von n Gleichungen, oder zwischen $2n-2$ Variabeln durch das System von $n-1$ Gleichungen, indem man eine der Variabeln, was erlaubt ist, constant setzt. Wie nun aber diese letztere immer und allgemein geleistet werden kann, ist erst durch die berühmte Pfaffsche Arbeit den Analysten kund geworden. Wenn gleich also im Allgemeinen das Problem immer nur durch diese schliefslich gelöset werden kann, so schien es uns doch der Mühe werth, die Lagrangesche Methode so weit zu verfolgen, wie sie zu führen im Stande ist. —

8.

Es sei x eine Function von x', x'', ..., $x^{(n)}$, und man setze die partiellen Differentialen von x: $\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)=p'$, $\left(\frac{\partial x}{\partial x''}\right)=p''$, ..., $\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right)=p^{(n)}$, wo, wenn $\varkappa$ und λ irgend zwei Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, ..., n bedeuten, bekanntlich immer $\left(\frac{\partial p^{(\varkappa)}}{\partial x^{(\lambda)}}\right)=\left(\frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x^{(\varkappa)}}\right)$ ist. Es sei nun die Gleichung

$$0 = \varphi(x, x', x'', \ldots, x^{(n)}, p', p'', \ldots, p^{(n)})$$

zu integriren. Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf x', und setzt

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)=p', \left(\frac{\partial p''}{\partial x'}\right)=\left(\frac{\partial p'}{\partial x''}\right), \left(\frac{\partial p'''}{\partial x'}\right)=\left(\frac{\partial p'}{\partial x'''}\right), \ldots, \left(\frac{\partial p^{(n)}}{\partial x'}\right)=\left(\frac{\partial p'}{\partial x^{(n)}}\right),$$

so erhält man:

$-p'$

$$-p'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)\cdot\left(\frac{\partial p'}{\partial x'}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right)\cdot\left(\frac{\partial p'}{\partial x''}\right)+\ldots.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)\cdot\left(\frac{\partial p'}{\partial x^{(n)}}\right).$$

Eben so erhält man, wenn man die gegebene Gleichung in Beziehung auf x'' differentiirt und $\left(\frac{\partial x}{\partial x''}\right)=p''$, $\left(\frac{\partial p'}{\partial x''}\right)=\left(\frac{\partial p''}{\partial x'}\right)$, $\left(\frac{\partial p'''}{\partial x''}\right)=\left(\frac{\partial p''}{\partial x'''}\right)$ u. s. w. setzt:

$$-p''\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x''}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)\cdot\left(\frac{\partial p''}{\partial x'}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right)\cdot\left(\frac{\partial p''}{\partial x''}\right)+\ldots.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)\cdot\left(\frac{\partial p''}{\partial x^{(n)}}\right),$$

Aehnliche Gleichungen erhält man in Bezug auf x''', x^{IV}, ..., $x^{(n)}$. Bemerkt man nun noch die identische Gleichung:

$$p'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)+p''\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right)+\ldots.+p^{(n)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)=$$
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x''}\right)+\ldots.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right),$$

so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$p'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)+p''\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right)+\ldots.+p^{(n)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)=P$$

setzt, in Allem folgende $n+1$ Gleichungen:

II.
$$\begin{cases} P=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x''}\right)+\ldots.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right) \\ -p'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)\cdot\left(\frac{\partial p'}{\partial x'}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right)\cdot\left(\frac{\partial p'}{\partial x''}\right)+\ldots.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)\cdot\left(\frac{\partial p'}{\partial x^{(n)}}\right) \\ -p''\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x''}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)\cdot\left(\frac{\partial p''}{\partial x'}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right)\cdot\left(\frac{\partial p''}{\partial x''}\right)+\ldots.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)\cdot\left(\frac{\partial p''}{\partial x^{(n)}}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -p^{(n)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(n)}}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)\cdot\left(\frac{\partial p^{(n)}}{\partial x'}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right)\cdot\left(\frac{\partial p^{(n)}}{\partial x''}\right)+\ldots.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)\cdot\left(\frac{\partial p^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\right). \end{cases}$$

Diese $n+1$ partiellen Differentialgleichungen haben die Eigenschaft, dafs in jeder nur die partiellen Differentiale einer Variablen vorkommen, in allen aber die Coefficienten der nach derselben Variablen genommenen Differentiale dieselben sind. Sie gehören also zu denen, welche das oben aufgestellte Theorem integriren lehrt. Zu diesem Ende hat man das System folgender $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen aufzustellen:

$$P\frac{\partial x'}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right);\quad P\frac{\partial x''}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right);\quad \ldots.;\quad P\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right);$$
$$P\frac{\partial p'}{\partial x}=-p'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right);\quad P\frac{\partial p''}{\partial x}=-p''\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x''}\right);\quad \ldots.$$
$$\ldots.;\quad P\frac{\partial p^{(n)}}{\partial x}=-p^{(n)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(n)}}\right).$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)\partial x' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x''}\right)\partial x'' + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(n)}}\right)\partial x^{(n)}$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)\partial p' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p''}\right)\partial p'' + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)\partial p^{(n)} = 0,$$

woraus man sieht, dafs die gegebene Gleichung $\varphi = 0$ eine der $2n$ Gleichungen ist, welche diese Differentialgleichungen integriren. Es seien die $2n-1$ anderen:

$$\varphi_1 = C_1,\ \varphi_2 = C_2,\ \varphi_3 = C_3,\ \ldots,\ \varphi_{2n-1} = C_{2n-1},$$

wo C_1, C_2, C_3, ..., C_{2n-1} die willkürlichen Constanten sind, φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1} aber diese nicht enthalten. Bedeuten nun Π_1, Π_2, ..., Π_n Functionen von φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1}, so giebt das System der $n+1$ partiellen Differentialgleichungen II. integrirt, Gleichungen von der Form:

$$\varphi = 0,\ \Pi_1 = 0,\ \Pi_2 = 0,\ \ldots,\ \Pi_n = 0.$$

9.

Das System der $n+1$ partiellen Differentialgleichungen II. wurde aus der gegebenen $\varphi = 0$ abgeleitet, vermittelst der Eigenschaft der Gröfsen p', p'', ..., $p^{(n)}$, dafs sie die partiellen Differentiale von x sind. Es läfst sich aber aus diesem Systeme partieller Differentialgleichungen nicht rückwärts folgern, dafs $p' = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)$, $p'' = \left(\frac{\partial x}{\partial x''}\right)$, ..., $p^{(n)} = \left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right)$. Geschieht nun jenem Systeme Genüge durch die Gleichung $\varphi = 0$ und durch irgend n Gleichungen zwischen den Gröfsen φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1}, so kommt es jeszt darauf an, diese Gleichungen so zu bestimmen, dafs immer auch rückwärts die Gleichungen

$$p' = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right),\ p'' = \left(\frac{\partial x}{\partial x''}\right),\ \ldots,\ p^{(n)} = \left(\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}\right)$$

folgen, welche Gleichungen man in die eine Gleichung:

$$\partial x = p'\partial x' + p''\partial x'' + \ldots + p^{(n)}\partial x^{(n)}$$

zusammenfassen kann.

10.

Da die Aufgabe durch n Gleichungen zwischen den Gröfsen φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1} gelöst wird, so läfst sich a priori schliefsen, so wie Lagrange für den Fall von drei Variabeln thut, dafs die Gleichung

$$\partial x = p'\partial x' + p''\partial x'' + \ldots + p^{(n)}\partial x^{(n)}$$

sich in eine andere müsse verwandeln lassen, welche blofs die Gröfsen

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-1}$ enthält. Wir wollen dieses aber noch a posteriori beweisen.

Zu diesem Ende betrachte man $2n$ von den $2n+1$ Variabeln x, x', x'', $\ldots$, $x^{(n)}$, p', p'', $\ldots$, $p^{(n)}$, z. B. alle aufser x als Functionen der übrigen x und der Gröfsen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-1}$. Unter dieser Voraussetzung verwandelt sich die Gleichung

$$\partial x = p' \partial x' + p'' \partial x'' + \ldots + p^{(n)} \partial x^{(n)}$$

in folgende:

$$\begin{aligned}
\partial x = {} & \partial x \left\{ p' \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) + p'' \left(\frac{\partial x''}{\partial x}\right) + \ldots + p^{(n)} \left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}\right) \right\} \\
& + \partial \varphi_1 \left\{ p' \left(\frac{\partial x'}{\partial \varphi_1}\right) + p'' \left(\frac{\partial x''}{\partial \varphi_1}\right) + \ldots + p^{(n)} \left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial \varphi_1}\right) \right\} \\
& + \partial \varphi_2 \left\{ p' \left(\frac{\partial x'}{\partial \varphi_2}\right) + p'' \left(\frac{\partial x''}{\partial \varphi_2}\right) + \ldots + p^{(n)} \left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial \varphi_2}\right) \right\} \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + \partial \varphi_{2n-1} \left\{ p' \left(\frac{\partial x'}{\partial \varphi_{2n-1}}\right) + p'' \left(\frac{\partial x''}{\partial \varphi_{2n-1}}\right) + \ldots + p^{(n)} \left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial \varphi_{2n-1}}\right) \right\},
\end{aligned}$$

welche wir der Kürze halber mit

$$\partial x = X \partial x + P_1 \partial \varphi_1 + P_2 \partial \varphi_2 + \ldots + P_{2n-1} \partial \varphi_{2n-1}$$

bezeichnen wollen.

Die partiellen Differentiale nach x können leicht durch die Betrachtung gefunden werden, dafs man, um sie zu erhalten, $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{2n-1}$ constant zu setzen hat; indem man, wenn man die blofs nach einer Variabeln genommenen partiellen Differentiale sucht, inzwischen die übrigen als Constanten betrachtet. Für diesen Fall gelten aber die Differentialgleichungen in (8.):

$$P \partial x' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p'}\right) \partial x, \; P \partial x'' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p''}\right) \partial x, \; \ldots, \; P \partial x^{(n)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}}\right) \partial x,$$

$$P \partial p' = -\left\{ p' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right) \right\} \partial x, \; \ldots, \; P \partial p^{(n)} = -\left\{ p^{(n)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^{(n)}}\right) \right\} \partial x,$$

wo

$$P = p' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p'}\right) + p'' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p''}\right) + \ldots + p^{(n)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}}\right).$$

Man hat daher

$$P \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p'}\right), \; P \left(\frac{\partial x''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p''}\right), \; \ldots, \; P \left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}}\right),$$

$$P \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) = -\left\{ p' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right) \right\}, \; \ldots, \; P \left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}\right) = -\left\{ p^{(n)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^{(n)}}\right) \right\}.$$

Hieraus folgt:

$$X = p'\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) + p''\left(\frac{\partial x''}{\partial x}\right) + \ldots + p^{(n)}\left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}\right) = 1.$$

Es reducirt sich also die Gleichung

$$\partial x = X\partial x + P_1\partial\varphi_1 + P_2\partial\varphi_2 + \ldots + P_{2n-1}\partial\varphi_{2n-1}$$

blofs auf

$$0 = P_1\partial\varphi_1 + P_2\partial\varphi_2 + \ldots + P_{2n-1}\partial\varphi_{2n-1}.$$

11.

Ich will nun zeigen, dafs in den Ausdrücken $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1}$, x nur in einem, allen gemeinschaftlichen Factor vorkommen kann. Differentiirt man nemlich

$$P_1 = p'\left(\frac{\partial x'}{\partial\varphi_1}\right) + p''\left(\frac{\partial x''}{\partial\varphi_1}\right) + \ldots + p^{(n)}\left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial\varphi_1}\right)$$

nach x, so erhält man $\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right) =$

$$\partial\left\{\frac{p'\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) + p''\left(\frac{\partial x''}{\partial x}\right) + \ldots + p^{(n)}\left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}\right)}{\partial\varphi_1}\right\}$$

$$+ \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial x'}{\partial\varphi_1}\right) + \left(\frac{\partial p''}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial x''}{\partial\varphi_1}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial p^{(n)}}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial\varphi_1}\right)$$

$$-\left\{\left(\frac{\partial p'}{\partial\varphi_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p''}{\partial\varphi_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial x''}{\partial x}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial p^{(n)}}{\partial\varphi_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial x}\right)\right\}.$$

Der erste Ausdruck ist $= \left(\frac{\partial X}{\partial\varphi_1}\right) = 0$, da $X = 1$. Substituirt man in die beiden anderen die in (10) für die nach x genommenen partiellen differential gegebenen Werthe, so wird $\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right) =$

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cdot\frac{P_1}{P} - \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)\cdot\left(\frac{\partial x'}{\partial\varphi_1}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(n)}}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^{(n)}}{\partial\varphi_1}\right) \\ + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p'}\right)\cdot\left(\frac{\partial p'}{\partial\varphi_1}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(n)}}\right)\cdot\left(\frac{\partial p^{(n)}}{\partial\varphi_1}\right)\end{array}\right\} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cdot\frac{P_1}{P},$$

indem der in Klammern eingeschlossene Ausdruck, als genaues Differentiale, von φ nach φ_1, wegen $\varphi = 0$, ebenfalls verschwindet.

So wie $\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cdot\frac{P_1}{P}$, so findet man allgemein

$$\left(\frac{\partial P_1}{P_1\partial x}\right) = \left(\frac{\partial P_2}{P_2\partial x}\right) = \ldots = \left(\frac{\partial P_{2n-1}}{P_{2n-1}\partial x}\right) = -\frac{1}{P}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$

woraus durch Integration in Beziehung auf x folgt:

$$P_1 = F_1 e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \partial x},$$

$$P_2 = F_2 e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \partial x},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P_{2n-1} = F_{2n-1} e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \partial x},$$

wo F_1, F_2, ..., F_{2n-1} kein x enthalten. Dividirt man also durch

$$e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \partial x},$$

so verwandelt sich die Gleichung:

$$\partial x = p' \partial x' + p'' \partial x'' + ... + p^{(n)} \partial x^{(n)}$$

in $$0 = F_1 \partial \varphi_1 + F_2 \partial \varphi_2 + ... + F_{2n-1} \partial \varphi_{2n-1},$$

wo F_1, F_2, ..., F_{2n-1} blofs Functionen von φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1} sind. Diese letztere Gleichung ist nun durch ein System von n Gleichungen zwischen φ_1, φ_2, ..., φ_{2n-1} zu integriren; was immer vermittelst der Pfaffschen Methode möglich ist. Ich werde diese in mehreren Abhandlungen besonders behandeln, wo ich auch diesen Gegenstand wieder aufzunehmen gedenke.

Den 12ten August 1827.

32.
Untersuchung über die Directrixen der Curven.

(Von Herrn *L. Raabe* zu Wien.)

1.

Nimmt man für eine gegebene ebene Curve einen Punct, der in der Ebene derselben sich befindet, als fix an, und nennt Radiusvector jede Gerade, die von diesem Puncte zu den Peripheriepuncten der Curve geführt wird, so wird jede andere Curve Directrix der gegebenen genannt, für welche die aus den Peripheriepuncten der gegebenen Curve an dieselbe gezogene Normalen, der Gröfse nach den entsprechenden Radiivectoren gleich sind. So ist, wenn die Parabel als gegebene Curve und ihr Brennpunct als fix angesehen wird, jene auf der Axe der Parabel errichtete senkrechte Gerade, die aufserhalb der Parabel in der Entfernung des vierten Theils des Parameters von dem Scheitel fällt, die Directrix der Parabel. Diese Directrix für eine jede gegebene ebene Curve zu finden, und das Umgekehrte, nemlich für eine jede gegebene Directrix nebst fixem Punct, die entsprechende Curve zu finden, soll den Inhalt gegenwärtiger Untersuchung ausmachen.

Ist der erwähnte fixe Punct der Anfangspunct eines geradlinigen senkrechten Coordinatensystems, so sei die Gleichung der gegebenen Curve, auf dieses Coordinatensystem bezogen, von der Form:

$$(\mathrm{I}) \quad f(x, y) = 0,$$

wo x und y die Coordinaten irgend eines Punctes der Peripherie der gegebenen Curve vorstellen. Trifft nun die aus diesem Puncte auf die zu suchende Directrix gefällte Normale, dieselbe in einem Puncte, dessen Coordinaten ξ und v gegen das festgesetzte Coordinatensystem sind, so ist die Gleichung der Normale:

$$(\mathrm{II}) \quad (y - v)v' + (x - \xi) = 0,$$

wo v' den Differentialcoefficienten $\frac{dv}{d\xi}$ der Directrix vorstellt.

Endlich mufs noch die Bedingung Statt haben, dafs die Gröfse der zwischen den beiden Puncten x, y und ξ, v enthaltenen Normale, gleich werden soll dem Radiusvector, oder der Geraden, die zwischen dem An-

fangspunct der Coordinaten und dem Punct x, y enthalten ist. Es mufs daher noch folgende Gleichung:

$$\text{(III)} \quad \xi^2 + v^2 = 2(\xi x + v y)$$

Statt haben. Aus diesen drei Gleichungen die Coordinaten x, y eines besonderen Punctes der Curve (I) eliminirt, erhält man eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen ξ, v, v', deren Integral die gesuchte Directrix geben wird.

2.

Wäre aber die Gleichung der Directrix gegeben und zwar von der Form:

$$\text{(IV)} \quad \varphi(\xi, v) = 0,$$

auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, von welchem wir im vorhergehenden Paragraph Gebrauch machten, so dürfte man nur, um die entsprechende Curve zu finden, aus der letzteren Gleichung den Werth von v' suchen und solchen in die Gleichung (II) substituiren, und dann vermittelst der so erhaltenen Gleichung (II) und der Gleichungen (III) und (IV), die Coordinaten ξ, v eliminiren, wo dann als Resultat der Elimination die Endgleichung der entsprechenden Curve hervorgehen würde.

3.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dafs es keine Schwierigkeiten hat, zu einer Directrix die entsprechende Curve für einen gegebenen fixen Punct zu finden, indem das ganze Verfahren auf einer einfachen Elimination beruht; hingegen hängt das Problem „zu einer gegebenen Curve eine Directrix zu finden," wie bereits erwähnt wurde, von der Integration einer Differentialgleichung der ersten Ordnung ab, welche in sehr vielen Fällen unüberwindliche Hindernisse hat. Wir wollen daher bei sich darbietenden Problemen, statt der Integration nur das singuläre Integral der vorliegenden Differentialgleichung suchen, welches dieselben Dienste gewähren wird, wie das vollständige Integral. Denn es stelle

$$F(\xi, v, a) = 0$$

das vollständige Integral der bereits erwähnten Differentialgleichung der Directrix vor, wo a die durch Integration eingeführte willkürliche Constante ist. Für jeden besonderen Werth, den man der Constanten a beilegt, erhält man eine andere Directrix der Form und Lage nach; alle diese Directrixen aber werden den durch die Gleichungen (II) und (III)

ausgesprochenen Bedingungen Genüge thun, daher auch die, sämmtliche Directrixen einhüllende Curve (da sie in jedem ihrer Puncte eine gemeinschaftliche Tangente, daher auch mit der ihr entsprechenden Directrix, eine gemeinschaftliche Normale hat) den Bedingungen (II) und (III) Genüge thun wird. Wir haben mithin nicht mehr nöthig, die Directrix selbst zu suchen, sondern nur die einhüllende Curve sämmtlicher Directrixen, die durch die Veränderlichkeit des Parameters a entstehen. Nun stellt die aus einer Differentialgleichung zwischen zwei veränderlichen Gröfsen erhaltene singuläre Auflösung, nichts anderes als die Einhüllungscurve sämmtlicher Curven des vollständigen Integrals vor, die durch die Annahme, dafs ein Parameter a veränderlich ist, entstehen. Daher reducirt sich das Verfahren auf folgendes. Die Werthe für x und y aus den Gleichungen (II) und (III), nemlich:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} x = \dfrac{(v^2-\xi^2)v' + 2\xi v}{2(v-\xi v')} \\ y = \dfrac{(v^2-\xi^2) - 2\xi v v'}{2(v-\xi v')}, \end{cases}$$

substituire man in die Gleichung (I); dadurch erhält man eine Differentialgleichung von der Form:

$$\psi(\xi, v, v') = 0.$$

Für diese Gleichung suche man eine singuläre Auflösung; so stellt die so erhaltene Relation zwischen ξ und v eine Curve vor, welche die Eigenschaften, die wir an der Directrix gesucht haben, mit ihr gemein hat. Die auf diesem Wege erhaltene Curve werden wie zum Unterschiede der eigentlichen Directrix, Curve der Directrixen nennen.

4.

Wir wollen das Vorhergehende auf einige besondere Fälle anwenden. Es sei die gegebene Curve eine Linie der zweiten Ordnung. Der fixe Punct sei ein Brennpunct derselben, und die Axe der x sei die gröfsere Hauptaxe dieser Linie. Dann hat man zur Gleichung derselben:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - (p + ex)^2 = 0,$$

wo p der halbe Parameter der Curve ist, und e das Verhältnifs der Excentricität zur grofsen Axe. Setzt man in die letzte Gleichnng die Werthe für x und y aus den Gleichungen (V), so ist die Differentialgleichung:

$$\psi(\xi, v, v') = \{2pv + 2e\xi v - [2p\xi - e(v^2-\xi^2)]v'\}^2 - (1+v'^2)(\xi^2+v^2)^2 = 0.$$

Aus

Aus dieser Gleichung die singuläre Auflösung gesucht, ergiebt sich:

$$(1)\quad (\xi^2+v^2)(1-e^2) = 4ep\xi + 4p^2.$$

Diese Gleichung gehört im Allgemeinen einem Kreise zu, dessen Mittelpunct in der Axe der x liegt, oder in der gröfsern Hauptaxe der Linie der zweiten Ordnung, und zwar, wie sich durch eine sehr einfache Transformation der Coordinaten zeigt, in dem zweiten Brennpuncte dieser Linie der zweiten Ordnung. Diesen Kreis wollen wir für eine jede Curve insbesondere, die sich zu den Linien der zweiten Ordnung zählt, betrachten.

I. Wenn die Linie der zweiten Ordnung ein Kreis ist, so fallen beide Brennpuncte zusammen, und die Curve der Directrixen mufs ein concentrischer Kreis sein. Setzt man nemlich in der letzten Gleichung $e = 0$, so stellt p den Halbmesser des gegebenen Kreises vor, und die Curve der Directrixen wird dann durch folgende Gleichung:

$$\xi^2 + v^2 = 4p^2$$

vorgestellt, also ein concentrischer Kreis von doppelt so grofsem Halbmesser, welches die Natur der Sache ganz mit sich bringt.

II. Die Linie der zweiten Ordnung sei eine Parabel; da liefse sich ebenfalls sogleich die Gerade als Curve der Directrix vermuthen; denn der zweite Brennpunct der Parabel befindet sich in einer unendlichen Entfernung, daher die Krümmung des Kreises, welcher die Curve der Directrixen vorstellen soll, unendlich grofs sein mufs, oder eine Gerade. Setzt man nun in der vorletzten Gleichung $e = 1$, so hat man:

$$\xi = -p,$$

als Gleichung der Curve der Directrixen einer Parabel. Diese Gleichung stellt eine auf der Hauptaxe der Parabel senkrechte Gerade vor. Diese Gerade fällt wegen des negativen Zeichens aufserhalb der Parabel in dem Abstande p von dem Brennpuncte, oder in dem Abstande $\frac{p}{2}$ von dem Scheitel der Parabel, welches bekannt ist.

III. Die Curve der zweiten Ordnung sei endlich eine Ellipse oder Hyperbel. Dann stellt die Gleichung (1), oder

$$\xi^2 + v^2 = \frac{4ep}{1-e^2}\xi + \frac{4p^2}{1-e^2}$$

die Curve der Directrixen vor. Da aber die Ellipse sowohl als die Hyperbel zwei Brennpuncte hat, so haben diese Curven der zweiten Ordnung zwei Curven der Directrixen, welche Kreise sind, deren Mittelpuncte

die Brennpuncte sind, und deren Radien, wie leicht zu sehen, gleich den grofsen Axen der Ellipsen oder Hyperbeln sind.

Diese hier auf analytischem Wege gefundenen Resultate, lassen sich noch leichter auf synthetischem Wege zeigen; welches wir aber hier übergehen.

Aus dem vorhin gewählten besonderen Falle sieht man, dafs sämmtliche Curven der zweiten Ordnung, wenn einer ihrer Brennpuncte der fixe Punct ist, Curven der Directrixen zulassen, wie bei der Parabel. Meines Wissens war eine solche Curve der Directrixen, unter dem einfachen Namen der Directrix, nur bei der Parabel bekannt, und die übrigen Linien der zweiten Ordnung scheinen von dieser Eigenschaft ausgeschlossen zu sein. Durch das so eben Gezeigte sieht man, dafs die Gerade die bei der Parabel die Eigenschaften der Curve der Directrixen hat, nur ein besonderer Fall eines Kreises ist, dessen Halbmesser für die Parabel unendlich grofs ist, und hiermit theilen sämmtliche Linien der zweiten Ordnung diese Eigenschaft, eine Curve der Directrixen zu haben.

Mit Hülfe einer solchen Curve der Directrixen lassen sich sämmtliche Linien der zweiten Ordnung zeichnen, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Ganz auf demselben Wege findet man, dafs die Curve der Directrixen der Linien der zweiten Ordnung mit einem Mittelpuncte, wenn der Mittelpunct der fixe Punct ist, durch folgende Gleichung:

$$(v^2 + \xi^2)^2 = 4(a^2\xi^2 + b^2v^2)$$

gegeben ist, wo a und b die halbe grofse und halbe kleine Axe der Linien der zweiten Ordnung vorstellen.

Da es keine Schwierigkeit haben würde, für jede beliebige Curve und irgend einen fixen Punct die Curve der Directrixen zu finden, so halte ich mich mit Aufführung mehrerer anderer besonderer Fälle nicht auf-

33.
Beweis des Harriotischen Satzes *).

(Vom Herrn Dr. *J. A. Grunert* zu Torgau.)

1.

Der bekannte Harriotische, eigentlich Cartesische Lehrsatz gehört unstreitig zu den merkwürdigsten und wichtigsten Theoremen der Algebra. Mehrere Mathematiker haben Beweise desselben zu geben versucht, von denen mir aber keiner den Grad von Einfachheit und Deutlichkeit zu haben scheint, welcher ihn zur Aufnahme in die Elemente eignete. Ich

*) Da der Beweis dieses Satzes jezt öfter zur Sprache kommt, so setzt der Herausgeber den von ihm in seinem „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Berlin 1825, bei Reimer," §. 323. S. 621. nach Segner gegebenen elementaren Beweis zur Vergleichung hieher.

Lehrsatz. Eine Gleichung kann nicht mehr negative Wurzeln haben als Zeichenfolgen, und nicht mehr positive Wurzeln als Zeichenwechsel.

Beweis. Man multiplicire z. B. die gegebene Gleichung

$$X = x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} \ldots + \nu = 0,$$

deren Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ theils positiv, theils negativ seyn mögen, mit $x + p$, so erhält man

$$X(x+p) = 0.$$

Diese Gleichung hat nothwendig alle Wurzeln der gegebenen Gleichung und aufserdem noch die Wurzel $-p$. Denn aus $X(x+p) = 0$ folgt $X = 0$ und $x + p = 0$. Der Factor $X = 0$ ist die gegebene Gleichung selbst, und hat also alle ihre Wurzeln, und $x + p = 0$ giebt noch die neue Wurzel $x = -p$. Die Gleichung $X(x+p) = 0$ hat also eine negative Wurzel mehr, wenn p positiv, und eine positive Wurzel mehr, wenn p negativ ist.

I. Es sei zuerst p positiv, so dafs

$$X(x+p) = 0$$

eine negative Wurzel mehr hat als die gegebene Gleichung.

Nun nehme man beispielsweise an, die Zeichen der Glieder des Polynomiums X der gegebenen Gleichung wechselten wie folgt:

$$+ + - - - + - - + - + + + - + + + + - + - + -$$

Multiplicirt man dieses Polynomium mit $x + p$ und schreibt die Glieder, welche gleiche Potestäten von x enthalten, um sie zusammenzuziehen, unter einander, so erhält man

		(1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24)
1.	Xx	=	+	+	−	−	−	+	−	−	+	−	+	+	+	−	+	+	+	+	−	+	−	+	−
2.	Xp	=		+	+	−	−	−	+	−	−	+	−	+	+	+	−	+	+	+	+	−	+	−	+	−
3.	$X(x+p)$	=	+	+	±	−	−	±	±	−	±	±	±	+	+	±	±	+	+	+	+	±	±	±	±	±	−

(Die Zahlen über den Zeichen dienen blofs, die Glieder bequemer zu benennen.)

Die Glieder der einzelnen Gröfsen Xx und Xp haben nothwendig der Reihe nach die nemlichen Zeichen, wie die Glieder der Gröfse X, weil die beiden Multiplicatoren x und p positiv sind. Aber die Gröfse Xp rückt mit allen ihren Gliedern um eine Stelle weiter rechts, weil in allen Gliedern die Exponenten von x um 1 niedriger sind.

mufs gestehen, dafs ich durch Segners am meisten bekannt gewordenen Beweis nie ganz überzeugt worden bin, und auch schon Kästner meinte, daft eine vollständige Entwickelung desselben in grofse Weitläufigkeit führen müsse. Die Beweise von de Gua, Aepinus und Kästner sind aus der Differentialrechnung und Theorie der Curven geschöpft. Der von Herrn Dr. G. E. Fischer in seiner gründlichen Inaugural-Schrift geführte Beweis, ist auf Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln eingeschränkt, und beruht auf der Theorie der derivirten Functionen, welche doch eigentlich mit der Differentialrechnung zusammenfällt. Ich wünsche, dafs der folgende Beweis, welcher mit keinem der mir bekannt gewordenen Beweise etwas gemein hat, den Namen eines elementaren verdienen möge.

Daraus folgt, dafs überall, wo Xx und folglich X zwei gleiche Zeichen hinter einander, oder eine Zeichenfolge hat, das nemliche Zeichen unter das zweite Zeichen der Folge zu stehen kommt, hingegen, dafs wo in Xx oder in X ein Zeichenwechsel ist, nothwendig unter dem zweiten Zeichen des Wechsels das entgegengesetzte Zeichen steht. Z. B. unter dem zweiten Zeichen (2.) der Folge + + (1, 2) steht nothwendig für Xp das Zeichen +, weil es von dem ersten gleichen Zeichen der Folge (1.) herrührt. Unter dem zweiten Zeichen (4.) der Folge — — (3, 4) steht nothwendig das Zeichen —, weil es von dem ersten Zeichen der Folge (3.) herkommt u. s. w. Hingegen unter dem zweiten Zeichen (3.) des Wechsels + — (2, 3) steht nothwendig für Xp das Zeichen +, weil es von dem ersten Zeichen des Wechsels (2, 3) herkommt u. s. w.

Also stehen nothwendig so vielmal gleiche Zeichen untereinander, als die Gröfse X Zeichenfolgen hat, und so vielmal entgegengesetzte Zeichen, als sie Zeichenwechsel hat.

Wo aber gleiche Zeichen untereinander stehen, hat unzweifelhaft auch die Summe der Glieder, folglich das darunter stehende Glied des Productes das nemliche Zeichen. Wo hingegen verschiedene Zeichen übereiander stehen, kann das Zeichen der Summe sowohl + als — sein, weil es darauf ankommt, welches Gliedes Coefficient der gröfsere ist, so dafs also dann das Zeichen des darunter stehenden Gliedes des Products ungewifs ist. Mithin sind die unter gleichen Zeichen von Xx und Xp stehenden Zeichen des Products unzweifelhaft und den gleichen Zeichen selbst gleich, die unter ungleichen Zeichen stehenden Zeichen hingegen sind ungewifs.

Nun mögen aber die ungewissen Zeichen des Products sein, was sie können: nie können sie mehr Wechsel haben als die darüber stehenden Zeichen der Gröfse X selbst. Denn die unzweifelhaften Zeichen des Products, von welchen die ungewissen eingeschlossen werden, sind, wie oben bewiesen, den gerade darüberstehenden Zeichen der Gröfse X gleich, wie z. B. 2 und 4 5 und 8, 8 und 12 u. s. w., und zwischen diesen Zeichen der Gröfse X liegen so viel Wechsel als möglich, weil zu jedem Wechsel ein ungewisses Zeichen im Product gehört, und also, wenn mehrere Wechsel möglich wären, auch mehrere ungewisse Zeichen als wirklich da sind, vorhanden sein müfsten. Also können zwischen den nemlichen einschliefsenden Zeichen im Product nicht mehr Wechsel liegen, als zwischen den darüber stehenden Zeichen der Gröfse X, weil sich dort so viel Wechsel befinden als möglich. Die unzweifelhaften Zeichen des Products sind ferner die darüber stehenden Zeichen der Gröfse X selbst. Also können sämmtliche Glieder des Products, so weit sie von unzweifelhaften Zeichen eingeschlossen werden, nie mehr Zeichenwechsel haben, als die darüber stehenden Glieder der Gröfse X.

2.

P und P' seien immer Functionen von der Form:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + \overset{-2}{N}x^{n+2} + \overset{-1}{N}x^{n+1} + Nx^n,$$

wo die Coefficienten aufser dem ersten, welcher immer als positiv angenommen wird, positiv oder negativ sein können. Das Zeichen eines jeden Gliedes wird blofs durch das Zeichen seines Coefficienten bestimmt. Eine Folge heifst überhaupt das Aufeinanderfolgen zweier gleichen Zeichen, wie $+\,+$ oder $-\,-$, ein Wechsel dagegen das Aufeinanderfolgen zweier ungleichen Zeichen, wie $+\,-$ oder $-\,+$. Zunächst kommt es nun auf den Beweis des folgenden Satzes an.

Das erste und das letzte Zeichen des Products sind aber, wie leicht zu sehen, immer unzweifelhaft: sie sind dem ersten und letzten Zeichen der Gröfse X gleich. Also werden alle Zeichen des Products von unzweifelhaften Zeichen eingeschlossen, und folglich kann das Product, obgleich mehr Zeichenfolgen, wenigstens nie mehr Zeichenwechsel haben, als die Gröfse X.

Das Product hat aber ein Glied, und folglich ein Zeichen mehr als die Gröfse X, folglich mufs es nothwendig eine Zeichenfolge mehr haben als sie.

Daraus folgt, dafs, wenn zwei Gleichungen wie die obigen, $X = 0$ und $X(x+p) = 0$, beide die nemlichen Wurzeln haben, die Gleichung $X(x+p) = 0$ aber noch die negative Wurzel $-p$, mehr hat, das Polynomium $X(x+p)$ nothwendig wenigstens eine Zeichenfolge mehr haben mufs, als das Polynomium X.

Nun setze man, eine gegebene Gleichung wie $X = 0$ habe die n negativen Wurzeln $-p_1, -p_2, -p_3 \ldots -p_n$, und aufserdem vielleicht auch noch positive oder unmögliche Wurzeln, so läfst sich ihr Polynomium X durch

$$X = P(x+p_1)(x+p_2)(x+p_3)\ldots(x+p_n)$$

ausdrücken, wenn P dasjenige Polynomium bedeutet, welches die übrigen positiven und unmöglichen Wurzeln enthält. Von welcher Art nun auch das Polynomium P sein mag: immer mufs, wie bewiesen, das Product $P(x+p_1)$ wenigstens eine Zeichenfolge mehr als P, also das Product $P(x+p_1)(x+p_2)$ wenigstens eine Zeichenfolge mehr als $P(x+p_1)$ und folglich wenigstens zwei Zeichenfolgen mehr als P, u. s. w., zuletzt also das Product $X = P(x+p_1)(x+p_2)\ldots(x+p_n)$ nothwendig wenigstens n Zeichenfolgen mehr als P haben. Mag nun das Polynomium P selbst noch Zeichenfolgen haben, oder nicht: mindestens mufs X die n Zeichenfolgen selbst haben, sobald die gegebene Gleichung $X = 0$, n negative Wurzeln hat. Umgekehrt also kann auch die Gleichung $X = 0$, wenn sie nur n Zeichenfolgen hat, nicht mehr als n negative Wurzeln haben; denn hätte sie mehr, so hätte sie nothwendig auch wenigstens eben so viele Zeichenfolgen.

II. Es sei zweitens p negativ und gleich $-q$, so dafs also die Gleichung

$$X(p-q) = 0$$

eine positive Wurzel q mehr hat als die gegebene Gleichung $X = 0$.

Man nehme das obige Beispiel und multiplicire mit $x - q$, so erhält man

		(1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24)
1.	Xx	$=+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	
2.	$-Xq$	$=$		$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
3.	$X(x-q)$	$=+$	$\pm$	$-$	$\pm$	$\pm$	$+$	$-$	$\pm$	$+$	$-$	$+$	$\pm$	$\pm$	$-$	$+$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

3.

Wenn a immer eine positive Gröfse bezeichnet, so hat

α) das Product $P(x+a)$ immer wenigstens eine Folge;

β) das Product $P(x-a)$ dagegen immer wenigstens einen Wechsel mehr als die Function P.

4.

Um das Erste zu beweisen, nehme man an, dafs der Satz für jede Function P mit f Folgen richtig sei, so dafs also das dem Producte $P(x+a)$ gleiche Polynom, wenigstens $f+1$ Folgen hat. Nun sei P' irgend eine Function mit $f+1$ Folgen, und die Coefficienten ihrer letzten Glie-

---

Es ist leicht zu sehen, dafs hier in dem Product jedesmal unter dem zweiten Zeichen einer Folge von Xx oder X ein ungewisses, und unter dem zweiten Zeichen eines Wechsels von X ein unzweifelhaftes, dem darüber stehenden Zeichen in X gleiches Zeichen steht. Z. B. unter den Zeichen 2, 4, 5, 8, 12 etc., welche Zeichen von Folgen sind, stehen im Product ungewisse Zeichen, und unter 3, 6, 7, 10, 11 etc., welche zweite Zeichen von Wechseln sind, stehen unzweifelhafte Zeichen, die den darüber treffenden Zeichen der ersten Reihe gleich sind. Der Grund davon ist, dafs die Zeichen der zweiten Reihe denen der ersten entgegengesetzt sind, und also jedesmal unter das zweite Zeichen einer Folge ein von dem ersten, gleichen Zeichen derselben herrührendes entgegengesetztes Zeichen, und unter das zweite Zeichen eines Wechsels ein von dem ersten entgegengesetzten Zeichen desselben herrührendes gleiches Zeichen zu stehen kommt.

Nun folgt ferner, auf ähnliche Art wie in (I.), dafs die unzweifelhaften Zeichen des Products nicht mehr Zeichenfolgen, sondern nur vielleicht mehr Zeichenwechsel einschliefsen können, als die gleichen, darüber stehenden Zeichen der Gröfse X, weil nemlich die letztern schon so viele Folgen einschliefsen als möglich. Und da nun wieder das erste und das letzte Zeichen des Products immer unzweifelhafte Zeichen sind, so folgt, dafs das Product überhaupt nicht mehr Folgen haben kann, als die Gröfse X. Es mufs also nothwendig wenigstens einen Zeichenwechsel mehr haben, weil es ein Glied mehr hat.

Also hat das Polynomium einer Gleichung nothwendig wenigstens einen Zeichenwechsel mehr als das Polynomium einer andern Gleichung, die dieselben Wurzeln, aber eine positive Wurzel weniger hat. Und hieraus folgt, auf ähnliche Weise wie in (I.), dafs eine Gleichung, die n positive Wurzeln hat, mindestens n Zeichenwechsel haben mufs, und dafs also keine Gleichung mehr positive Wurzeln haben kann, als Zeichenwechsel.

Dieser Satz, die Grenzen der Zahl der positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung an den Zeichen ihrer Glieder zu erkennen, ist für die Lehre von den Gleichungen sehr wichtig. Er rührt von Descartes her, der ihn am Ende des siebzehnten Jahrhunderts fand. Beweise giebt es von demselben mehrere. Der obige, der in der Hauptsache mit dem von Segner übereinkommt, ist einer der einfachsten. Einen andern schönen Beweis findet man bei Lagrange, in der Theorie der Gleichungen, im achten Zusatze.

Der umgekehrte Satz findet übrigens natürlich nicht Statt. Es folgt keinesweges, dafs eine Gleichung nothwendig so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel, und so viele negative Wurzeln als Zeichenfolgen haben müsse; es ist blofs bewiesen worden, dafs sie deren nicht mehr haben kann.

der seien:

$$\ldots\ldots, \overset{-3}{N}, \overset{-2}{N}, \overset{-1}{N}, N;$$

so sind die letzten Glieder des Products $P'(x+a)$:

$$\ldots\ldots, \overset{-2}{N}+a\overset{-3}{N}, \overset{-1}{N}+a\overset{-2}{N}, N+a\overset{-1}{N}, aN,$$

wenn immer blofs die Coefficienten berücksichtigt werden.

Man unterscheide jetzt folgende zwei Fälle:

$\alpha\alpha$) P' habe zuletzt eine Folge, so dafs also $\overset{-1}{N}$, N einerlei Vorzeichen haben.

Da nun P' überhaupt $f+1$ Folgen hat, so hat das Polynom

$$P' - Nx^n$$

nur f Folgen, und demnach wegen der Annahme

$$(P' - Nx^n)(x+a)$$

wenigstens $f+1$ Folgen. Die letzten Glieder dieses Products sind:

$$\ldots\ldots, \overset{-2}{N}+a\overset{-3}{N}, \overset{-1}{N}+a\overset{-2}{N}, a\overset{-1}{N}.$$

$\overset{-1}{N}$ und N haben nach der Voraussetzung gleiche Vorzeichen; also, weil a positiv ist, auch $N+a\overset{-1}{N}$ und $a\overset{-1}{N}$. Demnach enthalten die Reihen

$$\ldots\ldots, \overset{-2}{N}+a\overset{-3}{N}, \overset{-1}{N}+a\overset{-2}{N}, N+a\overset{-1}{N};$$
$$\ldots\ldots, \overset{-2}{N}+a\overset{-3}{N}, \overset{-1}{N}+a\overset{-2}{N}, a\overset{-1}{N},$$

eine gleiche Anzahl von Folgen, so dafs also die erste, wie nach dem obigen die letzte, wenigstens $f+1$ Folgen enthält. Aber auch $N+a\overset{-1}{N}$ und aN haben offenbar einerlei Zeichen. Demnach geben diese beiden Glieder auch eine Folge, und die Reihe:

$$\ldots\ldots, \overset{-2}{N}+a\overset{-3}{N}, \overset{-1}{N}+a\overset{-2}{N}, N+a\overset{-1}{N}, aN;$$

d. i. das Product $P'(x+a)$, hat also wenigstens $f+2$ Folgen.

$\beta\beta$) P' habe zuletzt einen Wechsel, so dafs also $\overset{-1}{N}$, N, ungleiche Vorzeichen haben.

Die letzte Folge finde statt bei $\overset{-k}{N}$, $\overset{-k+1}{N}$, so dafs nachher lauter Wechsel folgen. Also hat

$$P' - \overset{-k+1}{N}x^{n+k-1} - \overset{-k+2}{N}x^{n+k-2} - \ldots\ldots - Nx^n$$

nur f, und folglich nach der Annahme

$$(P' - \overset{-k+1}{N}x^{n+k-1} - \overset{-k+2}{N}x^{n+k-2} - \ldots\ldots - Nx^n)(x+a),$$

wenigstens $f+1$ Folgen. Die letzten Glieder dieses Products sind:

$$\ldots\ldots, \overset{-k-1}{N}+a\overset{-k-2}{N}, \overset{-k}{N}+a\overset{-k-1}{N}, a\overset{-k}{N},$$

wo also wenigstens $f+1$ Folgen vorkommen. Die letzten Glieder von $P'(x+a)$ sind:

$$\ldots\ldots, \overset{-k-1}{N}+a\overset{-k-2}{N}, \overset{-k}{N}+a\overset{-k-1}{N}, \overset{-k+1}{N}+a\overset{-k}{N}, \overset{-k+2}{N}+a\overset{-k+1}{N},$$
$$\overset{-k+3}{N}+a\overset{-k+2}{N}, \ldots\ldots, \overset{-1}{N}+a\overset{-2}{N}, N+a\overset{-1}{N}, aN.$$

Da nun $\overset{-k}{N}, \overset{-k+1}{N}$ gleiche Vorzeichen haben, so ist klar, dafs die Reihen

$$\ldots\ldots, \overset{-k-1}{N}+a\overset{-k-2}{N}, \overset{-k}{N}+a\overset{-k-1}{N}, a\overset{-k}{N};$$
$$\ldots\ldots, \overset{-k-1}{N}+a\overset{-k-2}{N}, \overset{-k}{N}+a\overset{-k-1}{N}, \overset{-k+1}{N}+a\overset{-k}{N},$$

gleich viele, nemlich wenigstens $f+1$ Folgen enthalten.

Gäbe nun $\overset{-k+1}{N}+a\overset{-k}{N}, \overset{-k+2}{N}+a\overset{-k+1}{N}$ in der Reihe für $P'(x+a)$ keine Folge, sondern einen Wechsel, so müfste, wegen der Gleichheit der Vorzeichen von $\overset{-k}{N}, \overset{-k+1}{N}$, das Vorzeichen des zweiten Gliedes mit dem Vorzeichen von $\overset{-k+2}{N}$ einerlei sein, weil, wenn es mit dem von $\overset{-k+1}{N}$ einerlei wäre, kein Wechsel, sondern eine Folge entstehen würde. Gäbe ferner auch $\overset{-k+2}{N}+a\overset{-k+1}{N}, \overset{-k+3}{N}+a\overset{-k+2}{N}$ keine Folge, so müfste das Vorzeichen des zweiten Gliedes, da das erste mit $\overset{-k+2}{N}$ einerlei Vorzeichen hat, dem Vorzeichen von $\overset{-k+3}{N}$ gleich sein. Man sieht, wie man auf diese Art weiter gehen kann. Gäbe es nun auch bis zu $N+a\overset{-1}{N}$ keine Folge, so müfste dieses Glied doch mit N gleiches Vorzeichen haben, so dafs also $N+a\overset{-1}{N}$, aN bestimmt noch eine Folge geben würde. Also hat $P'(x+a)$ auch in diesem Falle wenigstens $f+2$ Folgen, und unser Satz gilt folglich für jedes Polynom mit $f+1$ Folgen, wenn er für jedes Polynom mit f Folgen gilt.

Für $f=0$ ist nun die Folge der Zeichen entweder

$$+\ -\ +\ -\ +\ -\ \ldots\ +\ -, \text{ oder}$$
$$+\ -\ +\ -\ +\ -\ \ldots\ +\ -\ +.$$

Also für das Product $P'(x+a)$ entweder

$$\left.\begin{array}{l} +\ -\ +\ -\ +\ -\ \ldots\ +\ -\ +\ - \\ +\ -\ +\ -\ +\ \ldots\ -\ +\ -\ +\ - \end{array}\right\}, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} + - + - + - \ldots . + - + - + \\ + - + - + \ldots . - + - + - + \end{array}\right\}.$$

Gäbe es nun auch bis zum vorletzten Gliede gar keine Folge, so dafs also, weil das erste Glied immer positiv ist, die Zeichen bis zum vorletzten Gliede des Products mit den Zeichen der obern Reihe einerlei wären, so würde sich doch immer aus den beiden letzten Gliedern eine Folge, entweder — — oder + + ergeben, und das Product würde also immer wenigstens 0 + 1 Folgen haben. Demnach gilt unser Satz für jedes Polynom mit 0 Folgen, und ist also nach dem Obigen allgemein.

5.

Der zweite Theil unsers Satzes verstattet eine ganz ähnliche Ausführung. Man nehme an, dafs für jedes Polynom P mit w Wechseln, $P(x-a)$, wenigstens $w+1$ Wechsel habe, so ist zu zeigen, dafs für jedes Polynom P' mit $w+1$ Wechseln, $P'(x-a)$ wenistens $w+2$ Wechsel haben müsse.

$\alpha\alpha$) P' habe zuletzt einen Wechsel, so dafs also $\overset{-1}{N}$, N ungleiche Zeichen haben. Demnach hat

$$P' - N x^n,$$

nur w, und folglich nach der Annahme:

$$(P' - N x^n)(x - a),$$

wenigstens $w + 1$ Wechsel. Die letzten Glieder der Producte $P'(x-a)$ und $(P' - N x^n)(x-a)$ sind:

$$\ldots., \overset{-2}{N} - a\overset{-3}{N}, \overset{-1}{N} - a\overset{-2}{N}, N - a\overset{-1}{N}, -aN;$$
$$\ldots., \overset{-2}{N} - a\overset{-3}{N}, \overset{-1}{N} - a\overset{-2}{N}, -a\overset{-1}{N}.$$

Da $\overset{-1}{N}$, N ungleiche Vorzeichen haben, so ist klar, dafs immer $-a\overset{-1}{N}$ mit N, also auch mit $N - a\overset{-1}{N}$, einerlei Vorzeichen hat, und dafs also, wenn man von der ersten der obigen Reihen das letzte Glied unberücksichtigt läfst, diese beiden Reihen gleich viele, nemlich nach dem Vorhergehenden, wenigstens $w+1$ Wechsel enthalten. Nun hat aber $N - a\overset{-1}{N}$ einerlei Zeichen mit N, $-aN$ dagegen das entgegengesetzte; also geben die Glieder $N - a\overset{-1}{N}$, $-aN$ noch einen Wechsel, und die erste Reihe, d. i. das Product $P'(x-a)$, hat demnach wenigstens $w+2$ Wechsel.

$\beta\beta$) P' habe zuletzt eine Folge, so dafs $\overset{-1}{N}$, N gleiche Zeichen haben.

Der letzte Wechsel trete ein bei $\overset{-k}{N}$, $\overset{-k+1}{N}$, so dafs dann nur Folgen, also lauter gleiche Vorzeichen, statt finden. Das Polynom

$$P' - \overset{-k+1}{N}x^{n+k-1} - \overset{-k+2}{N}x^{n+k-2} - \ldots - Nx^n$$

hat also nur w, folglich nach der Annahme das Product

$$(P' - \overset{-k+1}{N}x^{n+k-1} - \overset{-k+2}{N}x^{n+k-2} - \ldots - Nx^n)(x-a),$$

wenigstens $w+1$ Wechsel. Die Coefficienten der letzten Glieder dieses Products sind:

$$\ldots, \overset{-k-1}{N} - a\overset{-k-2}{N}, \overset{-k}{N} - a\overset{-k-1}{N}, -a\overset{-k}{N};$$

die Coefficienten der letzten Glieder des Products $P'(x-a)$ aber:

$$\ldots, \overset{-k-1}{N} - a\overset{-k-2}{N}, \overset{-k}{N} - a\overset{-k-1}{N}, \overset{-k+1}{N} - a\overset{-k}{N}, \overset{-k+2}{N} - a\overset{-k+1}{N},$$
$$\overset{-k+3}{N} - a\overset{-k+2}{N}, \ldots, \overset{-1}{N} - a\overset{-2}{N}, N - a\overset{-1}{N}, -aN.$$

Da $\overset{-k}{N}$, $\overset{-k+1}{N}$ entgegengesetzte Zeichen haben, so hat $\overset{-k+1}{N} - a\overset{-k}{N}$ mit $\overset{-k+1}{N}$, also mit $-a\overset{-k}{N}$, einerlei Vorzeichen, und die Reihen

$$\ldots, \overset{-k-1}{N} - a\overset{-k-2}{N}, \overset{-k}{N} - a\overset{-k-1}{N}, -a\overset{-k}{N};$$
$$\ldots, \overset{-k-1}{N} - a\overset{-k-2}{N}, \overset{-k}{N} - a\overset{-k-1}{N}, \overset{-k+1}{N} - a\overset{-k}{N},$$

enthalten also gleich viele, d. h. wenigstens $w+1$ Wechsel. Gäbe nun $\overset{-k+1}{N} - a\overset{-k}{N}$, $\overset{-k+2}{N} - a\overset{-k+1}{N}$ keinen Wechsel, sondern eine Folge, so müfste, da das erste Glied mit $\overset{-k+1}{N}$ gleiches Zeichen hat, auch das zweite Glied mit $\overset{-k+1}{N}$, und folglich, da bei $\overset{-k+1}{N}$ der letzte Wechsel eintritt, auch mit $\overset{-k+2}{N}$ gleiches Zeichen haben. Gäbe ferner auch $\overset{-k+2}{N} - a\overset{-k+1}{N}$, $\overset{-k+3}{N} - a\overset{-k+2}{N}$ keinen Wechsel, sondern eine Folge, so müfste, da das erste Glied und $\overset{-k+2}{N}$ einerlei Zeichen haben, auch das letzte mit $\overset{-k+2}{N}$, also auch mit $\overset{-k+3}{N}$, einerlei Zeichen haben. Gäbe es nun bis $N - a\overset{-k}{N}$ keinen Wechsel, so müfste doch nach der gebrauchten Schlufsart $N - a\overset{-1}{N}$ mit N einerlei Zeichen haben, und $N - a\overset{-1}{N}$, $-aN$ gäben daher bestimmt noch einen Wechsel, so dafs $P'(x-a)$ also immer wenigstens $w+2$ Wechsel hat, und unser

Satz demnach für jedes Polynom mit $w+1$ Wechseln gilt, wenn er für jedes Polynom mit w Wechseln gilt.

Für $w=0$ ist die Folge der Zeichen

$$+ + + + \ldots . + + + +$$

da, weil wir das erste Glied, wie es zu unserm Zwecke verstattet ist, als positiv angenommen haben, die Folge

$$- - - - \ldots . - - - -$$

nicht vorkommen kann. Die Folge der Zeichen für das Product $P(x-a)$ ist also:

$$\left.\begin{matrix} + + + + \ldots . + + + \\ - - - \ldots . - - - - \end{matrix}\right\},$$

und es erhellet augenblicklich, dafs, wenn es auch bis zum vorletzten Gliede keinen Wechsel gäbe, die beiden letzten Glieder doch den Wechsel $+ -$ hervorbringen müfsten, so dafs also im Producte immer wenigstens $0+1$ Wechsel vorkommen müssen. Da nun unser Satz für $w=0$ gilt, so ist er nach dem Obigen allgemein.

6.

Nun ist es leicht folgenden Satz zu beweisen:

Die Zahl der positiven Wurzeln einer Gleichung ist höchstens so grofs als die Anzahl der Wechsel, die Zahl der negativen Wurzeln höchstens so grofs als die Anzahl der Folgen in ihrer Function.

α) Die Gleichung $y=0$, deren erstes Glied als positiv angenommen werden kann, habe die positiven Wurzeln p', p'', p''', ..., an der Zahl $=p$, so kann man bekanntlich voraussetzen:

$$y = P(x-p')(x-p'')(x-p''') \ldots .$$

Habe nun P w Zeichenwechsel, so haben, nach dem Bewiesenen, die Producte

$P(x-p')$, $P(x-p')(x-p'')$, $P(x-p')(x-p'')(x-p''')$ etc.,

wenigstens $w+1$, $w+2$, $w+3$, ... Wechsel; also überhaupt y wenigstens $w+p$ Wechsel, so dafs also, wenn auch $w=0$ wäre, die Anzahl der Wechsel in y doch nie $<p$ ist, w. z. b. w.

β) Die Gleichung $y=0$ habe die negativen Wurzeln $-n'$, $-n''$, $-n'''$, ..., an der Zahl $=n$, so kann man setzen:

$$y = Q(x+n')(x+n'')(x+n''') \ldots .$$

Ist nun die Anzahl der Folgen in $Q=f$, so haben die Producte

$Q(x+n')$, $Q(x+n')(x+n'')$, $Q(x+n')(x+n'')(x+n''')$ etc.,

wenigstens $f+1$, $f+2$, $f+3$, ... Folgen; also überhaupt y wenigstens $f+n$ Folgen, so dafs folglich, wenn auch $f=0$ wäre, die Anzahl der Folgen in y doch nie $<n$ ist, w. z. b. w.

7.

Der vorhergehende Satz gilt auch, wenn die Gleichung imaginäre Wurzeln hat. Hat aber die Gleichung lauter reelle Wurzeln, so ist immer die Anzahl der positiven Wurzeln der Anzahl der Wechsel, die Anzahl der negativen Wurzeln der Anzahl der Folgen in der Function der Gleichung. Dies ist der eigentliche, sogenannte Harriotische Satz, der sich aber in Harriots Werken nicht findet, sondern zuerst von Descartes in „*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des essais de cette méthode. A Leyde* 1637 *p.* 373," vorgetragen wird. Der Beweis ist nun leicht. Die gegebene Gleichung sei vom *m*ten Grade, so erhellet augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$p+n=m,\quad w+f=m,\quad p+n=w+f,$$

wo die Buchstaben ihre frühere Bedeutung behalten.

Wäre nun p nicht $=w$, so sei, da nach dem Vorhergehenden p nie $>w$ sein kann,

$$p<w.$$

Also $p+n-p>w+f-w$, d. i. $n>w$, da doch auch n nie $>f$ werden kann. Also ist $p=w$, woraus unmittelbar mittelst der obigen Gleichungen folgt, dafs auch $n=f$ ist, w. z. b. w.

34.
Ueber die Bestimmung der Rectascension und Declination eines Sterns aus den gemessenen Distanzen desselben von zwei bekannten Sternen.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

Die Bestimmung des Ortes eines Sterns aus seinen Distanzen von zwei bekannten Sternörtern ist ein Problem, das trotz scheinbarer Einfachheit kaum eine elegante, für die Berechnung bequeme Auflösung zuzulassen scheint. Es kommt dieses Problem, wie leicht zu sehen ist, mit demjenigen überein, wo man die Polhöhe eines Ortes aus den gemessenen Höhen zweier bekannten Sterne sucht, welches Krafft im 13ten Bande der Petersburger *Nasa Acta* pag. 477 sqq. und Gaufs in einer besonders gedruckten Abhandlung vom J. 1808 behandelt haben. Ich werde hier das Endresultat geben, aus dessen Complication man die Schwierigkeiten ermessen kann, die dem Auffinden einer eleganten Methode der Berechnung im Wege stehen.

Es seien α, α', α'' die Rectascensionen dreier Sterne S, S', S'', ∂, ∂', ∂'' ihre Declinationen; es sei D die Distanz von S' und S'', D' die gemessene Distanz von S'' und S, D'' von S und S'. Setzt man nun der Kürze wegen:

$$\sin\left(\frac{D+D'+D''}{2}\right)\sin\left(\frac{D+D'-D''}{2}\right)\sin\left(\frac{D+D''-D'}{2}\right)\sin\left(\frac{D'+D''-D}{2}\right) = \Delta\Delta,$$

$$\cos D'' - \cos D \cos D' = \Delta',$$

$$\cos D' - \cos D \cos D'' = \Delta'',$$

so finde ich:

1) $$\sin D^2 . \cos\partial \sin\left(\alpha - \frac{\alpha'+\alpha''}{2}\right) =$$

$$\sin(\partial''-\partial')\cos\left(\frac{\alpha''-\alpha'}{2}\right)\Delta + \sin\left(\frac{\alpha''-\alpha'}{2}\right)(-\cos\partial'\,\Delta' + \cos\partial''\,\Delta''),$$

2) $$\sin D^2 . \cos\partial \cos\left(\alpha - \frac{\alpha'+\alpha''}{2}\right) =$$

$$\sin(\partial''+\partial')\sin\left(\frac{\alpha''-\alpha'}{2}\right)\Delta + \cos\left(\frac{\alpha''-\alpha'}{2}\right)(\cos\partial'\,\Delta' + \cos\partial''\,\Delta''),$$

3) $$\sin D^2 . \sin\partial = -\cos\partial'\cos\partial''\sin(\alpha''-\alpha')\Delta + \sin\partial'\,\Delta' + \sin\partial''\,\Delta''.$$

Da Δ hier positiv oder negativ genommen werden kann, so enthalten diese Formeln, von denen zwei die dritte mit sich führen, die beiden möglichen Auflösungen der Aufgabe. —

Zu diesen Formeln kann man auf folgendem kurzen und directen Wege ohne Beihülfe der sphärischen Trigonometrie gelangen.

Man nenne x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten von S; x', y', z' von S'; x'', y'', z'' von S'', ferner R, R', R'' die Entfernungen von S, S', S'' vom Anfangspuncte der Coordinaten, so hat man die drei bekannten Gleichungen der analytischen Geometrie:

$$\begin{aligned} x(y'z''-y''z') + y(z'x''-z''x') + z(x'y''-x''y') &= RR'R''\Delta, \\ xx' + yy' + zz' &= RR''\Delta, \\ xx'' + yy'' + zz'' &= RR'\Delta. \end{aligned}$$

Bemerkt man noch die beiden bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} (x'y''-x''y')^2 + (y'z''-y''z')^2 + (z'x''-z''x')^2 &= R'^2R''^2\sin D^2, \\ x'x'' + y'y'' + z'z'' &= R'R''\cos D, \end{aligned}$$

so folgt aus Auflösung dieser 3 Gleichungen nach einigen Reductionen:

$$\begin{aligned} \sin D^2\frac{x}{R} &= \left(\frac{y'z''-y''z'}{R'R''}\right)\Delta + \frac{x'\Delta'}{R'} + \frac{x''\Delta''}{R''}, \\ \sin D^2\frac{y}{R} &= \left(\frac{z'x''-z''x'}{R'R''}\right)\Delta + \frac{y'\Delta'}{R'} + \frac{y''\Delta''}{R''}, \\ \sin D^2\frac{z}{R} &= \left(\frac{x'y''-x''y'}{R'R''}\right)\Delta + \frac{z'\Delta'}{R'} + \frac{z''\Delta''}{R''}. \end{aligned}$$

Denkt man sich die Ebene des Aequators als die Ebene der x, y, und in dieser die y Achse so gelegt, dafs sie mit der Linie, von welcher an die Rectascensionen gezählt werden, den Winkel $\frac{\alpha'+\alpha''}{2}$ macht, so hat man:

$$\begin{aligned} \frac{x}{R} &= \cos\partial\sin\left(\alpha-\frac{\alpha'+\alpha''}{2}\right), & \frac{y}{R} &= \cos\partial\cos\left(\alpha-\frac{\alpha'+\alpha''}{2}\right), & \frac{z}{R} &= \sin\partial, \\ \frac{x'}{R'} &= -\cos\partial'\sin\left(\frac{\alpha''-\alpha'}{2}\right), & \frac{y'}{R'} &= \cos\partial'\cos\left(\frac{\alpha''-\alpha'}{2}\right), & \frac{z'}{R'} &= \sin\partial', \\ \frac{x''}{R''} &= \cos\partial''\sin\left(\frac{\alpha''-\alpha'}{2}\right), & \frac{y''}{R''} &= \cos\partial''\cos\left(\frac{\alpha''-\alpha'}{2}\right), & \frac{z''}{R''} &= \sin\partial''. \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Werthe in die für $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{R}$, $\frac{z}{R}$ gefundenen Ausdrücke giebt die zu Anfang aufgestellten Resultate.

Den 20sten August 1827.

35.

Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

Erste Abhandlung.

1.

Pfaff hat in einer Abhandlung, welche unter denen der Berliner Academie vom J. 1814—15 zu lesen ist, gezeigt, wie man jede Gleichung von der Form:

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_{2n} \partial x_{2n} = 0,$$

wo X_1, X_2, X_3, ..., X_{2n} beliebige Functionen von x_1, x_2, x_3, ..., x_{2n} sind, durch ein System von n Gleichungen integriren kann, von welcher Aufgabe die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen n Variabeln nur ein besonderer Fall ist. Zu diesem Ende drückt er $2n-1$ von den Variabeln x_1, x_2, ..., x_{2n} durch die übrige x_m und durch $2n-1$ neue Gröfsen a_1, a_2, . . ., a_{2n-1} aus, wo a_1, a_2, ..., a_{2n-1} gewisse Functionen von x_1, x_2, ..., x_{2n} sind. Nach solcher Substitution verwandelt sich die Gleichung:

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_{2n} \partial x_{2n}$$

immer in eine andere von der Form:

$$U \partial x_m + A_1 \partial a_1 + A_2 \partial a_2 + \ldots + A_{2n-1} \partial a_{2n-1} = 0,$$

wo U, A_1, A_2, ..., A_{2n-1} Functionen von x_m, a_1, a_2, ..., a_{2n-1} sind. Die Functionen a_1, a_2, ..., a_{2n-1} bestimmt nun Pfaff so, daſs $U=0$, und x_m in den Gröfsen A_1, A_2, ..., A_{2n-1} nur in einem allen gemeinschaftlichen Factor vorkommt. Dividirt man mit diesem, so hat man die gegebene Gleichung in eine andere ähnliche, aber nur zwischen $2n-1$ Variabeln a_1, a_2, ..., a_{2n-1} verwandelt. Da dieses Verfahren nur bei einer geraden Anzahl Variabeln möglich ist, so kann man diese nicht minder auf eben die Weise in eine Gleichung zwischen nur $2n-2$ Variabeln verwandeln. Pfaff setzt daher eine dieser Variabeln einer Constante gleich, und verwandelt dann wieder die Glei-

chung zwischen den noch übrigen $2n-2$ Variabeln, in eine andere zwischen nur $2n-3$ Variabeln, deren eine er wieder einer Constante gleich setzt, und so fortfährt, bis er auf eine Gleichung zwischen nur 2 Variabeln kommt, deren Integration die letzte $n$te Gleichung mit der $n$ten willkürlichen Constante giebt. Auf diese Weise hat er die gegebene Gleichung durch ein System von n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten integrirt.

Pfaff zeigt dann weiter auf eine ähnliche Art, wie es bei den partiellen Differentialgleichungen zu geschehen pflegt, dafs man aus solcher Lösung mit n willkürlichen Constanten andere Lösungen mit willkürlichen Functionen ableiten kann. Man denke sich nemlich die n Integralgleichungen auf die Form gebracht:

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots, \quad F_n = C_n,$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_n$, die willkürlichen Constanten sind, und $F_1, F_2, \ldots, F_n$ diese nicht mehr enthalten. Denkt man sich jetzt die Gröfsen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ als Variabeln, so mufs sich, vermöge der Gleichungen

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots, \quad F_2 = C_n$$

der Ausdruck

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_{2n} \partial x_{2n}$$

in einen anderen verwandeln lassen von der Form

$$K_1 \partial C_1 + K_2 \partial C_2 + \ldots + K_n \partial C_n,$$

weil dieser Ausdruck verschwinden mufs, wenn $C_1, C_2, \ldots, C_n$ Constanten gleich gesetzt werden. Es mufs also auf identische Weise sein:

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_{2n} \partial x_{2n} = K_1 \partial F_1 + K_2 \partial F_2 + \ldots + K_n \partial F_n.$$

Dieser Ausdruck verschwindet nun aber nicht blofs, wenn $F_1, F_2, \ldots, F_n$ Constanten gleich gesetzt werden, sondern auch, indem man m der Gröfsen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ als beliebige Functionen der übrigen setzt; z. B. $F_1, F_2, \ldots, F_m$ als Functionen von $F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n$; wodurch

$$K_1 \partial F_1 + K_2 \partial F_2 + \ldots + K_n \partial F_n = \Pi_1 \partial F_{m+1} + \Pi_2 \partial F_{m+2} + \ldots + \Pi_{n-m} \partial F_n$$

wird, und alsdann die Gleichungen

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Pi_{n-m} = 0$$

hinzufügt. Hat man

F_1

$$F_1 = \psi_1(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n),$$
$$F_2 = \psi_2(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_m = \psi_m(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n)$$

gesetzt, so wird

$$\Pi_1 = K_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial F_{m+1}}\right) + \ldots + K_m\left(\frac{\partial\psi_m}{\partial F_{m+1}}\right) + K_{m+1},$$
$$\Pi_2 = K_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial F_{m+2}}\right) + \ldots + K_m\left(\frac{\partial\psi_m}{\partial F_{m+2}}\right) + K_{m+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Pi_{n-m} = K_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial F_n}\right) + \ldots + K_m\left(\frac{\partial\psi_m}{\partial F_n}\right) + K_n,$$

und die gegebene Gleichung

$$X_1\partial x_1 + X_2\partial x_2 + \ldots + X_{2n}\partial x_{2n} = 0$$

wird auch integrirt durch das System der n Gleichungen

$$F_1 = \psi_1(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n),$$
$$F_2 = \psi_2(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_m = \psi_m(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n),$$
$$\Pi_1 = 0,\ \Pi_2 = 0,\ \ldots,\ \Pi_{n-m} = 0.$$

Endlich erhält man noch eine Lösung, wenn man

$$K_1 = 0,\ K_2 = 0,\ \ldots,\ K_n = 0$$

setzt, was mit derjenigen, wo man $F_1, F_2, \ldots, F_n$ willkürlichen Constanten gleich setzt, gewissermafsen die beiden extremen Fälle bildet, welche der sogenannten singulären und vollständigen Lösung bei den partiellen Differentialgleichungen, die übrigen aber den sogenannten allgemeinen Lösungen entsprechen. Alle diese Lösungen haben einen bestimmten, unter sich verschiedenen Character, und man wird z. B. nie die ursprüngliche Lösung mit n willkürlichen Constanten erhalten können, indem man Functionen mit n Constanten für die willkürlichen Functionen annimmt. Pfaff hat nur diejenige Lösung angegeben, wo man eine der Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ als Function der übrigen setzt.

2.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dafs alles auf eine allgemeine Methode, die Functionen a, $a_2, \ldots, a_{2n-1}$ jedesmal zu bestimmen, ankommt, welches wir jetzt nach Pfaffs Anleitung unternehmen wollen.

Es sei also die Gleichung:

$$0 = X\partial x + X_1\partial x_1 + X_2\partial x_2 + \ldots + X_p\partial x_p$$

gegeben. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_p$ gewisse Functionen von $x, x_1, x_2, \ldots, x_p$, und man denke sich $x_1, x_2, \ldots, x_p$ durch diese und durch x ausgedrückt. Die unter dieser Voraussetzung nach $x, a_1, a_2, \ldots, a_p$ genommenen partiellen Differentiale werde ich ohne Klammern bezeichnen, so dafs also z. B.

$$\frac{\partial X}{\partial a_1} = \left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right).\frac{\partial x_1}{\partial a_1} + \left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\right).\frac{\partial x_2}{\partial a_1} + \ldots + \left(\frac{\partial X}{\partial x_p}\right).\frac{\partial x_p}{\partial a_1}.$$

Die gegebene Gleichung

$$0 = X\partial x + X_1\partial x_1 + X_2\partial x_2 + \ldots + X_p\partial x_p,$$

verwandelt sich demnach in folgende:

$$0 = U\partial x + A_1\partial a_1 + A_2\partial a_2 + \ldots + A_p\partial a_p,$$

wo

$$U = X + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial x},$$

$$A_1 = X_1\frac{\partial x_1}{\partial a_1} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial a_1} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial a_1},$$

$$A_2 = X_1\frac{\partial x_1}{\partial a_2} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial a_2} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial a_2},$$

. . . . . .

$$A_p = X_1\frac{\partial x_1}{\partial a_p} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial a_p} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial a_p}.$$

Man setze nun zuerst:

$$U = X + X_1\frac{\partial x'}{\partial x} + X_2\frac{\partial x''}{\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial x} = 0.$$

Damit ferner x in $A_1, A_2, \ldots, A_p$ nur in einem allen gemeinschaftlichen Factor M vorkomme, mufs man haben:

$$\frac{1}{A_1}.\frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{1}{A_2}.\frac{\partial A_2}{\partial x} = \ldots = \frac{1}{A_p}.\frac{\partial A_p}{\partial x} = \frac{1}{U}.\frac{\partial U}{\partial x}, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial \log A_1}{\partial x} = \frac{\partial \log A_2}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial \log A_p}{\partial x} = \frac{\partial \log U}{\partial x}.$$

Es sei nun

$$A = X_1\frac{\partial x_1}{\partial a} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial a},$$

aus welchem Ausdruck man die verschiedenen Werthe von $A_1, A_2, \ldots, A_p$ erhält, wenn man für a nach einander $a_1, a_2, \ldots, a_p$ setzt, so hat man:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial X_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial X_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial X_p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial a}$$
$$+ X_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial a\,\partial x} + X_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial a\,\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial^2 x_p}{\partial a\,\partial x}.$$

Aus der Gleichung

$$0 = X + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial x},$$

folgt aber, wenn man sie nach a differentiirt,

$$X_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial a\,\partial x} + X_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial a\,\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial^2 x_p}{\partial a\,\partial x} =$$
$$-\left\{\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial X_1}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial X_p}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}.$$

Nun hat man:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial X_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial X_p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial a} =$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$
$$+ \frac{\partial x_2}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+ \frac{\partial x_p}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X_p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}.$$

Ferner

$$\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial X_1}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial X_p}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x} =$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$
$$+ \frac{\partial x_2}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_2}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+ \frac{\partial x_p}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x_p}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}.$$

Die Differenz beider Ausdrücke giebt $\frac{\partial A}{\partial x}$. Man setze der Kürze wegen $\left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}\right) - \left(\frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}\right) = (\alpha, \beta)$, wo also $(\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) = 0$, und z. B.

$$(0, 1) = \left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right) - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right):$$

so erhält man $\frac{\partial A}{\partial x} =$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial a}\left\{(1,0) + \quad * \quad + (1,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + (1,3)\frac{\partial x_3}{\partial x} + \ldots + (1,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}\\
&+\frac{\partial x_2}{\partial a}\left\{(2,0) + (2,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + \quad * \quad + (2,3)\frac{\partial x_3}{\partial x} + \ldots + (2,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}\\
&+\frac{\partial x_3}{\partial a}\left\{(3,0) + (3,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (3,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \quad * \quad + \ldots + (3,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{\partial x_p}{\partial a}\left\{(p,0) + (p,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (p,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \quad * \quad \right\}.
\end{aligned}\right.$$

Setzt man für a nach einander $a_1, a_2, \ldots, a_p$, so erhält man aus dieser Formel die verschiedenen Ausdrücke für $\frac{\partial A_1}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial A_p}{\partial x}$. Nun soll, welche der Gröfsen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ man für a setze, immer sein $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A}{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} = NA$, wenn man der Kürze halber $\frac{\partial \log U}{\partial x} = N$ setzt, oder

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial x_1}{\partial a}.NX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial a}.NX_2 + \ldots + \frac{\partial x_p}{\partial a}.NX_p,$$

welches der Fall sein wird, sobald die Coëfficienten von $\frac{\partial x_1}{\partial a}, \frac{\partial x_2}{\partial a}, \ldots$ $\ldots, \frac{\partial x_p}{\partial a}$, in beiden für $\frac{\partial A}{\partial x}$ gefundenen Ausdrücken respective gleich sind. Man erhält hieraus die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
NX_1 &= (1,0) + \quad * \quad + (1,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (1,p)\frac{\partial x_p}{\partial x},\\
NX_2 &= (2,0) + (2,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + \quad * \quad + \ldots + (2,p)\frac{\partial x_p}{\partial x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
NX_p &= (p,0) + (p,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (p,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + \quad * \quad
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial x}$ und addirt, so erhält man

$$\begin{aligned}
&N\left\{X_1\frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}\\
&= (1,0)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (2,0)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (p,0)\frac{\partial x_p}{\partial x},
\end{aligned}$$

indem alle übrigen Glieder sich aufheben, oder da

$$0 = X + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial x},$$

die Gleichung:

$$NX = (0,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (0,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (0,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}.$$

Man erhält auf diese Weise $p+1$ lineäre Gleichungen zwischen den $p+1$ unbekannten Gröfsen N, $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$.

Es hat sich also alles auf blofse Relationen zwischen den nach x genommenen Differentialen $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$ reducirt. Nun erhellet, dafs wenn man aus den aufgestellten Gleichungen für $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$ resp. die Werthe $\frac{V_1}{V}$, $\frac{V_2}{V}$, ..., $\frac{V_p}{V}$ findet, die gesuchten Functionen a_1, a_2, ..., a_p diejenigen Functionen sind, welche bei Integration der Gleichungen:

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \ldots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p,$$

den p willkürlichen Constanten gleich gesetzt werden. Denn indem man nur die partiellen Differentiale nach x sucht, setzt man eben a_1, a_2, ..., a_p constant. In diesem Falle aber erhält man:

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \ldots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p,$$

oder

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{V_1}{V},\ \frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{V_2}{V},\ \ldots,\ \frac{\partial x_p}{\partial x} = \frac{V_p}{V},$$

wie verlangt wurde. Findet man also aus den gefundenen $p+1$ Gleichungen die Werthe von V, V_1, V_2, ..., V_p, so giebt die Integration der Gleichungen:

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \ldots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p,$$

die gesuchten Functionen a_1, a_2, ..., a_p.

3.

Die Gleichungen, aus denen man $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$ zu suchen hat, sind dem Obigen zufolge, wenn man mit ∂x multiplicirt:

$$\text{A.}\quad \begin{cases} NX\partial x = \quad * \quad + (0,1)\partial x_1 + (0,2)\partial x_2 + \ldots + (0,p)\partial x_p, \\ NX_1\partial x = (1,0)\partial x + \quad * \quad + (1,2)\partial x_2 + \ldots + (1,p)\partial x_p, \\ NX_2\partial x = (2,0)\partial x + (2,1)\partial x_1 + \quad * \quad + \ldots + (2,p)\partial x_p, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ NX_p\partial x = (p,0)\partial x + (p,1)\partial x_1 + (p,2)\partial x_2 + \ldots + \quad * \end{cases}$$

so erhält man $\frac{\partial A}{\partial x} =$

$$\left\{\frac{\partial x_1}{\partial a}\left\{(1,0) + * + (1,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + (1,3)\frac{\partial x_3}{\partial x} + \ldots + (1,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}\right.$$
$$+ \frac{\partial x_2}{\partial a}\left\{(2,0) + (2,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + * + (2,3)\frac{\partial x_3}{\partial x} + \ldots + (2,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$
$$+ \frac{\partial x_3}{\partial a}\left\{(3,0) + (3,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (3,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + * + \ldots + (3,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left.+ \frac{\partial x_p}{\partial a}\left\{(p,0) + (p,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (p,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + *\right\}\right.$$

Setzt man für a nach einander $a_1, a_2, \ldots, a_p$, so erhält man aus dieser Formel die verschiedenen Ausdrücke für $\frac{\partial A_1}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial A_p}{\partial x}$. Nun soll, welche der Gröfsen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ man für a setze, immer sein $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A}{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} = NA$, wenn man der Kürze halber $\frac{\partial \log U}{\partial x} = N$ setzt, oder

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial x_1}{\partial a}.NX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial a}.NX_2 + \ldots + \frac{\partial x_p}{\partial a}.NX_p,$$

welches der Fall sein wird, sobald die Coëfficienten von $\frac{\partial x_1}{\partial a}, \frac{\partial x_2}{\partial a}, \ldots$ $\ldots, \frac{\partial x_p}{\partial a}$, in beiden für $\frac{\partial A}{\partial x}$ gefundenen Ausdrücken respective gleich sind. Man erhält hieraus die Gleichungen:

$$NX_1 = (1,0) + * + (1,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (1,p)\frac{\partial x_p}{\partial x},$$
$$NX_2 = (2,0) + (2,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + * + \ldots + (2,p)\frac{\partial x_p}{\partial x},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$NX_p = (p,0) + (p,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (p,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + *$$

Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial x}$ und addirt, so erhält man

$$N\left\{X_1\frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$
$$= (1,0)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (2,0)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (p,0)\frac{\partial x_p}{\partial x},$$

indem alle übrigen Glieder sich aufheben, oder da

$$0 = X + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial x},$$

die Gleichung:

$$NX = (0,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (0,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (0,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}.$$

Man erhält auf diese Weise $p+1$ lineäre Gleichungen zwischen den $p+1$ unbekannten Gröfsen N, $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$.

Es hat sich also alles auf blofse Relationen zwischen den nach x genommenen Differentialen $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$ reducirt. Nun erhellet, dafs wenn man aus den aufgestellten Gleichungen für $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$ resp. die Werthe $\frac{V_1}{V}$, $\frac{V_2}{V}$, ..., $\frac{V_p}{V}$ findet, die gesuchten Functionen a_1, a_2, ..., a_p diejenigen Functionen sind, welche bei Integration der Gleichungen:

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \ldots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p,$$

den p willkürlichen Constanten gleich gesetzt werden. Denn indem man nur die partiellen Differentiale nach x sucht, setzt man eben a_1, a_2, ..., a_p constant. In diesem Falle aber erhält man:

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \ldots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p,$$

oder

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{V_1}{V},\ \frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{V_2}{V},\ \ldots,\ \frac{\partial x_p}{\partial x} = \frac{V_p}{V},$$

wie verlangt wurde. Findet man also aus den gefundenen $p+1$ Gleichungen die Werthe von V, V_1, V_2, ..., V_p, so giebt die Integration der Gleichungen:

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \ldots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p,$$

die gesuchten Functionen a_1, a_2, ..., a_p.

3.

Die Gleichungen, aus denen man $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$ zu suchen hat, sind dem Obigen zufolge, wenn man mit ∂x multiplicirt:

$$\text{A.}\begin{cases} NX\partial x = \quad * \quad + (0,1)\partial x_1 + (0,2)\partial x_2 + \ldots + (0,p)\partial x_p, \\ NX_1\partial x = (1,0)\partial x + \quad * \quad + (1,2)\partial x_2 + \ldots + (1,p)\partial x_p, \\ NX_2\partial x = (2,0)\partial x + (2,1)\partial x_1 + \quad * \quad + \ldots + (2,p)\partial x_p, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ NX_p\partial x = (p,0)\partial x + (p,1)\partial x_1 + (p,2)\partial x_2 + \ldots + \quad * \end{cases}$$

Findet man aus diesen Gleichungen:

$$\partial x = \frac{NV\partial x}{\triangle},\ \partial x_1 = \frac{NV_1\partial x}{\triangle},\ \ldots,\ \partial x_p = \frac{NV_p\partial x}{\triangle},\ \text{so wird:}$$

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \ldots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p.$$

Ferner erhält man $N = \frac{\triangle}{V}$.

Die Gleichungen (A) haben sehr merkwürdige Eigenschaften. Das Characteristische derselben ist, dafs die Verticalreihen der Coefficienten gerade das Negative der Horizontalreihen sind; daher auch diejenigen Glieder, in welchen die $m$te Horizontalreihe und die $m$te Verticalreihe zusammentreffen, verschwinden, wie es durch die in der Diagonale sich befindenden Sternchen anschaulich wird. Aus dieser Eigenschaft folgt zunächst, dafs $p+1$, oder die Anzahl der Variabeln x, x_1, x_2, ..., x_p, eine gerade Zahl sein mufs. Es ist nemlich bekannt, dafs man bei jedem System von n Gleichungen zwischen n unbekannten Gröfsen, darauf zu sehen hat, ob nicht der den Werthen der Unbekannten gemeinsame Nenner, welchen Gaufs in den *Disquis. Arithm.* mit dem Namen Determinante bezeichnet, verschwinden könne; welches ein Zeichen ist, dafs das System der n Gleichungen nicht bestehen kann, wofern nicht etwa eine Bedingungsgleichung zwischen den Constanten Statt findet, vermöge welcher die $n$te Gleichung eine Folge der übrigen $n-1$ Gleichungen ist. Nun bleibt nach dem bekannten Algorithmus, nach welchem die Determinante gebildet wird, diese unverändert, wenn man die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coefficienten mit einander vertauscht. Für unsern besondern Fall nun wird, wenn wir die Determinante mit $\triangle$ bezeichnen, hieraus folgen: $\triangle = (-1)^{p+1}\triangle$, da jedes Glied der Determinante ein Product aus $p+1$ Coefficienten ist, von denen jeder durch Vertauschung der Horizontal- und Verticalreihen sich in sein Negatives verwandelt. Diese Gleichung $\triangle = (-1)^{p+1}\triangle$ aber kann nur bestehen, wenn $p+1$ eine gerade Zahl ist, wofern nicht $\triangle = 0$ sein soll.

Ich will jetzt einige specielle Fälle entwickeln.

Für $p+1 = 4$, erhält man:

$$\begin{aligned}
V &= \ * \ + (2,3)X_1 + (3,1)X_2 + (1,2)X_3,\\
V_1 &= (3,2)X + \ * \ + (0,3)X_2 + (2,0)X_3,\\
V_2 &= (1,3)X + (3,0)X_1 + \ * \ + (0,1)X_3,\\
V_3 &= (2,1)X + (0,2)X_1 + (1,0)X_2 + \ *\\
\triangle &= (0,1)(3,2) + (0,3)(2,1) + (0,2)(1,3).
\end{aligned}$$

Für $p+1=6$, erhält man, wenn man, der Kürze wegen, mit $(1,2,3,4)$ den Ausdruck

$$(1,2)(3,4)+(1,3)(4,2)+(1,4)(2,3)$$

bezeichnet, und nach diesem Typus die ähnlichen Ausdrücke bildet:

$$V=\ *\ +(2,3,4,5)X_1+(3,4,5,1)X_2+(4,5,1,2)X_3+(5,1,2,3)X_4+(1,2,3,4)X_5,$$
$$V_1=(3,2,4,5)X+\ *\ +(4,3,5,0)X_2+(5,4,0,2)X_3+(0,5,2,3)X_4+(2,0,3,4)X_5,$$
$$V_2=(1,3,4,5)X+(3,4,5,0)X_1+\ *\ +(4,5,0,1)X_3+(5,0,1,3)X_4+(0,1,3,4)X_5,$$
$$V_3=(2,1,4,5)X+(4,2,5,0)X_1+(5,4,0,1)X_2+\ *\ +(0,5,1,2)X_4+(1,0,2,4)X_5,$$
$$V_4=(1,2,3,5)X+(2,3,5,0)X_1+(3,5,0,1)X_2+(5,0,1,2)X_3+\ *\ +(0,1,2,3)X_5,$$
$$V_5=(2,1,3,4)X+(3,2,4,0)X_1+(4,3,0,1)X_2+(0,4,1,2)X_3+(1,0,2,3)X_4+\ *$$

Um die allgemeine Bildungsweise dieser Ausdrücke auseinander zu setzen, werde ich sagen, dafs man einen Typus einen Cyclus durchlaufen lasse, indem man für die Zahlenelemente 0, 1, 2, ..., p, aus denen er gebildet ist, nach einander resp. setzt:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.,\ p-1,\ p,$$
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.,\ p,\ 0,$$
$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots.,\ 0,\ 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p-1,\ p,\ 0,\ 1,\ \ldots.,\ p-3,\ p-2,$$
$$p,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.,\ p-2,\ p-1.$$

Man erhält so, wie man an dem letzten Beispiele sehen kann, den Ausdruck, welcher V_m gleich ist, aus einem seiner Glieder, indem man es den Cyclus durchlaufen läfst, nachdem man aus der Zahlenreihe 0, 1, 2, ..., p die Zahl m fortgelassen hat, wobei zu bemerken ist, dafs man das Gleiche auch mit dem Index von X zu thun hat. So erhält man aus dem Gliede $(3,2,4,5)X_0$ in dem für V_1 gefundenen Ausdruck die übrigen, indem man für 0, 2, 3, 4, 5 nacheinander setzt 2, 3, 4, 5, 0; 3, 4, 5, 0, 2; 4, 5, 0, 2, 3; 5, 0, 2, 3, 4. Ferner erhält man aus dem ganzen für V_m gefundenen Ausdruck immer den folgenden für V_{m+1}, wenn man für 0, 1, 2, 3, ..., p resp. setzt, 1, 2, 3, ..., p, 0, und in dem mit einer Klammer bezeichneten Typus die beiden ersten Elemente versetzt. So erhält man aus dem Gliede $(1,0,2,4)X_5$ in V_3, indem man für 0, 1, 2, 3, 4, 5, resp. 1, 2, 3, 4, 5, 0 setzt, das Glied $(2,1,3,5)X$, und indem man die beiden ersten Elemente in (2, 1, 3, 5) versetzt, das Glied $(1,2,3,5)X$, welches das erste Glied in dem für V_4 gefundenen Ausdruck ist. —

Es bleibt noch übrig, die Bildung eines solchen Typus, wie (1, 2, 3, 4) anzugeben. Setzt man für $p+1$ Elemente den Coefficienten von

X_1 in V gleich $(2, 3, 4, 5, \ldots, p-1, p)$, so wird $(2, 3, \ldots, p)$ aus $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p-2$ Gliedern bestehen. Das erste von diesen wird:

$$(2, 3) . (4, 5) . (6, 7) \ldots . (p-1, p).$$

Aus diesem bilde man $p-2$, indem man die letzten $p-2$ Elemente $3, 4, \ldots, p$ einen Cyclus durchlaufen läfst. Aus jedem dieser $p-2$ Glieder bilde man $p-4$, indem man die letzten $p-4$ Elemente $5, 6, \ldots \ldots, p$ einen Cyclus durchlaufen läfst, u. s. w., bis zuletzt die drei letzten Elemente $p-2$, $p-1$, p den Cyclus zu durchlaufen haben. Auf diese Weise erhält man z. B.

$$\begin{aligned}(2, 3, 4, 5, 6, 7) = \\ (2,3).(4,5).(6,7) + (2,3).(4,6).(7,5) + (2,3).(4,7).(5,6) \\ + (2,4).(5,6).(7,3) + (2,4).(5,7).(3,6) + (2,4).(5,3).(6,7) \\ + (2,5).(6,7).(3,4) + (2,5).(6,3).(4,7) + (2,5).(6,4).(7,3) \\ + (2,6).(7,3).(4,5) + (2,6).(7,4).(5,3) + (2,6).(7,5).(3,4) \\ + (2,7).(3,4).(5,6) + (2,7).(3,5).(6,4) + (2,7).(3,6).(4,5).\end{aligned}$$

Ist $p+1$ eine ungerade Zahl, so haben wir gesehen, dafs immer eine Bedingungsgleichung Statt finden mufs, wenn die Gleichungen (A) möglich sein sollen, oder wenn man die Gleichung

$$0 = X\partial x + X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_p \partial x_p,$$

auf eine ähnliche Gleichung zwischen nur p Variabeln soll zurückführen können. Für $p+1 = 3$ wird diese Bedingungsgleichung

$$X(1, 2) + X_1(2, 0) + X_2(0, 1) = 0;$$

welches die bekannte Conditio integrabilitatis ist.

Für $p+1 = 5$ wird sie

$$X(1,2,3,4) + X_1(2,3,4,0) + X_2(3,4,0,1) + X_3(4,0,1,2) + X_4(0,1,2,3) = 0.$$

Allgemein, wenn $p+1$ eine ungerade Zahl ist, wird sie

$$\Sigma X(1, 2, 3, \ldots, p) = 0,$$

wo man aus $X(1, 2, 3, \ldots, p)$ die sämmtlichen Glieder des mit Σ bezeichneten Aggregats bildet, indem man $0, 1, 2, \ldots, p$ einen Cyclus durchlaufen läfst. Dies ist also die Bedingungsgleichung, dafs die Gleichung

$$0 = X\partial x + X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_p \partial x_p,$$

wo p eine gerade Zahl ist, durch ein System von $\frac{p}{2}$ Gleichungen integrirt werden könne.

Die Aufstellung und Behandlung der Gleichungen (A) in der eleganten und vollkommen symmetrischen Form, wie sie hier gegeben sind,

ist

ist das Eigenthümliche und der eigentliche Zweck dieser Abhandlung; doch mufste, des Zusammenhanges wegen, auch das Uebrige der Pfaffschen Methode kürzlich dargestellt werden. Es haben diese Gleichungen grofse Aehnlichkeit mit derjenigen bekannten Art, wo die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coefficienten dieselben sind, welchen man in sehr vielen analytischen Untersuchungen, unter andern auch bei der Methode der kleinsten Quadrate, begegnet. In den für V, V_1 etc. gefundenen Ausdrücken sind die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coefficienten von X, X_1 etc. wieder das Negative von einander, so wie in den Resultaten, welche dort die Auflösung giebt, beide Reihen wieder dieselben sind. Wendet man den von Gaufs in der Abhandlung über die elliptischen Elemente der Pallas gegebenen Algorithmus auf unser System an, so sieht man, wie mit grofser Leichtigkeit immer zwei Gröfsen auf einmal eliminirt werden können, und wie die neuen Gleichungen, deren Anzahl um zwei kleiner ist, wieder dieselbe Form erhalten. Dieses macht, dafs man ein solches System Gleichungen mit grofser Rapidität auflösen kann.

Zusatz. Nach Beendigung dieser Abhandlung bemerkte ich, dafs die Gleichungen, auf welche Lagrange und Poisson in ihren berühmten Arbeiten über die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik gekommen sind, eben solches System bilden, wie wir hier näher erörtert haben. Man sehe das 15te Heft des polytechnischen Journals S. 288. 89. Da die Pfaffsche Methode ebenfalls auf Variation der Constanten beruht, so scheint dieses System von Gleichungen vorzugsweise bei der Methode der Variation der Constanten vorzukommen.

Den 14ten August 1827.

36.

Summirung der Reihe

$$1+\frac{x}{z}+\frac{x(x-1)}{z(z-1)}+\frac{x(x-1)(x-2)}{z(z-1)(z-2)}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{z(z-1)(z-2)(z-3)}+\ldots.$$

(Vom Herrn Dr. *J. A. Grunert* zu Torgau.)

1.

Obgleich diese Reihe schon auf verschiedene Arten summirt worden ist, worüber man Klügels mathem. Wörterbuch Thl. IV. S. 570. 776. 805. vergleichen kann, so glaube ich doch, dafs auch folgendes Verfahren einige Aufmerksamkeit verdient, da sich durch dasselbe die Summe für jedes x und z durch eine ganz allgemeine Rechnung ergiebt.

2.

Man setze:

$$\begin{aligned}
x^n &= \overset{1}{A}_n x \\
&+ \overset{2}{A}_n x(x-1) \\
&+ \overset{3}{A}_n x(x-1)(x-2) \\
&+ \overset{4}{A}_n x(x-1)(x-2)(x-3) \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&+ \overset{n-1}{A}_n x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-n+2) \\
&+ \overset{n}{A}_n x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-n+2)(x-n+1),
\end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= \overset{1}{A}_n x^2 \\
&+ \overset{2}{A}_n x^2(x-1) \\
&+ \overset{3}{A}_n x^2(x-1)(x-2) \\
&+ \overset{4}{A}_n x^2(x-1)(x-2)(x-3) \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&+ \overset{n-1}{A}_n x^2(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-n+2) \\
&+ \overset{n}{A}_n x^2(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-n+2)(x-n+1).
\end{aligned}$$

Aber

$$x^2 = x + x(x-1),$$

$$\begin{aligned} x^2(x-1) &= x(x-1) + x(x-1)^2 \\ &= x(x-1) + x(x-1) + x(x-1)(x-2) \\ &= 2x(x-1) + x(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2(x-1)(x-2) &= 2x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)^2 \\ &= 2x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= 3x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2(x-1)(x-2)(x-3) &= 3x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2)(x-3)^2 \\ &= 3x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &\quad + x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= 4x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4). \end{aligned}$$

Die Art, wie die Rechnung weiter fortgeführt werden kann, und das Gesetz liegen unzweideutig vor Augen. Also ist:

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \overset{1}{A}_n\{x + x(x-1)\} \\ &\quad + \overset{2}{A}_n\{2x(x-1) + x(x-1)(x-2)\} \\ &\quad + \overset{3}{A}_n\{3x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)\} \\ &\quad + \overset{4}{A}_n\{4x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\} \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\quad + \overset{n-1}{A}_n\{(n-1)x(x-1)\ldots.(x-n+2) + x(x-1)(x-2)\ldots.(x-n+1)\} \\ &\quad + \overset{n}{A}_n\{nx(x-1)(x-2)\ldots.(x-n+1) + x(x-1)(x-2)\ldots.(x-n)\} \\ &= \overset{1}{A}_n x \\ &\quad + \{\overset{1}{A}_n + 2\overset{2}{A}_n\}x(x-1) \\ &\quad + \{\overset{2}{A}_n + 3\overset{3}{A}_n\}x(x-1)(x-2) \\ &\quad + \{\overset{3}{A}_n + 4\overset{4}{A}_n\}x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\quad + \{\overset{n-1}{A}_n + n\overset{n}{A}_n\}x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-n+1) \\ &\qquad + \overset{n}{A}_n x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-n) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overset{1}{A}_{n+1}\, x \\
&+ \overset{2}{A}_{n+1}\, x(x-1) \\
&+ \overset{3}{A}_{n+1}\, x(x-1)(x-2) \\
&+ \overset{4}{A}_{n+1}\, x(x-1)(x-2)(x-3) \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&+ \overset{n}{A}_{n+1}\, x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-n+1) \\
&+ \overset{n+1}{A}_{n+1}\, x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-n),
\end{aligned}
$$

so dafs man also folgende Gleichungen zwischen den Coefficienten von x^n und x^{n+1} erhält:

$$
\begin{aligned}
\overset{1}{A}_{n+1} &= \overset{1}{A}_n \\
\overset{2}{A}_{n+1} &= \overset{1}{A}_n + 2\overset{2}{A}_n \\
\overset{3}{A}_{n+1} &= \overset{2}{A}_n + 3\overset{3}{A}_n \\
\overset{4}{A}_{n+1} &= \overset{3}{A}_n + 4\overset{4}{A}_n \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\overset{n}{A}_{n+1} &= \overset{n-1}{A}_n + n\overset{n}{A}_n \\
\overset{n+1}{A}_{n+1} &= \overset{n}{A}_n.
\end{aligned}
$$

3.

Ferner setze man

$$
\frac{1}{(z-1)(z-2)\ldots.(z-n)} = \overset{n}{B}_1\frac{1}{z^n} + \overset{n}{B}_2\frac{1}{z^{n+1}} + \overset{n}{B}_3\frac{1}{z^{n+2}} + \ldots.
$$

$$
\ldots. + \overset{n}{B}_m\frac{1}{z^{n+m-1}} + \overset{n}{B}_{m+1}\frac{1}{z^{n+m}} + \ldots.
$$

$$
\frac{1}{(z-1)(z-2)\ldots.(z-n-1)} = \overset{n+1}{B}_1\frac{1}{z^{n+1}} + \overset{n+1}{B}_2\frac{1}{z^{n+2}} + \overset{n+1}{B}_3\frac{1}{z^{n+3}} + \ldots.
$$

$$
\ldots. + \overset{n+1}{B}_m\frac{1}{z^{n+m}} + \overset{n+1}{B}_{m+1}\frac{1}{z^{n+m+1}} + \ldots.
$$

Da man nun die erste Reihe erhalten mufs, wenn man die zweite mit $z-n-1$ multiplicirt, so ergeben sich zwischen den Coefficienten leicht folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\overset{n+1}{B}_1 &= \overset{n}{B}_1,\\
\overset{n+1}{B}_2 &= \overset{n}{B}_2 + (n+1)\overset{n+1}{B}_1,\\
\overset{n+1}{B}_3 &= \overset{n}{B}_3 + (n+1)\overset{n+1}{B}_2,\\
\overset{n+1}{B}_4 &= \overset{n}{B}_4 + (n+1)\overset{n+1}{B}_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\overset{n+1}{B}_m &= \overset{n}{B}_m + (n+1)\overset{n+1}{B}_{m-1},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Da nun immer

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \ldots,$$

also immer $\overset{1}{B}_m = 1$ ist, so erhält man aus den vorhergehenden Gleichungen, wenn man anstatt des dortigen m hier n setzt:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{B}_{n+1} &= \overset{1}{B}_n,\\
\overset{2}{B}_n &= \overset{1}{B}_n + 2\overset{2}{B}_{n-1},\\
\overset{3}{B}_{n-1} &= \overset{2}{B}_{n-1} + 3\overset{3}{B}_{n-2},\\
\overset{4}{B}_{n-2} &= \overset{3}{B}_{n-2} + 4\overset{4}{B}_{n-3},\\
&\text{u. s. f. u. s. f.}
\end{aligned}$$

Die nahe Uebereinstimmung dieser Gleichungen mit den Gleichungen in (2.) läfst eine Uebereinstimmung der durch A und B bezeichneten Coefficienten vermuthen, und es fällt augenblicklich in die Augen, dafs, wenn die beiden Reihen

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{B}_n,\ \overset{2}{B}_{n-1},\ \overset{3}{B}_{n-2},\ \overset{4}{B}_{n-3},\ \overset{5}{B}_{n-4},\ \ldots.\\
&\overset{1}{A}_n,\ \overset{2}{A}_n,\ \overset{3}{A}_n,\ \overset{4}{A}_n,\ \overset{5}{A}_n,\ \ldots.
\end{aligned}$$

identisch wären, dies auch von den beiden Reihen

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{B}_{n+1},\ \overset{2}{B}_n,\ \overset{3}{B}_{n-1},\ \overset{4}{B}_{n-2},\ \overset{5}{B}_{n-3},\ \ldots.\\
&\overset{1}{A}_{n+1},\ \overset{2}{A}_{n+1},\ \overset{3}{A}_{n+1},\ \overset{4}{A}_{n+1},\ \overset{5}{A}_{n+1},\ \ldots.
\end{aligned}$$

gelten müfste. Da nun diese Uebereinstimmung, weil $\overset{1}{B}_1 = 1$, $\overset{1}{A}_1 = 1$ ist, offenbar für $n=1$ gilt, so ist sie allgemein gültig, und man hat also folgende allgemeine Gleichung:

$$\overset{k}{A}_n = \overset{k}{B}_{n-k+1}.$$

Die Glieder, mit denen die Reihen abbrechen, sind offenbar $\overset{n}{B}_1$ und $\overset{n}{A}_n$.

4.

Um nun unserm eigentlichen Zwecke näher zu rücken, habe man die Reihe

$$1+\frac{x}{z}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{x^4}{z^4}+\ldots.=S.$$

Substituirt man für die Potenzen von x die oben gefundenen allgemeinen Ausdrücke, so erhält man mit Hülfe der vorhergehenden allgemeinen Vergleichung zwischen den Gröfsen A und B:

$$\begin{aligned}
S = 1 &\\
&+x.\frac{1}{z}\\
&+\{\overset{1}{A}_2x+\overset{2}{A}_2x(x-1)\}.\frac{1}{z^2}\\
&+\{\overset{1}{A}_3x+\overset{2}{A}_3x(x-1)+\overset{3}{A}_3x(x-1)(x-2)\}\frac{1}{z^3}\\
&+\{\overset{1}{A}_4x+\overset{2}{A}_4x(x-1)+\overset{3}{A}_4x(x-1)(x-2)+\overset{4}{A}_4x(x-1)\ldots.(x-3)\}.\frac{1}{z^4}\\
&+\{\overset{1}{A}_5x+\overset{2}{A}_5x(x-1)+\overset{3}{A}_5x(x-1)(x-2)+\overset{4}{A}_5x(x-1)\ldots.(x-3)\\
&\qquad+\overset{5}{A}_5x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\}.\frac{1}{z^5}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\\
= 1 &\\
&+x.\frac{1}{z}\\
&+\{\overset{1}{B}_2x+\overset{2}{B}_1x(x-1)\}.\frac{1}{z^2}\\
&+\{\overset{1}{B}_3x+\overset{2}{B}_2x(x-1)+\overset{3}{B}_1x(x-1)(x-2)\}.\frac{1}{z^3}\\
&+\{\overset{1}{B}_4x+\overset{2}{B}_3x(x-1)+\overset{3}{B}_2x(x-1)(x-2)+\overset{4}{B}_1x(x-1)\ldots.(x-3)\}.\frac{1}{z^4}\\
&+\{\overset{1}{B}_5x+\overset{2}{B}_4x(x-1)+\overset{3}{B}_3x(x-1)(x-2)+\overset{4}{B}_2x(x-1)\ldots.(x-3)\\
&\qquad+\overset{5}{B}_1x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\}.\frac{1}{z^5}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\\
= 1 &\\
&+x\left\{\overset{1}{B}_1\frac{1}{z}+\overset{1}{B}_2\frac{1}{z^2}+\overset{1}{B}_3\frac{1}{z^3}+\overset{1}{B}_4\frac{1}{z^4}+\overset{1}{B}_5\frac{1}{z^5}+\ldots.\right\}\\
&+x(x-1)\left\{\overset{2}{B}_1\frac{1}{z^2}+\overset{2}{B}_2\frac{1}{z^3}+\overset{2}{B}_3\frac{1}{z^4}+\overset{2}{B}_4\frac{1}{z^5}+\ldots.\right\}\\
&+x(x-1)(x-2)\left\{\overset{3}{B}_1\frac{1}{z^3}+\overset{3}{B}_2\frac{1}{z^4}+\overset{3}{B}_3\frac{1}{z^5}+\overset{3}{B}_4\frac{1}{z^6}+\ldots.\right\}\\
&+x(x-1)(x-2)(x-3)\left\{\overset{4}{B}_1\frac{1}{z^4}+\overset{4}{B}_2\frac{1}{z^5}+\overset{4}{B}_3\frac{1}{z^6}+\ldots.\right\}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und folglich nach (3.):

$$\begin{aligned} S = 1 \\ &+ x\cdot\frac{1}{z-1} \\ &+ x(x-1)\cdot\frac{1}{(z-1)(z-2)} \\ &+ x(x-1)(x-2)\cdot\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} \\ &+ x(x-1)(x-2)(x-3)\cdot\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Da nun aber nach dem binomischen Lehrsatze

$$S = 1+\left(\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{x}{z}\right)^3+\left(\frac{x}{z}\right)^4+\ldots.$$

$$= \left(1-\frac{x}{z}\right)^{-1} = \left(\frac{z-x}{z}\right)^{-1} = \frac{z}{z-x}$$

ist, so erhält man folgende merkwürdige Summe:

$$1+\frac{x}{z-1}+\frac{x(x-1)}{(z-1)(z-2)}+\frac{x(x-1)(x-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)}+\ldots. = \frac{z}{z-x}$$

oder

$$1+\frac{x}{z}+\frac{x(x-1)}{z(z-1)}+\frac{x(x-1)(x-2)}{z(z-1)(z-2)}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{z(z-1)(z-2)(z-3)}+\ldots. = \frac{z+1}{z-x+1}$$

für jedes x und z.

Ist x eine positive ganze Zahl, so bricht die Reihe ab, und man erhält den auch sonst bekannten Satz von den Binomial-Coefficienten:

$$1+\frac{x}{z}+\frac{x(x-1)}{z(z-1)}+\frac{x(x-1)(x-2)}{z(z-1)(z-2)}+\ldots.+\frac{x(x-1)\ldots.3.2.1}{z(z-1)\ldots.(z-x+1)} = \frac{z+1}{z-x+1}.$$

Nimmt man x und z negativ, so verwandelt sich die Reihe in:

$$1+\frac{x}{z}+\frac{x(x+1)}{z(z+1)}+\frac{x(x+1)(x+2)}{z(z+1)(z+2)}+\ldots. = \frac{z-1}{z-x-1}.$$

Nimmt man aber blofs x oder z negativ, so wird:

$$1-\frac{x}{z}+\frac{x(x+1)}{z(z-1)}-\frac{x(x+1)(x+2)}{z(z-1)(z-2)}+\ldots. = \frac{z+1}{z+x+1},$$

$$1-\frac{x}{z}+\frac{x(x-1)}{z(z+1)}-\frac{x(x-1)(x-2)}{z(z+1)(z+2)}+\ldots. = \frac{z-1}{z+x-1}.$$

37.

Quadratur des Mantels des senkrechten, schief abgeschnittenen Kegels.

(Von Herrn *W. Horn.*)

(Mit Bezug auf dessen Abhandlung über Keradoïden im ersten Hefte des zweiten Bandes dieses Journals.)

1.

Gleichung der Kegelschnitte, als Keradoïden betrachtet.

Es sei BSG (Fig. 4.) ein ebener Schnitt durch die Axe eines senkrechten Kegels, dessen Seiten mit der Axe einen Winkel $=\alpha$ einschliefsen; ferner AMO ein beliebiger ebener Schnitt durch den Kegel, senkrecht auf die Ebene BSG, und die Durchschnittslinie AO dieser beiden Ebenen bilde mit der Seite SG des Kegels einen beliebigen Winkel $OAG=\beta$. Die Entfernung SA sei $=e$; der Abstand $SM=SB=SG$ eines beliebigen Punctes M der, durch letzteren Schnitt in der Oberfläche des Kegels erzeugten Curve AM, vom Pole S, sei $=z$, und der Winkel ANP, den eine, durch den Punct M und die Axe SC gelegte Ebene SCM mit der Ebene BSG einschliefst, $=\psi$, so ist:

$$OG = CM.\operatorname{sinv}\psi = z.\sin\alpha.\operatorname{sinv}\psi.$$

Aber auch:

$$\begin{aligned} CG &= AD.[\operatorname{tang}(\beta-\alpha)+\operatorname{tang}\alpha] \\ &= (z-e)\cos\alpha[\operatorname{tang}(\beta-\alpha)+\operatorname{tang}\alpha]. \end{aligned}$$

Also $$z\sin\alpha.\operatorname{sinv}\psi = (z-e)\cos\alpha[\operatorname{tang}(\beta-\alpha)+\operatorname{tang}\alpha],$$

und hieraus:

$$z = e.\frac{\operatorname{tang}(\beta-\alpha)+\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}(\beta-\alpha)+\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{sinv}\psi}, \text{ oder}$$

$$\text{I.}\quad z = e.\frac{\operatorname{tang}(\beta-\alpha)+\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}(\beta-\alpha)+\operatorname{tang}\alpha.\cos\psi}.$$

Dieses ist die gesuchte Gleichung der Kegelschnitte.

Ist $\beta>2\alpha$, so entsteht die Gleichung für die Ellipse; ist $\beta<2\alpha$, so entsteht die Gleichung der Hyperbel; für $\beta=2\alpha$ erhält man die Gleichung der Parabel $\left(z=\frac{2e}{1+\cos\psi}\right)$, und für $\beta=90^\circ+\alpha$ die Gleichung für den Kreis.

2.

Setzt man die Entfernung des Durchschnittspunctes der Seite SB mit AO (Fig. 5.), von der Spitze des Kegels, also den, zum Polarwinkel $\psi = \pi$ gehörigen Polarabstand $= E$, so ist:

$$\text{tang}(\beta-\alpha) + \text{tang}\,\alpha = \frac{2E}{E-e}\,.\,\text{tang}\,\alpha, \text{ und}$$

$$\text{tang}(\beta-\alpha) = \frac{E+e}{E-e}\,\text{tang}\,\alpha.$$

Substituirt man diese Werthe in (I), so ergiebt sich die Formel:

$$\text{II.}\quad z = \frac{2Ee}{E+e+(E-e)\cos\psi}.$$

Ist E positiv, so hat man die Gleichung der Ellipse; ist E negativ, so entsteht die Gleichung der Hyperbel; ist $E=\infty$, so hat man die Gleichung der Parabel, und für $E=e$ die Gleichung für den Kreis.

3.

Quadratur des Mantels des von der Ellipse schief abgeschnittenen senkrechten Kegels.

Nach der Formel (VII) der Abhandlung über Keradoïden ist, wenn F ein beliebiges Stück dieser Fläche bedeutet:

$$\partial F = \tfrac{1}{2} z y \partial\psi = \tfrac{1}{2} z^2 \partial\psi\,.\sin\alpha;$$

oder, den Werth für z aus (I) substituirt:

$$\partial F = \frac{e^2 \sin\alpha^2\,[\text{tang}(\beta-\alpha)+\text{tang}\,\alpha]^2}{2} \cdot \frac{\partial\psi}{[\text{tang}(\beta-\alpha)+\text{tang}\,\alpha\cos\psi]^2},$$

also, nach Meier Hirsch Integraltafeln, pag. 297:

$$F = \frac{e^2\sin\alpha}{2} \cdot \frac{\text{tang}(\beta-\alpha)+\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}(\beta-\alpha)-\text{tang}\,\alpha} \cdot \Bigg[\frac{-\text{tang}\,\alpha\,.\sin\psi}{\text{tang}(\beta-\alpha)+\text{tang}\,\alpha\,.\cos\psi}$$

$$+ \frac{\text{tang}(\beta-\alpha)}{\sqrt{[\text{tang}(\beta-\alpha)^2 - \text{tang}\,\alpha^2]}}\,.\,\text{Arc cos}\,\frac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}(\beta-\alpha)\cos\psi}{\text{tang}(\beta-\alpha)+\text{tang}\,\alpha\,.\cos\psi}\Bigg],$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $\psi = 0$ das Integral verschwindet.

Für $\psi = 2\pi$ wird $\frac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}(\beta-\alpha)\cos\psi}{\text{tang}(\beta-\alpha)+\text{tang}\,\alpha\,.\cos\psi} = 1$, und es mufs $\text{Arc cos}\,1 = 2\pi$ gesetzt werden; alsdann erhält man den Mantel des schief abgeschnittenen, senkrechten Kegels:

$$F = \frac{e^2\pi\sin\alpha\,.\,\text{tang}(\beta-\alpha)}{\text{tang}(\beta-\alpha)-\text{tang}\,\alpha} \cdot \sqrt{\left(\frac{\text{tang}(\beta-\alpha)+\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}(\beta-\alpha)-\text{tang}\,\alpha}\right)};\ \text{oder}$$

$$F = \frac{e^2\pi\sin\alpha}{1-\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{cot}(\beta-\alpha)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1+\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{cot}(\beta-\alpha)}{1-\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{cot}(\beta-\alpha)}\right)}.$$

Für $\beta = 90° + \alpha$ wird $\cot(\beta - \alpha) = 0$, also $F = e^2 \pi \sin\alpha$, wie erfordert wird.

Hat E die Bedeutung wie in 2., so ist auch:

$$F = \frac{E+e}{2} . \sqrt{(E . e)} . \sin\alpha . \pi,$$

wo $\frac{E+e}{2}$ die mittlere arithmetische, und $\sqrt{(E . e)}$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen der längsten und kürzesten Seite des schief abgeschnittenen senkrechten Kegels ist.

Für $E = e$ entsteht wiederum:

$$F = e^2 \pi . \sin\alpha,$$

wie vorhin.

Ist a die halbe grofse Axe der Ellipse, und c die halbe kleine Axe derselben, so ergiebt sich leicht:

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(E^2 + e^2 - 2Ee . \cos 2\alpha)}; \text{ und}$$
$$c = \sin\alpha . \sqrt{(Ee)}.$$

Ist nun $\alpha = 90°$, so verwandelt sich der Mantel des Kegels in eine Ebene, und zwar im vorliegenden Falle in eine Ellipse, deren Axen $= 2a$ und $2c$ sind. Es wird aber für $\alpha = 90°$, $\sin\alpha = 1$ und $\cos 2\alpha = -1$, daher

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(E^2 + e^2 + 2Ee)} = \frac{E+e}{2};$$
$$c = \sqrt{(Ee)},$$

folglich nach obiger Formel der Inhalt der Ellipse:

$$F = \frac{E+e}{2} . \sqrt{(Ee)} . \sin\alpha . \pi = ac\pi;$$

wie gehörig.

38.

Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler gefundenen Sätze von Figurennetzen und Polyëdern.

(Von Herrn Dr. *J. A. Grunert* zu Torgau.)

In einem Netze geradliniger Figuren, welche in einer Ebene liegen oder nicht, sei die Anzahl sämmtlicher Seiten $= A$, die Anzahl der Eckpuncte $= S$, und die Anzahl der Figuren $= F$. Es kommt darauf an, zwischen diesen Gröfsen eine Gleichung zu finden. Zu dem Ende denke man sich, dafs zu dem Netze eine neue Figur von n Seiten hinzukomme, welche mit dem Netze n' Seiten gemein, n'' Seiten dagegen nicht gemein habe, wo aber immer $n = n' + n''$. Bezeichnet man nun in Bezug auf das neue Netz durch A', S', F' dasselbe, was A, S, F in Bezug auf das gegebene bedeuten, so erhellet augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen: $A' = A + n''$, $F' = F + 1$. Zugleich aber ist auch klar, dafs die hinzukommende Figur, welche n' Seiten mit dem gegebenen Netze gemein hat, $n' + 1$ Eckpuncte mit demselben gemein, also $n'' - 1$ Eckpuncte nicht mit demselben gemein hat, da $n = n' + n'' = (n' + 1) + (n'' - 1)$. Also ist $S' = S + n'' - 1$. Bestimmt man nun aus den erhaltenen Gleichungen n'' auf doppelte Art, und setzt $1 = F' - F$, so erhält man:

$$A' - A = S' - S + F' - F, \text{ oder}$$
$$S' + F' - A' = S + F - A,$$

woraus also erhellet, dafs $S + F - A$ für jedes Netz eine constante Gröfse ist. Für ein aus einer einzigen Figur bestehendes Netz ist nun immer $S = A$, $F = 1$. Also $S + F - A = 1$, und folglich allgemein $S + F - A = 1$, oder $S + F = A + 1$, welches der bekannte, von Cauchy gefundene Satz ist.

Der Eulersche Satz folgt hieraus unmittelbar. Nimmt man nemlich auf eine Seitenfläche eines Polyëders mit F Seitenflächen, A Kanten, S Ecken, nicht Rücksicht, so hat man ein Netz mit $F - 1$ Figuren, A Seiten, S Eckpuncten, und folglich $S + F - 1 = A + 1$; also $S + F = A + 2$, die Eulersche Gleichung.

39.
Eigenschaften der Curven, die sich auf bestimmten Oberflächen befinden.

(Von Herrn *L. Raabe* zu Wien.)

I.

Es sollen

$$x = \varphi z; \quad y = \psi z$$

die Gleichungen irgend einer Curve sein, und

$$F(x, y, z, a, b, c, \text{etc.}) = 0$$

die Gleichung einer krummen Oberfläche, wo die Gröfsen a, b, c, etc. die Constanten der Fläche vorstellen, so hat man, wenn die Curve und die Fläche einen Punct gemein haben, folgende blofs von z abhängige Gleichung:

$$F(\varphi z, \psi z, z, a, b, c, \text{etc.}) = 0,$$

aus welcher man z, und dann, vermittelst der zwei gegebenen Gleichungen der Curve auch die beiden anderen Coordinaten x und y des gemeinschaftlichen Punctes finden kann.

Wir wollen der Kürze wegen das Glied der letzten Gleichung, welches z enthält, durch fz bezeichnen, so dafs die letzte Gleichung durch

$$fz = 0$$

vorgestellt wird.

Haben nun die gegebene Curve und Fläche überdies noch einen Punct gemeinschaftlich, dessen Coordinaten $z+k$, $\varphi(z+k)$, $\psi(z+k)$ seyn mögen, so darf man, um diese Bedingung analytisch auszudrücken, in der letzten Gleichung, die Gröfse z in $z+k$ übergehen lassen, woraus, wegen des allgemeinen Werthes von z, folgende Reihe:

$$0 = fz + kf'z + \frac{k^2}{1.2}f''z + \frac{k^3}{1.2.3}f'''z + \text{etc.}$$

folgt.

Die Gröfsen $f'z$, $f''z$, $f'''z$, etc. sind in dem Sinne zu nehmen, wie sie Lagrange gebraucht hat.

Soll nun k eine unbestimmte Gröfse bedeuten, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$fz = 0,\quad f'z = 0,\quad f''z = 0,\quad f'''z = 0,\ \text{etc.},$$

welche sämmtlich bestehen müssen, wenn k einen beliebigen Werth soll haben können, d. h. es müssen sämmtliche Gleichungen, ins Unendliche fortgesetzt, bestehen, wenn die vorgelegte Curve jeden Punct mit der vorgelegten Fläche gemeinschaftlich haben soll.

Ist nun die Anzahl der Constanten a, b, c, etc., welche die Fläche enthält, gleich n, so lassen sich dieselben durch die n ersten der letzteren Gleichungen bestimmen, und die so gefundenen Werthe der Constanten an die Stelle der in $f^{(n)}z$ enthaltenen Constanten substituirt, ergiebt sich ein Ausdruck, der blofs von z abhängt und identisch Null ist. Von diesem Ausdrucke die nächsten Differentiale genommen, müssen der Form nach mit den Ausdrücken $f^{(n+1)}z$, $f^{(n+2)}z$, etc. identisch sein, und verschwinden, wenn man in diesen letzteren für die in denselben noch vorkommenden Constanten die oben gefundenen Werthe substituirt.

Es ist mithin:

$$f^{(n)}z = 0,$$

wenn man in dem Theile rechts des Gleichheitszeichens für die in demselben vorkommenden Constanten die Werthe substituirt, die man aus den vorangegangenen Gleichungen $fz = 0$, $f'z = 0$, $f''z = 0$ etc. bis $f^{(n-1)}z = 0$ gezogen hat, die einzige nöthige Bedingungsgleichung, damit die vorgelegte Curve sich auf einer Oberfläche soll befinden können.

Um das bisher Vorgetragene durch ein Beispiel zu erläutern, will ich die Bedingungsgleichung $f^{(n)}z = 0$ für den Fall suchen, wo die Oberfläche eine Ebene ist. Je nachdem diese Bedingungsgleichung für eine gegebene Curve Statt hat oder nicht, wird die Curve eben sein oder von doppelter Krümmung.

Es sei die Gleichung der Ebene oder

$$F(x, y, z, a, b, c, \text{etc.}) = ax + by + cz + 1 = 0,$$

so hat man:

$$fz = a\varphi z + b\psi z + cz + 1 = 0$$

und

$$f'z = a\varphi' z + b\psi' z + c = 0,$$

$$f''z = a\varphi'' z + b\psi'' z = 0.$$

Aus diesen Gleichungen a, b, c bestimmt und in

$$f'''z = a\varphi''' z + b\psi''' z = 0$$

die gefundenen Werthe von a und b substituirt, ist die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$\varphi'' z . \psi''' z - \varphi''' z . \psi'' z = 0,$$

welcher Genüge geschehen mufs, damit die Curve, welche durch die Gleichungen

$$x = \varphi z \text{ und } y = \psi z$$

vorgestellt wird, eine ebene sei.

Diese aufgestellte Bedingungsgleichung wollen wir auf einige Curven anwenden.

Aufgabe 1. Man untersuche, ob die Curve, deren Gleichungen

$$x = Az \pm B\sqrt{(C^2 - z^2)} \text{ und } y = az \pm b\sqrt{(C^2 - z^2)}$$

sind, eine ebene sei oder nicht.

Hier hat man

$$\varphi z = Az \pm B\sqrt{(C^2 - z^2)} \quad \text{und} \quad \psi z = az \pm b\sqrt{(C^2 - z^2)},$$
$$\varphi' z = A \mp Bz(C^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad - \quad \psi' z = a \mp bz(C^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\varphi'' z = \mp BC^2(C^2 - z^2)^{-\frac{3}{2}} \quad - \quad \psi'' z = \mp bC^2(C^2 - z^2)^{-\frac{3}{2}},$$
$$\varphi''' z = \pm 3BC^2 z(C^2 - z^2)^{-\frac{5}{2}} \quad - \quad \psi''' z = \pm 3bC^2 z(C^2 - z^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Also:

$$\varphi''' z . \psi'' z = -3bBC^4 z(C^2 - z^2)^{-4} \text{ und}$$
$$\varphi'' z . \psi''' z = -3bBC^4 z(C^2 - z^2)^{-4}, \text{ demnach}$$
$$\varphi''' z \psi'' z - \varphi'' z \psi''' z = 0.$$

Die vorgelegte Curve ist also eine ebne. In der That, eliminirt man aus beiden Gleichungen der Curve die Gröfse $\sqrt{(C^2 - z^2)}$, so ergiebt sich

$$bx - By + (Ab - Ba)z = 0,$$

welches nichts anderes als die Gleichung der Ebene ist, in welcher die vorgelegte Curve sich befindet.

Aufgabe 2. Man bestimme, ob die Curve, deren Gleichungen

$$x = Az \pm \sqrt{(B^2 - z^2)} \text{ und } y = az \pm \sqrt{(b^2 - z^2)}$$

sind, eine ebene sei oder nicht.

Da hier

$$\varphi''' z . \psi'' z = -b^2 B^2 z(B^2 - z^2)^{-\frac{5}{2}}(b^2 - z^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ und}$$
$$\varphi'' z . \psi''' z = -b^2 B^2 z(B^2 - z^2)^{-\frac{3}{2}}(b^2 - z^2)^{-\frac{5}{2}}, \text{ also}$$
$$\varphi''' z \psi'' z - \varphi'' z \psi''' z \lesseqgtr 0,$$

so ist die Curve von doppelter Krümmung.

Aufgabe 3. Man untersuche, ob die Curve, deren Gleichungen

$$x = a^2 \text{ und } y = e^2$$

sind, eben sey oder nicht.

Da hier:

$$\varphi'''z\,\psi''z = (ae)^z l^3 a \text{ und}$$
$$\varphi''z\,\psi'''z = (ae)^z l^2 a$$

ist, so ist diese Curve nur dann eben, wenn $la = 1$ ist, d. h. wenn $a = e$ ist, welches auch für sich klar ist. In jedem andern Falle ist die Curve von doppelter Krümmung.

Nach dem bisher Gezeigten wird es keine Schwierigkeit haben, die Bedingungsgleichungen auszumitteln, damit bestimmte Curven im Raume sich auf gewissen gegebenen Flächen befinden. Die Aufführung solcher Beispiele, wie z. B., wenn die Fläche eine Kugel, Kegel etc. wäre, übergehe ich wegen der geringen Anwendbarkeit.

II.

Wir haben bis jetzt gezeigt, wie man beurtheilen könne, ob eine Curve, die durch zwei Gleichungen gegeben ist, sich auf einer krummen Oberfläche befinde oder nicht. Sind aber die Gleichungen der Curve nicht unmittelbar gegeben, sondern man kennt blofs die Coordinaten irgend eines Punctes der Curve als Functionen irgend einer vierten willkürlichen Gröfse, nemlich man hat zur Bestimmung der Curve folgende drei Gleichungen:

$$x = \varphi t, \quad y = \psi t, \quad z = \chi t,$$

wo φ, ψ, χ drei beliebige Functionszeichen sind, so würde man die Gleichungen dieser Curve erhalten, wenn man aus je zweien dieser Gleichungen die willkürliche Gröfse eliminirte. Diese Elimination aber ist in den meisten Fällen, wegen der Schwierigkeiten der Operation, fast unausführbar. Es wird daher gut sein zu sehen, wie man ohne die Beschwerde der Elimination dennoch beurtheilen könne, ob eine Curve, die durch die drei letzten Gleichungen vorgestellt sein mag, sich auf bestimmten Oberflächen befinde oder nicht.

Es sei daher, wie in dem vorigen Paragraph, die Gleichung der Fläche auf der sich die Curve befinden soll, von der Form:

$$F(x, y, z, a, b, c, \text{etc.}) = 0.$$

Die Gröfsen a, b, c, etc. bedeuten wie dort die Constanten der Fläche. Sollen nun die Curve und die Fläche einen Punct gemein haben, so mufs die Bedingungsgleichung

$$F(\varphi t, \psi t, \chi t, a, b, c, \text{etc.}) = 0$$

bestehen. Diese Gleichung wollen wir abkürzend durch

$$ft = 0$$

vorstellen. Geht nun t in $t + k$ über, wo k irgend eine willkürliche Gröfse bedeutet, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$ft = 0,\ f't = 0,\ f''t = 0,\ f'''t = 0,\ \text{etc.},$$

die sämmtlich bestehen müssen, wenn alle Puncte der Curve, auf der betrachteten Oberfläche sich befinden sollen.

Ist die Anzahl der Constanten a, b, c etc. der Fläche gleich n, so wird durch ein ähnliches Raisonnement wie in dem vorigen Paragraph gezeigt, dafs

$$f^{(n)}t = 0,$$

die einzige Bedingungsgleichung sei, welcher, nachdem man für alle in derselben vorkommenden Constanten a, b, c etc. die Werthe substituirt hat, die sich aus $ft = 0$, $f't = 0$, etc. bis $f^{(n-1)}t = 0$ ergeben haben, Genüge geschehen mufs, d. h. der Theil rechts des Gleichheitszeichens mufs identisch Null sein, wenn die Curve sich ganz auf der gegebenen Oberfläche befinden soll.

Wir wollen auch hier als besondern Fall die einfachste aller Flächen zur Untersuchung wählen, nemlich die Ebene.

Es sei ihre Gleichung:

$$ax + by + cz + 1 = 0,$$

so hat man:

$$\begin{aligned} ft &= a\varphi t + b\psi t + c\chi t + 1 = 0,\\ f't &= a\varphi' t + b\psi' t + c\chi' t + 1 = 0,\\ f''t &= a\varphi'' t + b\psi'' t + c\chi'' t + 1 = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen a, b, c bestimmt, und in die folgenden substituirt:

$$f'''t = a\varphi'''t + b\psi'''t + c\chi'''t = 0,$$

giebt folgende Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned} &\chi' t[\varphi''t.\psi'''t - \varphi'''t.\psi''t] - \chi''t[\varphi' t.\psi'''t - \varphi'''t.\psi' t]\\ &\quad + \chi'''t[\varphi' t.\psi''t - \varphi''t.\psi' t] = 0, \end{aligned}$$

welcher Genüge geschehen mufs, damit eine Curve, deren drei Gleichungen

$$x = \varphi t,\quad y = \psi t,\quad z = \chi t$$

sind, eine Ebene sei.

Bemerkt man, dafs man nach derselben Bezeichnungsart auch die Gleichungen hat:

$$x' = \varphi' t, \quad x'' = \varphi'' t, \quad x''' = \varphi''' t,$$
$$y' = \psi' t, \quad y'' = \psi'' t, \quad y''' = \psi''' t,$$
$$z' = \chi' t, \quad z'' = \chi'' t, \quad z''' = \chi''' t,$$

so läfst sich die letzte Bedingungsgleichung, die Statt haben mufs, damit eine Curve eine Ebene sei, auch auf folgende Weise darstellen:

$$z'(x''y'''-y''x''') - z''(x'y'''-y'x''') + z'''(x'y''-y'x'') = 0.$$

Dieselbe Bedingungsgleichung liefse sich auch unmittelbar aus der Bedingungsgleichung ableiten, die in dem vorigen Paragraph für denselben besondern Fall gefunden wurde. Wir fanden daselbst die Bedingungsgleichung

$$\varphi'' z \,.\, \psi''' z = \psi'' z \,.\, \varphi''' z,$$

oder auch nach dem so eben angeführten:

$$x''y''' = y''x'''.$$

Diese Bedingungsgleichung ist für den Fall gefunden, wo sowohl x als y unmittelbare Functionen von z sind; hängen aber die Gröfsen x, y, z, wie in dem gegenwärtigen Falle, von einer vierten Gröfse t ab, so müssen in der letzten Gleichung die Gröfsen x'', x''', y'', y''' nach der Ordnung in folgende: $\left(\frac{x''}{z'^2} - \frac{x'z''}{z'^3}\right)$; $\left(\frac{x'''}{z'^3} - \frac{x'z'''}{z'^4} - \frac{3x''z''}{z'^4} + \frac{3x'z''^2}{z'^5}\right)$; $\left(\frac{y''}{z'^2} - \frac{y'z''}{z'^3}\right)$; $\left(\frac{y'''}{z'^3} - \frac{y'z'''}{z'^4} - \frac{3y''z''}{z'^4} + \frac{3y'z''^2}{z'^5}\right)$ übergehen, wodurch dann dieselbe Bedingungsgleichung hervorgehet die wir bereits erhielten.

Wir wollen auch hier den Vortrag durch einige Beispiele beleuchten:

Aufgabe 1. Man untersuche ob die Curve, deren sämmtliche Puncte durch die drei Gleichungen

$$x = a\cos t + b\sin t,$$
$$y = a'\cos t + b'\sin t,$$
$$z = a''\cos t + b''\sin t,$$

gegeben sind, eine ebene sei oder nicht.

Es ist

$x' = -a\sin t + b\cos t$, $x'' = -a\cos t - b\sin t$, $x''' = a\sin t - b\cos t$,
$y' = -a'\sin t + b'\cos t$, $y'' = -a'\cos t - b'\sin t$, $y''' = a'\sin t - b'\cos t$,
$z' = -a''\sin t + b''\cos t$, $z'' = -a''\cos t - b''\sin t$, $z''' = a''\sin t - b''\cos t$.

Also

$$x''y''' - y''x''' = ab' - a'b,$$
$$x'y''' - y'x''' = 0,$$
$$x'y'' - y'x'' = ab' - a'b,$$

und unsere Bedingungsgleichung

$$z'(x''y'''-y''x''')-z''(x'y'''-y'x''')+z'''(x'y''-y'x'')=0,$$

geht in folgende über:

$$(ab'-a'b)(-a''\sin t+b''\cos t+a''\sin t-b''\cos t)=0,$$

und da diese Gleichung wirklich identisch Null ist, so ist die Curve eine ebene. Man könnte sich auch auf folgendem Wege überzeugen, dafs die Curve eine ebne sei; eliminirt man nemlich aus den vorgelegten drei Gleichungen sowohl $\cos t$ als $\sin t$, so ergiebt sich die Gleichung:

$$x(a'b''-a''b')-y(ab''-a''b)+z(ab'-a'b)=0,$$

welche die Ebene vorstellt, in welcher die Curve sich befindet.

Aufgabe 2. Man untersuche ob die Curve, deren sämmtliche Puncte durch die drei Gleichungen

$$x=a+bt+ct^2+dt^3,$$
$$y=a'+b't+c't^2+d't^3,$$
$$z=a''+b''t+c''t^2+d''t^3$$

gegeben sind, eine ebene sei oder nicht.

Verschafft man sich hier ebenfalls die Werthe von x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''', und substituirt sie in die Bedingungsgleichung, so bleibt, wenn man die Theile, die sich wechselseitig aufheben, wegläfst, folgender Ausdruck:

$$b''(cd'-c'd)-c''(bd'-b'd)+d''(bc'-b'c),$$

der verschwinden mufs, wenn die Curve eine ebene seyn soll. So lange aber der letzte Ausdruck einen von der Null verschiedenen Werth hat, wird die Curve von doppelter Krümmung sein.

Es wird z. B. die Curve, deren drei Coordinaten irgend eines Punctes durch die Gleichungen

$$x=a+t+2t^2+3t^3,$$
$$y=a'+4t+5t^2+6t^3,$$
$$z=a''+7t+8t^2-27t^3$$

vorgestellt werden, eine ebene sein, denn durch die hier speziell angenommenen Werthe für b, c, d, b' etc. wird der letzte Ansdruck gleich Null.

III.

Es bleibt noch eine Art übrig, wie eine Curve als gegeben angesehen werden kann, nemlich durch zwei Differentialgleichungen, die erst integrirt werden müssen, um nach Paragraph I. untersuchen zu können, ob sich die Curve auf einer bestimmten Oberfläche befinde oder nicht. Wer aber mit dem gegenwärtigen Zustande des Integralcalculs bekannt ist, dem wird es lieb sein zu sehen, dafs diese Eigenschaften der Curven sich auch unabhängig vom Integralcalcul finden lassen.

Wir könnten hier wieder die Untersuchung allgemein für alle Flächen auf einmal vornehmen; der Gegenstand gewinnt indessen an Deutlichkeit, wenn wir die Untersuchung blofs für die Ebene anstellen. Es ist dann ein Leichtes, dieselben Betrachtungen für beliebige Flächen anzustellen. Uebrigens ziehe ich darum diese besondere Untersuchung vor, weil sie es ist, welche in practischen Fällen am meisten vorkommt.

Es stellen

$$\varphi(z, x, x') = 0, \quad \psi(z, y, y') = 0$$

die Differentialgleichungen der Curve vor, so wie

$$ax + by + cz + 1 = 0$$

die Gleichung der Ebene, in welcher die vorgelegte Curve liegen soll.

Nun denke man sich die Integrale der beiden vorgelegten Gleichungen durch folgende zwei Reihen dargestellt:

$$x = \overset{\circ}{x} + \overset{\circ}{x'}z + \overset{\circ}{x''}\frac{z^2}{1.2} + \overset{\circ}{x'''}\frac{z^3}{1.2.3} + \overset{\circ}{x^{IV}}\frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

$$y = \overset{\circ}{y} + \overset{\circ}{y'}z + \overset{\circ}{y''}\frac{z^2}{1.2} + \overset{\circ}{y'''}\frac{z^3}{1.2.3} + \overset{\circ}{y^{IV}}\frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

in welchen $\overset{\circ}{x}$, $\overset{\circ}{x'}$ etc., $\overset{\circ}{y}$, $\overset{\circ}{y'}$ etc. die Werthe von x, x', etc., y, y' etc. für den Fall, wo $z = 0$ ist, vorstellen.

Nimmt man die ersten, zweiten und dritten Differentialien dieser Reihen, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$x' = \overset{\circ}{x'} + \overset{\circ}{x''}z + \overset{\circ}{x'''}\frac{z^2}{1.2} + \overset{\circ}{x^{IV}}\frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$x'' = \overset{\circ}{x''} + \overset{\circ}{x'''}z + \overset{\circ}{x^{IV}}\frac{z^2}{1.2} + \overset{\circ}{x^{V}}\frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$x''' = \overset{\circ}{x'''} + \overset{\circ}{x^{IV}}z + \overset{\circ}{x^{V}}\frac{z^2}{1.2} + \overset{\circ}{x^{VI}}\frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$y' = \overset{\circ}{y}' + \overset{\circ}{y}''z + \overset{\circ}{y}''' \frac{z^2}{1.2} + \overset{\circ}{y}^{IV} \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$y'' = \overset{\circ}{y}'' + \overset{\circ}{y}'''z + \overset{\circ}{y}^{IV} \frac{z^2}{1.2} + \overset{\circ}{y}^{V} \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$y''' = \overset{\circ}{y}^{IV} + \overset{\circ}{y}^{IV}z + \overset{\circ}{y}^{V} \frac{z^2}{1.2} + \overset{\circ}{y}^{VI} \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Nun mufs, nach dem in Paragraph I. Vorgetragenen, die Gleichung

$$x''y''' - y''x''' = 0$$

für jeden Werth von z Statt haben, damit die Curve eine Ebene sei. Es bleibt also nichts übrig, als aus den letzten Gleichungen sich durch Multiplication den Ausdruck $x''y''' - y''x'''$ zu verschaffen, und diesen gleich Null für jeden Werth von z zu setzen. Die Folgerungen die hieraus entstehen, werden die Bedingung in sich schliefsen, unter welcher eine Curve eine ebene sein kann.

Bildet man nun $x''y''' - y''x'''$, so hat man:

$$0 = x''y''' - y''x''' =$$

$$\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}''' - \overset{\circ}{y}''\overset{\circ}{x}''' + (\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}^{IV} - \overset{\circ}{y}''\overset{\circ}{x}^{IV})z + (\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}^{V} - \overset{\circ}{x}^{V}\overset{\circ}{y}'' + \overset{\circ}{x}^{IV}\overset{\circ}{y}''' - \overset{\circ}{x}'''\overset{\circ}{y}^{IV})\frac{z^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Damit der Theil dieser Gleichung, welcher eine nach z fortgehende Reihe ist, für jeden Werth von z verschwinde, welches die nothwendige Bedingung ist, damit die Curve eine ebene sei, müssen folgende Gleichungen, ins Unendliche fortgesetzt, bestehen:

$\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}''' - \overset{\circ}{y}''\overset{\circ}{x}''' = 0$; $\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}^{IV} - \overset{\circ}{y}''\overset{\circ}{x}^{IV} = 0$; $\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}^{V} - \overset{\circ}{y}'''\overset{\circ}{x}^{V} + \overset{\circ}{x}^{IV}\overset{\circ}{y}''' - \overset{\circ}{y}^{IV}\overset{\circ}{x}''' = 0$; etc.

oder, wie man sich leicht überzeugt, die mit ihnen identischen

$(\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}''' - \overset{\circ}{y}''\overset{\circ}{x}''') = 0$, $(\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}''' - \overset{\circ}{y}''\overset{\circ}{x}''')' = 0$, $(\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}''' - \overset{\circ}{y}''\overset{\circ}{x}''')'' = 0$, etc.

wo nemlich unter $(\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}''' - \overset{\circ}{y}''\overset{\circ}{x}''')'$; $(\overset{\circ}{x}''\overset{\circ}{y}''' - \overset{\circ}{y}''\overset{\circ}{x}''')''$, etc. das erste, zweite, dritte etc. Differential von $x''y''' - y''x'''$, nach z, verstanden wird, und in welchen Ausdrücken, nach der Differentiation, $z = 0$ gesetzt wird.

Man sieht also, dafs, wenn eine Curve eine ebene sein soll, und $x''y''' - y''x'''$ kürzer durch ωz vorgestellt wird, wo ω irgend ein Functionszeichen bedeutet,

$$\overset{\circ}{\omega z} = 0, \quad \overset{\circ}{\omega' z} = 0, \quad \overset{\circ}{\omega'' z} = 0, \quad \overset{\circ}{\omega''' z} = 0, \quad \text{etc.}$$

sein mufs, d. h. es müssen die Function ωz und ihre sämmtlichen Differentialien nach z, gleichzeitig mit z verschwinden.

Bevor wir unsere Folgerungen fortsetzen, ist folgendes Theorem nöthig.

Wenn eine Function einer Variablen, sammt ihren Differentialien nach derselben Variablen, für einen und denselben Werth der Variabeln verschwinden, so mufs die Function auch für jeden andern Werth der Variabeln verschwinden, d. h. sie mufs identisch Null sein.

Es sei diese Function von der Form

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ etc.},$$

so mufs man, vermöge der Bedingung, wenn a der Werth der Variabeln ist, der sowohl die vorgelegte Function, als auch ihre sämmtliche Differentialien auf Null reduzirt, folgende Gleichungen haben:

$$\begin{aligned} 0 &= A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \text{ etc.} \\ 0 &= B + 2Ca + 3Da^2 + \text{ etc.} \\ 0 &= 2C + 6Da + \text{ etc.} \\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Es ist aber aus der Theorie der Functionen bekannt, dafs die letzten Gleichungen nur dann zugleich bestehen können, wenn a eine variable Gröfse vorstellt, und in dieser Voraussetzung mufs man haben:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0 \text{ etc.},$$

d. h. die Function mufs identisch Null sein.

Dieses vorausgesetzt, sieht man, dafs die Bedingungsgleichung, damit eine Curve von der Form

$$\varphi(z, x, x') = 0, \quad \psi(z, y, y') = 0$$

eine ebene sey, folgende einzige sein mufs:

$$x''y''' - y''x''' = 0,$$

für jeden Werth von z. D. h., wenn man aus den zwei vorgelegten Gleichungen der Curve x' durch z und x und y' durch z und y, und dann x'', x''' und y'', y''' als Functionen von z, x und z, y ausdrückt und die gefundenen Resultate in die letzten Gleichungen substituirt, so mufs man eine identische Gleichung erhalten.

Sind die vorgelegten Differentialgleichungen der Curve von der zweiten Ordnung, z. B.

$$\varphi(z, x, x', x'') = 0, \quad \psi(z, y, y', y'') = 0,$$

so bestimme man x'' und y'' als Functionen von z, x, x' und z, y, y', und substituire die gefundenen Resultate in die oben aufgestellten Bedin-

gungsgleichungen; wird dadurch das erhaltene Resultat identisch Null, so ist die Curve eine ebene, im entgegengesetzten Falle ist sie von doppelter Krümmung.

Oder auch, man berechne zuerst x'', y'' als Function von z, x, x' und z, y, y', und hieraus x''', x^{IV}, y''', y^{IV} ebenfalls als Function von z, x, x' und z, y, y', und substituire die gefundenen Werthe in die Gleichung

$$(x''y'''-y''x''')' = 0,$$

oder in die mit ihr identische Gleichung

$$x''y^{IV}-y''x^{IV}.$$

Geschieht dadurch der letzten Gleichung Genüge, so ist die Curve eben, in jedem anderen Falle ist sie von doppelter Krümmung.

Aehnlich ist das Verfahren, wenn die Differentialgleichungen der Curve von der $n$ten Ordnung sind, indem man

$$(y''x'''-y'''x'')^{(n-1)} = 0$$

bildet; dieser Ausdruck wird Glieder haben, die $y^{(n+1)}$, $x^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$, $x^{(n+2)}$ enthalten, die man dann aus den Gleichungen der Curve durch z, y, y', y'', ... $y^{(n)}$ und z, x, x', x'', ... $x^{(n)}$ ausdrückt und die gefundenen Resultate in die Bedingungsgleichung substituirt; geschieht ihr dadurch Genüge, so ist die Curve eben, in jedem andern Fall ist sie von doppelter Krümmung. Einige Beispiele werden das Verfahren erläutern.

Aufgabe I. Man suche, ob die Curve, deren Differentialgleichungen sind:

$(x-Az)-(x'-A)(c^2-z^2) = 0$ und $(y-az)-(y'-a)(c^2-z^2) = 0$,

eine ebene sey oder nicht.

Hier ist

$$x'-A = \frac{x-Az}{c^2-z^2},$$

$$x'' = \frac{(x-Az)(1+2z)}{(c^2-z^2)^2},$$

$$x''' = \frac{(x-Az)(1+2c^2+6z+6z^2)}{(c^2-z^2)^3},$$

und

$$y'-a = \frac{y-az}{c^2-z^2},$$

$$y'' = \frac{(y-az)(1+2z)}{(c^2-z^2)^2},$$

$$y''' = \frac{(y-az)(1+2c^2+6z+6z^2)}{(c^2-z^2)^3}.$$

Also $x''y''' = y''x'''$, daher ist die Curve eine ebene.

Aufgabe 2. Man bestimme ob die Curve, deren Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung sind, nemlich
$x''(c^2-z^2)-(x^1-x^1z)(1+2z)=0$ und $y''(c^2-z^2)-(y^1-y^1z)(1+2z)=0$,
eine ebene sei oder nicht.

Man suche aus diesen Gleichungen x'' und y'', so hat man:

$$x''=\frac{(x-x^1z)(1+2z)}{c^2-z^2} \text{ und } y''=\frac{(y-y^1z)(1+2z)}{c^2-z^2},$$

hieraus finde man x''' und y''', so hat man:

$$x'''=\frac{(x-x^1z)(2c^2+z-2z^2-4z^3)}{(c^2-z^2)^2} \text{ und } y'''=\frac{(y-y^1z)(2c^2+z-2z^2-4z^3)}{(c^2-z^2)^2}.$$

Da hier $x''y'''=y''x'''$ ist, so ist die Curve eine ebene.

Oder man bestimme noch x^{IV} und y^{IV}, so hat man:

$$x^{IV}=\frac{(x-x^1z)(c^2-2c^2z-16c^2z^2-2z^3+12z^4+8z^5)}{(c^2-z^2)^3},$$

$$y^{IV}=\frac{(y-y^1z)(c^2-2c^2z-16c^2z^2-2z^3+12z^4+8z^5)}{(c^2-z^2)^3}.$$

Diese Resultate in

$$(x''y'''-y''x''')'=0,$$

oder in

$$x''y^{IV}-y''x^{IV}=0$$

substituirt, reducirt sich die letzte Gleichung auf Null, daher ist die Curve eine ebene; wie vorhin.

Aufgabe 3. Man bestimme ob die Curve, deren Differentialgleichungen von der ersten Ordnung sind,

$$(x'-A)(x-Az)-B=0 \text{ und } (y'-a)(y-az)-b=0,$$

eine ebene sei oder nicht.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende:

$$x'-A=\frac{B}{x-Az} \quad \text{und} \quad y'-a=\frac{b}{y-az},$$

$$x''=\frac{-B^2}{(x-Az)^2} \qquad y''=\frac{-b^2}{(y-az)^2},$$

$$x'''=\frac{3B^3}{(x-Az)^3} \qquad y'''=\frac{3b^3}{(y-az)^3}.$$

Da hier $x''y'''-y''x'''$ nicht identisch Null ist, so wird die Curve, wenn man die vollständigen Integralien der verlangten Differentialgleichungen nimmt, von doppelter Krümmung sein.

40.
Ueber den Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte.

(Von Herrn Prof. *Strehlke* zu Danzig.)

Die zur Bestimmung des Krümmungskreises der Kegelschnitte nöthigen Stücke werden entweder durch die Differentialrechnung oder die Anwendung des Unendlichkleinen gefunden; man kann aber durch die gewöhnlichen analytischen Hülsmittel zu denselben gelangen, wenn man zuvor die allgemeinere Aufgabe auflöst:

Die Coordinaten des Mittelpuncts und den Radius des Kreises zu finden, welcher durch drei gegebene Puncte eines Kegelschnittes geht.

Auflösung. Wenn x und y die auf einander rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes in dem Umfange eines Kreises bezeichnen, p und q die auf dasselbe Axensystem bezogenen rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpuncts dieses Kreises vorstellen, und r dieses Kreises Halbmesser ist, so hat man bekanntlich:

$$r^2 = (x-p)^2 + (y-q)^2.$$

Da nun der Kreis durch drei Puncte gehen soll, deren Coordinaten wir durch

$$\alpha,\ \beta$$
$$\alpha',\ \beta'$$
$$\alpha'',\ \beta''$$

bezeichnen wollen, so hat man nach einander die Gleichungen:

$$r^2 = (\alpha - p)^2 + (\beta - q)^2,$$
$$r^2 = (\alpha' - p)^2 + (\beta' - q)^2,$$
$$r^2 = (\alpha'' - p)^2 + (\beta'' - q)^2,$$

welche zur vollständigen Bestimmung der gesuchten Gröfsen p, q, r hinreichen.

Wenn man die erste Gleichung von der zweiten und dritten abzieht, so erhält man, nachdem die erste der erhaltenen Gleichungen durch $\alpha - \alpha'$, die zweite durch $\alpha - \alpha''$ dividirt worden:

$$(1)\quad 2p + \frac{2(\beta-\beta')}{\alpha-\alpha'}\cdot q = \alpha + \alpha' + \frac{\beta^2-\beta'^2}{\alpha-\alpha'},$$

$$(2)\quad 2p + \frac{2(\beta-\beta'')}{\alpha-\alpha''}\cdot q = \alpha + \alpha'' + \frac{\beta^2-\beta''^2}{\alpha-\alpha''}.$$

Um

Um nun diese Gleichungen für die Kegelschnitte einzurichten, hat man nur nöthig, für $\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}$, $\alpha+\alpha'$, $\frac{\beta^2-\beta'^2}{\alpha-\alpha'}$ u. s. w. ihre durch die Gleichungen der 3 Kegelschnitte ausgedrückten Werthe zu setzen.

Wir machen den Anfang mit

der Ellipse. Wenn α die vom Mittelpuncte der Ellipse auf der grofsen Axe $2a$ gezählte Abscisse, β die auf der kleinen Axe $2b$ vom Mittelpuncte gezählte Ordinate bedeutet, so hat man bekanntlich:

$$\beta^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2).$$

Wird aber $\frac{\alpha}{a} = \cos\varphi$ gesetzt, wodurch $\alpha = a\cos\varphi$,

so wird $\beta = b\sin\varphi$.

Ein zweiter Punct, dessen Coordinaten α', β', läfst sich für die Ellipse eben so allgemein durch

$$\alpha' = a\cos\varphi',$$
$$\beta' = b\sin\varphi',$$

ein dritter eben so durch

$$\alpha'' = a\cos\varphi'',$$
$$\beta'' = b\sin\varphi''$$

bezeichnen.

Diese Coordinaten-Ausdrücke geben

$$\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'} = -\frac{b}{a}.\cot\frac{\varphi+\varphi'}{2},$$
$$\alpha+\alpha' = a(\cos\varphi+\cos\varphi'),$$
$$\frac{\beta^2-\beta'^2}{\alpha-\alpha'} = -\frac{b^2}{a}(\cos\varphi+\cos\varphi').$$

Die Gleichung (1) wird demnach für die Ellipse:

$$(A)\quad 2p - \frac{2b}{a}.\cot\frac{\varphi+\varphi'}{2}.q = \frac{a^2-b^2}{a}.(\cos\varphi+\cos\varphi')\ldots.$$

die Gleichung (2.):

$$(B)\quad 2p - \frac{2b}{a}.\cot\frac{\varphi+\varphi''}{2}.q = \frac{a^2-b^2}{a}.(\cos\varphi+\cos\varphi'')\ldots.$$

Wenn man die Gleichung (B) von (A) abzieht, so erhält man

$$\frac{-2bq.\sin\frac{\varphi''-\varphi'}{2}}{a.\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}.\sin\frac{\varphi+\varphi''}{2}} = -2.\frac{a^2-b^2}{a}.\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}.\sin\frac{\varphi'-\varphi''}{2},$$

und

$$q = -\frac{a^2-b^2}{b}.\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}.\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}.\sin\frac{\varphi''+\varphi}{2}.$$

Setzt man diesen Werth für q in die Gleichung (A) oder (B), so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$p = \frac{a^2-b^2}{a}.\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}.\left(\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} - \sin\frac{\varphi+\varphi''}{2}.\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\right).$$

Nach der Berechnung dieser Ausdrücke findet man r durch die Gleichung

$$r^2 = (\alpha-p)^2+(\beta-q)^2.$$

Zwei besondere Fälle dieser Aufgabe verdienen eine genauere Betrachtung.

1) Nimmt man an, dafs $\varphi' = \varphi$, so erhält man offenbar in den obigen Coordinaten-Ausdrücken die Bestimmungsstücke desjenigen Kreises, welcher die Ellipse in dem durch die Coordinaten $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ bestimmten Puncte berührt, und dieselbe in dem durch die Coordinaten $a\cos\varphi''$, $b\sin\varphi''$ gegebenen Puncte durchschneidet. Dadurch verwandeln sich die obigen Ausdrücke für q und p in folgende:

$$q = -\frac{a^2-b^2}{b}.\sin^2\frac{\varphi+\varphi''}{2}.\sin\varphi,$$

$$p = \frac{a^2-b^2}{a}.\cos^2\frac{\varphi+\varphi''}{2}.\cos\varphi.$$

2) Am meisten verdient der besondere Fall Beachtung, da man annimmt, dafs die durch die Coordinaten $a\cos\varphi'$, $b\sin\varphi'$, $a\cos\varphi''$, $b\sin\varphi''$ bestimmten beiden Puncte mit dem Puncte zusammenfallen, dessen Coordinaten $a\cos\varphi$ und $b\sin\varphi$ sind. Man gelangt dann zu dem Kreise, welcher sich in diesem Puncte am genauesten an die Curve anschliefst, oder zu dem sogenannten Krümmungskreise. Da für diesen Fall $\varphi''=\varphi'=\varphi$ ist, so wird

$$q = -\frac{a^2-b^2}{b}.\sin\varphi^3,$$

$$p = \frac{a^2-b^2}{a}.\cos\varphi^3.$$

Wenn man den Radius des Krümmungskreises mit R bezeichnet, so hat man, da $r^2=(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2$:

$$R^2 = \left(a\cos\varphi - \frac{a^2-b^2}{a}.\cos\varphi^3\right)^2 + \left(b\sin\varphi + \frac{a^2-b^2}{b}.\sin\varphi^3\right)^2$$

$$= (a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^2.\left(\frac{\cos\varphi^2}{a^2}+\frac{\sin\varphi^2}{b^2}\right)$$

$$= \frac{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^3}{a^2b^2},$$

$$R = \frac{(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Wir übergehen die Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem für die Normale, deren Gleichung in (A) enthalten ist, wenn man darin $\varphi' = \varphi$ setzt. Die Gleichung der Normale ist hiernach

$$p - \frac{b}{a}\cot\varphi . q = \frac{a^2 - b^2}{a} . \cos\varphi .$$

Für die Hyperbel, deren Mittelpunctsgleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ ist, setze man $\alpha = \frac{a}{\cos\varphi}$, so ist $\beta = b \operatorname{tg}\varphi$,

$$\alpha' = \frac{a}{\cos\varphi'}, \quad - \quad - \quad \beta' = b \operatorname{tg}\varphi',$$

$$\alpha'' = \frac{a}{\cos\varphi''}, \quad - \quad - \quad \beta'' = b \operatorname{tg}\varphi''.$$

Durch die Anwendung dieser Coordinaten-Ausdrücke wird

$$\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} = \frac{b}{a}\cos\frac{\varphi - \varphi'}{2} : \sin\frac{\varphi + \varphi'}{2},$$

$$\alpha + \alpha' = a\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi'}\right),$$

$$\frac{\beta^2 - \beta'^2}{\alpha - \alpha'} = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi'}\right).$$

Die Gleichung (1) wird demnach für die Hyperbel folgende:

$$(\mathrm{I}) \quad 2p + \frac{2b}{a} . \frac{\cos\frac{\varphi - \varphi'}{2}}{\sin\frac{\varphi + \varphi'}{2}} . q = \frac{a^2 + b^2}{a}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi'}\right) \ldots\ldots,$$

die Gleichung (2) wird:

$$(\mathrm{II}) \quad 2p + \frac{2b}{a} . \frac{\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2}}{\sin\frac{\varphi + \varphi''}{2}} . q = \frac{a^2 + b^2}{a}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi''}\right) \ldots\ldots$$

Wenn man die Gleichung (II) von (I) abzieht, so erhält man

$$\frac{2qb}{a} . \left\{\frac{\cos\frac{\varphi - \varphi'}{2}}{\sin\frac{\varphi + \varphi'}{2}} - \frac{\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2}}{\sin\frac{\varphi + \varphi''}{2}}\right\} = \frac{a^2 + b^2}{a}\left(\frac{1}{\cos\varphi'} - \frac{1}{\cos\varphi''}\right).$$

Durch eine leichte Zusammenziehung erhält man hieraus:

$$\frac{2qb}{a} . \frac{\sin\frac{\varphi'' - \varphi'}{2} . \cos\varphi}{\sin\frac{\varphi + \varphi'}{2} . \sin\frac{\varphi + \varphi''}{2}} = -2 . \frac{a^2 + b^2}{a} . \sin\frac{\varphi' + \varphi''}{2} . \sin\frac{\varphi'' - \varphi'}{2} : \cos\varphi' . \cos\varphi'',$$

folglich

$$q = -\frac{a^2+b^2}{b}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cdot\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\cdot\sin\frac{\varphi''+\varphi}{2}}{\cos\varphi\ .\ \cos\varphi'\ .\ \cos\varphi''}.$$

Nachdem dieser Werth für q in die Gleichung (I) oder (II) gesetzt worden, erhält man:

$$p = \frac{a^2+b^2}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}{\cos\varphi\,.\,\cos\varphi'.\cos\varphi''}\left\{\sin\frac{\varphi+\varphi''}{2}\,.\,\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}+\cos\varphi''.\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right\}.$$

Fallen die drei Puncte der Hyperbel in den zusammen, dessen Coordinaten $\frac{a}{\cos\varphi}$ und $b\,\mathrm{tang}\,\varphi$ sind, so ist $\varphi''=\varphi'=\varphi$, und

$$q = -\frac{a^2+b^2}{b}\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi^3,$$

$$p = \frac{a^2+b^2}{a\,.\,\cos\varphi^3}.$$

Bezeichnet R den Krümmungshalbmesser der Hyperbel für diesen Punct, so findet man durch Anwendung dieser Ausdrücke auf die Gleichung $r^2 = (\alpha-p)^2+(\beta-q)^2$:

$$R = \frac{\left(a^2\,\mathrm{tang}\,\varphi^2+\frac{b^2}{\cos\varphi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Für die Parabel ist unter Voraussetzung der Coordinaten-Ausdrücke

$$\beta^2 = m\alpha,$$
$$\beta'^2 = m\alpha',$$
$$\beta''^2 = m\alpha'':$$
$$\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'}},$$
$$\frac{\beta^2-\beta'^2}{\alpha-\alpha'} = m,$$

folglich

$$2p+\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'}}\cdot q = \alpha+\alpha'+m,$$

$$2p+\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha''}}\cdot q = \alpha+\alpha''+m.$$

Nach der Auflösung dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$q = -\frac{1}{2\sqrt{m}}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'})(\sqrt{\alpha'}+\sqrt{\alpha''})(\sqrt{\alpha''}+\sqrt{\alpha}),$$

$$2p = \alpha+\alpha'+\alpha''+m+\sqrt{(\alpha\alpha')}+\sqrt{(\alpha'\alpha'')}+\sqrt{(\alpha''\alpha)}.$$

Fallen die beiden, durch die Coordinaten

$$\alpha', \sqrt{(\alpha' m)},$$
$$\alpha'', \sqrt{(\alpha''.m)}$$

bezeichneten Puncte, mit jenem Puncte zusammen, dessen Coordinaten α, $\sqrt{(\alpha m)}$ sind, so wird:

$$q = -\frac{1}{2\sqrt{m}} 2\sqrt{\alpha}.2\sqrt{\alpha}.2\sqrt{\alpha} = -\frac{4\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{m}},$$
$$2p = 3\alpha + m + \alpha + \alpha + \alpha,$$
$$p = \frac{6\alpha + m}{2}.$$

Bezeichnet R den Krümmungshalbmesser für diesen Punct, so erhält man durch die Ausdrücke von q und p:

$$R^2 = \frac{(m+4\alpha)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{m}}.$$

41.

Ueber die Functionen welche der Gleichung $\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$ genugthun.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

Der Gleichung

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$$

wird genug gethan, wenn

$$fy = \tfrac{1}{2}y \text{ und } \varphi x = \psi x = \log x$$

ist. Denn dieses giebt:

$$\log x + \log y = \log xy;$$

desgleichen, wenn

$$fy = \sqrt{(1-y^2)} \text{ und } \varphi x = \psi x = \arcsin x,$$

welches

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin[x\sqrt{(1-y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)}]$$

giebt.

Es wäre möglich, dafs ihr auch noch auf andere Weise genug gethan werden könnte. Dieses soll untersucht werden.

Man setze der Kürze wegen

$$xfy + yfx = r,$$

so ist die gegebene Bedingungsgleichung folgende:

$$1. \quad \varphi x + \varphi y = \psi r.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach x und nach y, so findet man, wenn man sich der Lagrangeschen Bezeichnung der Differential-Coefficienten bedient,

$$\varphi' x = \psi' r\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) \text{ und } \varphi' y = \psi' r\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right).$$

Diese Gleichungen geben, wenn man die Gröfse $\psi' r$ eliminirt,

$$\varphi' x\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) = \varphi' y\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right).$$

Der Ausdruck von r aber giebt:

$$2. \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = fy + yf'x \text{ und } \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) = fx + xf'y,$$

also wenn man substituirt,

$$3. \quad \varphi' y.(fy + yf'x) = \varphi' x.(fx + xf'y).$$

Man gebe nunmehr der veränderlichen Gröfse y den einzelnen Werth 0, welches erlaubt ist, weil x und y von einander unabhängig sind, so findet man in (3.), wenn man der Kürze wegen

$$\varphi 0 = a, \quad f0 = \alpha, \quad f'0 = \alpha'$$

setzt:

$$a\alpha - \varphi' x(fx + \alpha' x) = 0,$$

woraus auch, wenn man y statt x schreibt,

$$a\alpha - \varphi' y(fy + \alpha' y) = 0$$

folgt. Diese beiden Gleichungen geben

$$4. \quad \varphi' x = \frac{a\alpha}{fx + \alpha' x} \text{ und } \varphi' y = \frac{a\alpha}{fy + \alpha' y},$$

und wenn man, nachdem $\frac{\partial \varphi x}{\partial x}$ statt $\varphi' x$ gesetzt worden, integrirt,

$$5. \quad \varphi x = a\alpha \int \frac{\partial x}{fx + \alpha' x}.$$

Die Function φx wird auf diese Weise durch fx bestimmt. Es kommt also nur noch darauf an, fx zu finden. Setzt man in die Gleichung (3.) statt $\varphi' x$ und $\varphi' y$ die Ausdrücke dieser Functionen (4.), so findet man, nachdem reducirt worden:

$$6. \quad (fx + \alpha' x)(fy + yf' x) - (fy + \alpha' y)(fx + \alpha f' y) = 0,$$

und dieses giebt, wenn man die Factoren multiplicirt,

$$7. \quad fxfy + \alpha' xfy + yfxf' x + \alpha' xyf' x - fxfy - \alpha' yfx - xfyf' y - \alpha' xyf' y = 0,$$

oder

$$8. \quad x(\alpha' fy - fyf' y - \alpha' yf' y) - y(\alpha' fx - fx.f' x - \alpha' xf' x) = 0,$$

oder, wenn man mit xy dividirt,

$$9. \quad \frac{1}{y}(\alpha' fy - fyf' y - \alpha' yf' y) - \frac{1}{x}(\alpha' fx - fxf' x - \alpha' xf' x) = 0.$$

Die Gröfsen x und y sind aber von einander unabhängig; also kann diese Gleichung nicht anders Statt finden, als wenn

$$\frac{1}{y}(\alpha' fy - fyf' y - \alpha' yf' y) = \frac{1}{x}(\alpha' fx - fxf' x - \alpha' xf' x) = \text{Const. ist.}$$

Es sei also

$$10. \quad \frac{1}{x}(\alpha' fx - fxf' x - \alpha' xf' x) = m,$$

so erhält man:

$$11. \quad f' x(fx + \alpha' x) + (mx - \alpha' fx) = 0.$$

Durch diese Gleichung wird die Function fx bestimmt. Sie kann integrirt werden, wenn man

$$fx = x.z$$

setzt. Denn alsdann ist

$$f'x \,.\, \partial x = z\,\partial x + x\,\partial z,$$

und man findet, wenn man substituirt,

$$(z\,\partial x + x\,\partial z)(xz + \alpha' x) + (mx - \alpha' xz)\partial x = 0,$$

welches, wenn man mit x dividirt,

$$(z\,\partial x + x\,\partial z)(z + \alpha') + (m - \alpha' z)\partial x = 0,$$

oder

$$[z(z + \alpha') + m - \alpha' z]\,\partial z + x\,\partial z(z + \alpha') = c$$

oder

$$(z^2 + m)\,\partial x + x\,\partial z(z + \alpha') = 0,$$

oder, wenn man mit $x(z^2 + m)$ dividirt,

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{\partial z(z + \alpha')}{z^2 + m}$$

giebt.

Hiervon ist das Integral

$$\int \frac{\partial x}{x} = -\int \frac{z\,\partial z}{z^2 + m} - \alpha' \int \frac{\partial z}{z^2 + m}.$$

Es sei

$$m = -n^2,$$

so ist

$$\int \frac{\partial x}{x} = \log x,\quad \int \frac{z\,\partial z}{z^2 - n^2} = \tfrac{1}{2}\log(z^2 - n^2),\quad \int \frac{\partial z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{2n}\log\frac{z-n}{z+n},$$

also wenn man substituirt und eine willkürliche Constante c hinzufügt,

$$\log c - \log x = \tfrac{1}{2}\log(z^2 - n^2) + \frac{\alpha'}{2n}\log\frac{z-n}{z+n}, \text{ oder}$$

$$\log\frac{c}{x} = \log\left[(z^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{z-n}{z+n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}\right],$$

woraus folgt:

$$\frac{c}{x} = (z^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{z-n}{z+n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}.$$

Es war aber $fx = xz$. Also ist $z = \frac{fx}{x}$, und folglich, wenn man substituirt:

$$\frac{c}{x} = \frac{[(fx)^2 - n^2x^2]^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \left(\frac{fx - nx}{fx + nx}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}, \text{ oder}$$

$$c = (fx - nx)^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{2n}} \cdot (fx + nx)^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha'}{2n}},$$

oder, wenn man die $2n$ten Potenzen nimmt:

$$12.\quad c^{2n} = (fx - nx)^{n+\alpha'} \cdot (fx + nx)^{n-\alpha'}.$$

$x = 0$ giebt $c = \alpha$, weil $f0 = \alpha$ war.

Dieses

Dieses also ist die Gleichung, von welcher die Function fx abhängt. Sie ist nicht allgemein auflösbar, weil n und α' zwei unbestimmte Grö-ſsen sind, welche selbst imaginair sein können.

Die Gleichung (12.) drückt die allgemeinste Form der Function fx aus, und es läfst sich zeigen, dafs sie der gegebenen Bedingungs-Gleichung allgemein genug thut. In der That entspricht die Function fx der Gleichung (11.), und aus der Form der Gleichung (9.) sieht man, dafs sie auch dieser genug thut. Aber die Gleichung (6.) ist die Gleichung (9.) in veränderter Gestalt. Also thut fx auch der Gleichung (6.) genug. Aus der Gleichung (6.) aber findet man die Gleichung (3.), wenn man $\varphi' x = \frac{a\alpha}{fx + \alpha' x}$ setzt, und die Gleichung (3.) giebt, wenn man $xfy + yfx = r$ setzt:

$$\varphi' x \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \varphi' y \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) = 0.$$

Integrirt man diese partielle Differential-Gleichung nach den bekannten Regeln, so findet man:

$$r = F(\varphi x + \varphi y),$$

und hieraus

$$\varphi x + \varphi y = \psi r, \text{ oder}$$
$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx),$$

welches die gegebene Bedingungs-Gleichung ist.

Es ist noch übrig die Function ψ zu finden. Zu dem Ende sei $y = 0$, so findet man, weil $f0 = \alpha$,

$$\varphi x = \psi(\alpha x) - \varphi 0,$$

oder, wenn man $\frac{x}{\alpha}$ statt x setzt,

$$\psi x = \varphi \frac{x}{\alpha} + \varphi 0.$$

Zusammengenommen findet man also, dafs die allgemeinsten Formen der Functionen, welche der Bedingungs-Gleichung

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$$

genug thun, folgende sind:

$$\varphi x = a\alpha \int \frac{\partial x}{fx + \alpha' x} \text{ und}$$
$$\psi x = \varphi 0 + \varphi \frac{x}{\alpha} = a\alpha \int \frac{\partial x}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha' x} + \varphi 0,$$

$$f'x \,.\, \partial x = z\,\partial x + x\,\partial z,$$

und man findet, wenn man substituirt,

$$(z\,\partial x + x\,\partial z)(xz + \alpha' x) + (mx - \alpha' xz)\partial x = 0,$$

welches, wenn man mit x dividirt,

$$(z\,\partial x + x\,\partial z)(z + \alpha') + (m - \alpha' z)\partial x = 0,$$

oder

$$[z(z + \alpha') + m - \alpha' z]\,\partial z + x\,\partial z(z + \alpha') = 0$$

oder

$$(z^2 + m)\,\partial x + x\,\partial z(z + \alpha') = 0,$$

oder, wenn man mit $x(z^2 + m)$ dividirt,

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{\partial z(z + \alpha')}{z^2 + m}$$

giebt.

Hiervon ist das Integral

$$\int \frac{\partial x}{x} = -\int \frac{z\,\partial z}{z^2 + m} - \alpha' \int \frac{\partial z}{z^2 + m}.$$

Es sei

$$m = -n^2,$$

so ist

$$\int \frac{\partial x}{x} = \log x,\quad \int \frac{z\,\partial z}{z^2 - n^2} = \tfrac{1}{2}\log(z^2 - n^2),\quad \int \frac{\partial z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{2n}\log\frac{z - n}{z + n},$$

also wenn man substituirt und eine willkürliche Constante c hinzufügt,

$$\log c - \log x = \tfrac{1}{2}\log(z^2 - n^2) + \frac{\alpha'}{2n}\log\frac{z - n}{z + n}, \text{ oder}$$

$$\log\frac{c}{x} = \log\left[(z^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{z - n}{z + n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}\right],$$

woraus folgt:

$$\frac{c}{x} = (z^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{z - n}{z + n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}.$$

Es war aber $fx = xz$. Also ist $z = \frac{fx}{x}$, und folglich, wenn man substituirt:

$$\frac{c}{x} = \frac{[(fx)^2 - n^2 x^2]^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \left(\frac{fx - nx}{fx + nx}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}, \text{ oder}$$

$$c = (fx - nx)^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{2n}} \cdot (fx + nx)^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha'}{2n}},$$

oder, wenn man die $2n$ten Potenzen nimmt:

$$12.\quad c^{2n} = (fx - nx)^{n + \alpha'} \cdot (fx + nx)^{n - \alpha'}.$$

$x = 0$ giebt $c = \alpha$, weil $f0 = \alpha$ war.

Dieses

Dieses also ist die Gleichung, von welcher die Function fx abhängt. Sie ist nicht allgemein auflösbar, weil n und α' zwei unbestimmte Grö-ſsen sind, welche selbst imaginair sein können.

Die Gleichung (12.) drückt die allgemeinste Form der Function fx aus, und es läſst sich zeigen, daſs sie der gegebenen Bedingungs-Gleichung allgemein genug thut. In der That entspricht die Function fx der Gleichung (11.), und aus der Form der Gleichung (9.) sieht man, daſs sie auch dieser genug thut. Aber die Gleichung (6.) ist die Gleichung (9.) in veränderter Gestalt. Also thut fx auch der Gleichung (6.) genug. Aus der Gleichung (6.) aber findet man die Gleichung (3.), wenn man $\varphi' x = \frac{a\alpha}{fx + \alpha' x}$ setzt, und die Gleichung (3.) giebt, wenn man $xfy + yfx = r$ setzt:

$$\varphi' x \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \varphi' y \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) = 0.$$

Integrirt man diese partielle Differential-Gleichung nach den bekannten Regeln, so findet man:

$$r = F(\varphi x + \varphi y),$$

und hieraus

$$\varphi x + \varphi y = \psi r, \text{ oder}$$
$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx),$$

welches die gegebene Bedingungs-Gleichung ist.

Es ist noch übrig die Function ψ zu finden. Zu dem Ende sei $y = 0$, so findet man, weil $f0 = \alpha$,

$$\varphi x = \psi(\alpha x) - \varphi 0,$$

oder, wenn man $\frac{x}{\alpha}$ statt x setzt,

$$\psi x = \varphi \frac{x}{\alpha} + \varphi 0.$$

Zusammengenommen findet man also, daſs die allgemeinsten Formen der Functionen, welche der Bedingungs-Gleichung

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$$

genug thun, folgende sind:

$$\varphi x = a\alpha \int \frac{\partial x}{fx + \alpha' x} \text{ und}$$

$$\psi x = \varphi 0 + \varphi \frac{x}{\alpha} = a\alpha \int \frac{\partial x}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha' x} + \varphi 0,$$

wobei fx von der Gleichung

$$\alpha^{2n} = (fx - nx)^{n+\alpha'}(fx + nx)^{n-\alpha'}$$

abhängt.

Es sei z. B.

$$n = \alpha' = \tfrac{1}{2},$$

so ist

$$\alpha = fx - \tfrac{1}{2}x,$$

also

$$fx = \alpha + \tfrac{1}{2}x,$$

und folglich

$$\varphi x = a\alpha \int \frac{\partial x}{\alpha + x} = a\alpha \log(\alpha + x) + k,$$

$$\psi x = \varphi 0 + \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = 2k + a\alpha \log \alpha + a\alpha \log\left(\alpha + \frac{x}{\alpha}\right)$$

wo

$$\psi x = 2k + a\alpha \log(\alpha^2 + x).$$

Die Bedingungs-Gleichung giebt also

$k + a\alpha \log(\alpha + x) + k + a\alpha \log(\alpha + y) = 2k + a\alpha \log[\alpha^2 + x(\alpha + \frac{1}{2}y) + y(\alpha + \frac{1}{2}x)]$;

welches in der That zutrifft, denn beide Theile dieser Gleichung reduciren sich auf

$$2k + a\alpha \log(\alpha^2 + \alpha x + \alpha y + xy).$$

Die Function φx wurde oben in der Form eines Integrals gefunden. Man kann auch für dieselbe, vermittelst der Logarithmen, einen endlichen Ausdruck finden, wenn man die Function fx als bekannt annimmt. Es sei nemlich

$$fx + nx = v \quad \text{und} \quad fx - nx = t,$$

so giebt die Gleichung (12.)

$$\alpha^{2n} = v^{n-\alpha'} \cdot t^{n+\alpha'}$$

also

$$t^{n+\alpha'} = \alpha^{2n} \cdot v^{\alpha'-n},$$

und folglich

$$t = \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} \cdot v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}.$$

Nun ist

$$fx = \tfrac{1}{2}(v + t) \quad \text{und} \quad nx = \tfrac{1}{2}(v - t),$$

also ist

$$fx = \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}\alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} \cdot v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}, \text{ und}$$

$$x = \frac{1}{2n}v - \frac{1}{2n}\alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} \cdot v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}.$$

Dieses giebt, wenn man differentiirt:

$$\partial x=\left(\frac{1}{2n}-\frac{\alpha'-n}{2n(\alpha+n)}\alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}}.v^{-\frac{2n}{\alpha'+n}}\right)\partial v,$$

desgleichen findet man

$$fx+\alpha' x=\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\alpha'}{2n}\right)v+\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\alpha'}{2n}\right)\alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}}.v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}},\text{ oder}$$

$$fx+\alpha' x=(n+\alpha')\left(\frac{1}{2n}-\frac{\alpha'-n}{2n(\alpha'+n)}\alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}}.v^{-\frac{2n}{\alpha'+n}}\right)v,$$

aso

$$\frac{\partial x}{f\alpha+\alpha' x}=\frac{\partial v}{(n+\alpha')v},$$

welches, wenn man integrirt,

$$\int\frac{\partial x}{fx+\alpha' x}=\frac{1}{n+\alpha'}\log cv=\varphi x$$

giebt, wo c eine willkürliche Constante ist. Setzt man also für v seinen Werth $fx+nx$, so findet man

$$13.\quad \varphi x=\frac{1}{n+\alpha'}\log(cnx+cfx).$$

In den beiden Fällen, $\alpha'=\infty$ und $n=0$, bekommt die Function fx einen particulairen Werth. Um denselben zu finden, mufs man auf die Differentialgleichung (11.) zurückgehen.

Es sei

$$n=0,$$

so giebt die Gleichung (11.), weil $m=-n^2$:

$$f'x(fx+\alpha' x)-\alpha' fx=0.$$

Es sei

$$fx=z.x,$$

so findet man

$$\frac{\partial x}{x}=-\frac{\partial z(z+\alpha')}{z^2}=-\frac{\partial z}{z}-\alpha'\frac{\partial z}{z^2},$$

wovon das Integral

$$\log c+\log x=-\log z+\frac{\alpha'}{z}\quad\text{oder}\quad\log(czx)=\frac{\alpha'}{z},$$

oder, weil $z=\frac{fx}{x}$ war,

$$\log cfx=\frac{\alpha' x}{fx}\quad\text{oder}\quad\alpha' x=fx\log(cfx)\text{ ist.}$$

Für $x=0$ ist $0=\alpha\log c\alpha$, also $c\alpha=1$ und

$$c=\frac{1}{\alpha},$$

also

$$\alpha' x=fx\log\left(\frac{fx}{\alpha}\right)\text{ oder}$$

$$14.\quad e^{\alpha' x}=\left(\frac{fx}{\alpha}\right)^{fx}.$$

Diese Gleichung also bestimmt fx für den Fall, wenn $n = 0$ ist. Die Gleichung (13.) giebt für diesen Fall

$$\varphi x = \frac{1}{\alpha}\log cfx = \frac{1}{\alpha}\log c\alpha + \frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{fx}{\alpha}\right),$$

mithin, weil zu Folge (14.) $\log\frac{fx}{\alpha} = \frac{\alpha' x}{fx}$ ist:

$$15.\quad \varphi x = \frac{\log c\alpha}{\alpha'} + \frac{x}{fx}.$$

Ferner ist

$$16.\quad \psi x = \varphi 0 + \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{2\log c\alpha}{\alpha'} + \frac{x}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right)}.$$

Die gegebene Bedingungs-Gleichung also ist:

$$\frac{\log c\alpha}{\alpha'} + \frac{x}{fx} + \frac{\log c\alpha}{\alpha'} + \frac{y}{fy} = \frac{2\log c\alpha}{\alpha'} + \frac{xfy + yfx}{\alpha f\left(\frac{xfy+yfx}{\alpha}\right)},$$

das heifst, es mufs

$$17.\quad \alpha f\left(\frac{xfy+yfx}{\alpha}\right) = fxfy$$

sein.

Um diese Gleichung zu untersuchen, wollen wir statt x und y ihre Werthe aus der Gleichung (14.) setzen, nemlich $\frac{fx}{\alpha'}\log\left(\frac{fx}{\alpha}\right)$ und $\frac{fy}{\alpha'}\log\left(\frac{fy}{\alpha}\right)$.

Dieses giebt:

$$18.\quad \alpha f\left(\frac{fxfy\log\left(\frac{fxfy}{\alpha^2}\right)}{\alpha\alpha'}\right) = fxfy = \alpha fr,$$

wenn man der Kürze wegen

$$19.\quad \frac{fxfy\log\left(\frac{fxfy}{\alpha^2}\right)}{\alpha\alpha'} = r$$

setzt. Es folgt daraus:

$$2\log\alpha + \log\frac{fr}{\alpha} = \log(fxfy).$$

Aber zu Folge der Gleichung (14.) ist

$$\log\frac{fr}{\alpha} = \frac{\alpha' r}{fr},$$

also erhält man, wenn man substituirt,

$$20.\quad 2\log\alpha + \frac{\alpha' r}{fr} = \log(fxfy).$$

Da aber $fr = \frac{fxfy}{\alpha}$ war (18.), so ist, vermöge (19.), $\frac{fr \cdot \log\left(\frac{fxfy}{\alpha^2}\right)}{\alpha'} = r$, also $\frac{\alpha' r}{fr} = \log\left(\frac{fxfy}{\alpha^2}\right)$, folglich in (20.): $2\log\alpha + \log\left(\frac{fxfy}{\alpha^2}\right) = \log(fxfy)$, welches, wie leicht zu sehen, wirklich der Fall ist.

Es sei ferner

$$\alpha' = \infty.$$

Schreibt man in diesem Fall die Gleichung (11.) wie folgt:

$$\frac{fxf'x}{\alpha'} + xf'x + \frac{mx}{\alpha'} - fx = 0,$$

so ist klar, dafs $xf'x - fx = 0$ sein mufs, wenn m endlich ist. Also mufs

$$\frac{f'x}{fx} = \frac{\partial x}{x} \text{ oder } fx = cx$$

sein.

Ist

$$m = -p\alpha',$$

so ist

$$xf'x - px - fx = 0.$$

Es sei

$$fx = xz,$$

so erhält man

$$x(x\partial z + z\partial x) - (px - xz)\partial x = 0, \text{ oder}$$

$$x\partial z = p\partial x,$$

also $z = p\log cx = \frac{fx}{x}$, und folglich

$$fx = px\log cx.$$

Um φx zu finden, substituire man diesen Werth der Function fx in die Gleichung (3.), so erhält man, weil $f'x = p\log cx + pc$ ist: $\varphi' y(py\log cy + yp\log cx + pcy) - \varphi' x(px\log cx + xp\log cy + pcx) = 0$; also wenn man mit $p(\log c^2 xy + c)$ dividirt,

$$y\varphi' y - x\varphi' x = 0,$$

folglich

$$x\varphi' x = k \text{ und } \partial\varphi x = \frac{k\partial x}{x},$$

mithin

$$\varphi x = k\log mx.$$

Die gegebene Bedingungs-Gleichung geht also in

$$k\log mx + k\log my = \psi(xpy\log cy + ypx\log cx),$$

oder in

$$k\log m^2 xy = \psi(pxy\log c^2 xy)$$

über, oder wenn man

$$pxy \log c^2 xy = r \text{ und } xy = v$$

setzt, in

$$\psi r = k \log m^2 v.$$

Durch das Verfahren, welches hier oben die Functionen gab, die der Gleichung

$$\Phi x + \Phi y = \psi(xfy + yfx)$$

genugthun, lassen sich auch die unbekannten Functionen in jeder andern Gleichung mit zwei unabhängig veränderlichen Gröfsen finden. In der That lassen sich durch wiederholte Differentiationen nach den beiden veränderlichen Gröfsen, so viel Gleichungen finden als nöthig sind, um beliebige Functionen zu eliminiren, so dafs man zu einer Gleichung gelangt, welche nur noch eine dieser Functionen enthält, und welche im Allgemeinen eine Differential-Gleichung von irgend einer Ordnung sein wird. Man kann also im Allgemeinen alle die Functionen vermittelst einer einzelnen Gleichung finden. Daraus folgt, dafs eine solche Gleichung nur selten möglich sein wird. Denn da die Form einer beliebigen Function, die in der gegebenen Bedingungs-Gleichung vorkommt, vermöge der Gleichung selbst, von den Formen der andern unabhängig sein soll, so ist offenbar, dafs man im Allgemeinen keine dieser Functionen als gegeben annehmen kann. So z. B. könnte der obigen Gleichung nicht mehr genug gethan werden, wenn fx eine andere als die gefundene Gestalt hätte.

42.
Aufgaben und Lehrsätze,
erstere aufzulösen, letztere zu beweisen *).

1.

(Von Herrn *L. Raabe* zu Wien.)

67. Aufgabe. Die Zahl und Form der Bedingungs-Gleichungen zu finden, welche Statt finden müssen, damit n gerade Linien im Raume einen Punct gemeinschaftlich haben. Für zwei gerade Linien im Raume, deren Gleichungen

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$
$$x = a'z + \alpha', \qquad y = b'z + \beta'$$

sind, findet nur die einzige Bedingungs-Gleichung

$$\frac{a - a'}{b - b'} = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'}$$

Statt.

68. Lehrsatz. Wenn drei Kreise von gegebenen Halbmessern in einer und derselben Ebene liegen, und von einer und derselben geraden Linie berührt werden, und Δ bezeichnet den Flächeninhalt des geradlinigen Dreiecks, in dessen Ecken die Mittelpuncte der drei Kreise liegen, δ hingegen den Flächen-Inhalt des Dreiecks, in dessen Ecken die Mittelpuncte der drei Kreise dann liegen, wenn sie, in veränderter Lage, eine beliebige Coordinaten-Axe der x berühren, während ihre Mittelpuncte in derselben Entfernung von der auf dieser Axe senkrechten Axe der y bleiben, wie zuvor; δ' endlich den Flächen-Inhalt des Dreiecks, in dessen Ecken die Mittelpuncte der drei Kreise liegen, wenn sie, wieder in veränderter Lage, die Coordinaten-Axen der y berühren, während ihre Mittelpuncte in gleicher Entfernung wie in der ersten Lage von der Axe der x sind, so ist

$$\Delta^2 = \delta^2 + \delta'^2.$$

*) Die unter der Ueberschrift: „Von Anderen" stehenden Aufgaben in diesem Bande des Journals sind von dem Herausgeber aufgesetzt. Er hat ihnen die Ueberschrift: „Vom Herausgeber" deshalb nicht gegeben, weil es möglich wäre, dafs ihm, ohne dafs er sich dessen noch erinnerte, die Idee zu dieser oder jener Aufgabe durch irgend ein Buch, oder im Gespräche mitgetheilt sein könnte, und er der Möglichkeit, sich etwa unbewufst fremde Ideeen zuzuschreiben, entziehen wollte. Er trat daher die Ideeen zu den Aufgaben, für den Fall, dafs sie Jemand Anders schon gehabt haben sollte, im Voraus ab, und findet sich aufgefordert, solches zu bemerken.

2.

(Von Anderen.)

69. Wenn fx eine gegebene erste Ableitung, oder wie man sagt, $fx.\partial x$ ein gegebenes Differential von der ersten Ordnung ist, für deren Stammgröfse (oder für dessen Integral) sich kein geschlossener Ausdruck finden läfst, sondern nur eine unendliche Reihe, so fragt es sich, ob und wie sich erkennen lasse, ob der Werth des Integrals, für den einzelnen Fall: $x = \infty$, unendlich grofs sei, oder endlich, oder Null. Der Werth selbst der Stammgröfse (des Integrals) für $x = \infty$, wenn er endlich ist, wird nicht verlangt.

70. Wenn s_n die Summe von n beliebigen Gröfsen a_1, a_2, a_3, ... a_n, ferner $(s^2)_n$ die Summe der Quadrate dieser Gröfsen, $(s^3)_n$ die Summe ihrer dritten Potenzen u. s. w. bezeichnet, so kann die $m$te Potenz der Summe s_n, nemlich $(s_n)^m$, durch

$$(s_n)^m = (s^m)_n + S$$

bezeichnet werden, wo S eine Summe von Gliedern ist, deren keines eine von den n Gröfsen a_1, a_2, ... a_n allein enthält. Es fragt sich nun, für welche ganzzahlige n, m und ν, die Gröfse S mit $(s_n)^\nu$ aufgehe. Für $n = 2$, $m = 3$ und $\nu = 1$ findet bekanntlich ein solches Aufgehen Statt; nemlich $(a_1 + a_2)^3$ ist gleich

$$a_1^3 + 3a_1^2a_2 + 3a_1a_2^2 + a_2^3,$$

also hier $S = 3a_1^2a_2 + 3a_1a_2^2$, und diese Gröfse geht mit $a_1 + a_2$ auf. Die Frage ist also, ob n, m und ν noch andere ganzzahlige Werthe haben können, als 2, 3 und 1.

71. *a*) Welche Gestalt mufs eine ebene Figur von bestimmtem Flächen-Inhalte haben, wenn sie so viele als möglich in ihrer Ebene sich befindende Puncte unter der Bedingung umschliefsen soll, dafs kein Punct dem anderen näher liege, als bis auf eine bestimmte Entfernung, und dafs der Umfang der Fläche, wenn er krummlinig ist, nicht abwechselnd convex und concav sei, wenn er aber geradlinig ist, keine einspringende Winkel habe; desgleichen, wie müssen die Puncte dann gegeneinander und in dem Umfange der Figur und gegen ihn liegen?

b) Welche Gestalt mufs eine Fläche, die einen körperlichen Raum von bestimmter Gröfse umgiebt, haben, wenn sie so viele Puncte als möglich unter der Bedingung umschliefsen soll, dafs kein Punct dem anderen näher liege, als bis auf eine bestimmte Entfernung, und dafs die

Fläche,

Fläche, wenn sie krumm ist, nicht abwechselnd concav und convex sei, wenn sie aber aus Ebenen zusammengesetzt ist, keine einspringende Ecken habe; desgleichen, wie müssen die Puncte dann gegeneinander und in der umschliefsenden Fläche und gegen sie liegen?

72. Die Winkel zwischen den Seiten und Diagonalen ebener geradliniger Figuren werden entweder 1) blofs durch andere dergleichen Winkel, oder 2) auch blofs durch die trigonometrischen Linien derselben, ohne die Seiten und Diagonalen zu Hülfe zu nehmen, oder 3) nur mit Hülfe der Seiten und Diagonalen bestimmt. Die Fälle anzugeben, in welchen besonders das Zweite Statt findet.

73. Durch welche Seiten und Winkel eines Raum-Vielecks (sphärischen Vielecks) wird das Vieleck bestimmt? In welchem der verschiedenen Fälle ist mit bestimmten Seiten und Winkeln nur ein Vieleck möglich, in welchen anderen sind symmetrische Vielecke möglich, und in welchen, mit den nemlichen Seiten und Winkeln, mehrere und unzählige gleiche oder symmetrische Vielecke?

74. Aus den sämmtlichen Seiten eines Raum-Vielecks (sphärischen Vielecks) und denjenigen Winkeln, die noch zur gänzlichen Bestimmung des Vielecks nöthig sind, und die aneinander liegen mögen, den Raum-Inhalt des Vielecks zu finden.

75. Welche Verhältnisse finden zwischen den Seiten und Winkeln, nach den Ecken und nach den Seiten centrischer Raum-Vielecke (sphärischer Vielecke) Statt?

76. Wenn man die Zahlen der Dreiecke, Vierecke, Fünfecke bis m Ecke, von welchen Polyëder umschlossen werden können, durch n_3, n_4, n_5, ... n_m bezeichnet, welche Werthe können möglicher Weise n_3, n_4, n_5, ... n_m haben?

77. Den körperlichen Inhalt eines von lauter Dreiecken umschlossenen Polyëders aus den Kanten zu finden.

78. Welche Verhältnisse zwischen den Kanten und den Kanten- und Seiten-Winkeln finden in einem Polyëder Statt, welches von lauter Dreiecken umschlossen ist, wenn seine Eckpuncte sämmtlich in einer und derselben Kugelfläche liegen, oder wenn seine Seiten-Ebenen von einer und derselben Kugelfläche berührt werden, oder wenn das Gleiche mit seinen Kanten geschiehet?

79. Wenn man annimmt, dafs die Intensität des Lichtes, welches ein leuchtender Punct in einem vollkommen durchsichtigen Mittel verbreitet, in umgekehrtem Verhältnifs des Quadrats der Entfernung vom leuchtenden Punct stehe, desgleichen, dafs, wenn sich ferner der Punct in einem unvollkommen durchsichtigen Mittel, wie z. B. der atmosphärischen Luft, befindet, eine zweite Abnahme Statt finde, die zu der Dicke der durchleuchteten Schichten im Verhältnifs stehet: wie viel wird dann die Summe des Lichtes betragen, welches der leuchtende Punct aussendet, wenn man unter dieser Summe die Summe der Producte der beleuchteten Räume in die Intensität der Beleuchtung verstehet?

80. Wenn unter denselben Voraussetzungen wie (79.) noch angenommen wird, dafs eine zurückstrahlende Ebene, auf welche der leuchtende Punct sein Licht wirft, einen constanten Theil der Beleuchtung verschlucke: wieviel wird dann die Summe des direct, und des von der Ebene zurückgeworfenen Lichtes betragen, und in welcher Entfernung mufs sich die Ebene von dem leuchtenden Puncte befinden, damit die Summe des Lichts ein Maximum sei?

43.

Einige Nachrichten von Büchern *).

Von den so sehr verdienstlichen „*Annales de mathématiques pures et appliquées, ouvrage périodique, rédigé par Mr. J. D. Gergonne à Nismes, chez P. Durand-belle et à Paris chez Bachelier,*" von welchen monatlich ein Heft, etwa 4 Bogen stark, herauskommt, erscheint nun schon der 18te Band oder Jahrgang, und das Werk hat durch die ganzen 18 Jahre seinen Werth behauptet. Es füllt jetzt an 900 Bogen, und enthält einen Schatz von mathematischen Arbeiten und Materialien und Anlafs zu ferneren. Die ausgezeichnetesten Schriftsteller, z. B. aufser dem Herrn Herausgeber selbst, die Herren Poisson, Kramp, Poncelet, Servois etc., haben daran Theil genommen, und die Wissenschaft ist durch ihre Arbeiten in mannigfacher Beziehung wesentlich bereichert worden. Die Annalen sind über die ganze civilisirte Erde verbreitet, von Petersburg bis Rio-Janeiro und von Stockholm bis Palermo, und geniefsen der verdienten Anerkennung. Dieses ist unstreitig ein erfreuliches Zeichen der Zeit, aber warlich, es gehört auch ein Mann von solchem Eifer für seine Wissenschaft, von solcher Thätigkeit und von so gründlichen Kenntnissen dazu, einem solchen Unternehmen Schwung zu geben, und es darin zu erhalten, wie der scharfsinnige und gelehrte Herausgeber desselben. Nicht allein, dafs seine eigenen Arbeiten unter die besten des Werkes gehören: auch sein Eifer und seine Thätigkeit sind bewundernswerth und unermüdlich; seine Unpartheilichkeit und Bereitwilligkeit, jedes Verdienst und selbst jedes

*) Der Herausgeber hat sehr um Entschuldigung und Verzeihung zu bitten, dafs er in diesem Journale bis jetzt so selten Anzeigen und Beurtheilungen von Büchern gab. Erstlich fehlt es ihm durchaus an Zeit, auch nur das bedeutendere Neue mit derjenigen Aufmerksamkeit zu lesen, die nöthig ist, um ausführlich darüber zu urtheilen. Er ist wie immer von Geschäften seines Dienstes überladen, die ihm durchaus keine von den Stunden, welche irgend der Arbeit gewidmet sind, übrig lassen. Früher hat er zu seinen mathematischen Arbeiten die der Erholung und Ruhe gehörige Zeit der Abende und Nächte verwendet. Jetzt erlaubt ihm dieses der eben dadurch geschwächte Zustand seiner Gesundheit, und besonders seiner Augen, nicht mehr, und so ist es ihm unmöglich, sich zum Critisiren auszurüsten. Zweitens ist aber auch ein ihm eigenthümlicher, fast unbezwinglicher Widerwille gegen alles öffentliche Urtheilen über die Arbeiten Anderer an der Unterlassung Schuld. Dieser Widerwille gründet sich vorzüglich darauf, dafs es ihm nie hat gelingen wollen, sich von dem Recht Einzelner, sich selbst zu öffentlichen Richtern über das geistige Thun Anderer zu constituiren, zu überzeugen. Ein solches Recht könnte allenfalls nur auf einen Augenschein des Nutzens der Critiken gegründet werden; aber der Herausgeber hat nie einen solchen einleuchtenden Nutzen bemerken können. Er glaubt deshalb auch, dafs die Critik sich fast nur auf Anzeigen von literarischen Arbeiten reduciren müsse, und dafs wenigstens der Anzeigende, wo er nicht, in das Urtheil des Publicums einstimmend, loben kann, kein Recht habe zu tadeln. Er mag sich in allen diesem irren; so viel möchte indessen wahr sein, dafs das geringste „Bessermachen" dennoch mehr nütze, als die Critik, und um so mehr, weil an Critiken kein Mangel, an neuem Guten dagegen kein Ueberflufs ist. Darum hat er auch in diesem Journal nur alle Mühe darauf gewendet, so viel als möglich Gutes und Nützliches zusammenzubringen. Er hat es in dem Maafse gethan, dafs, wenn man es zu sagen erlaubt, in dieser Beziehung eigentlich mehr geleistet worden ist, als versprochen war, nemlich dadurch, dafs fast keine einzige Abhandlung, wie es sollte geschehen dürfen, blofs übertragen ist, sondern dafs fast alle, ohne Ausnahme, original sind. Er hofft also mit diesem guten Willen, wegen der Versäumung in Rücksicht der Critiken weniger tadelhaft zu sein. Er hat noch immer darauf gerechnet, dafs ihm Beurtheilungen zugesandt werden würden, allein diese Hoffnung ist bis jetzt fehlgeschlagen. Er bittet aus allen diesen Gründen um Verzeihung wegen einer Unterlassung, welcher er sich nicht gut entziehen konnte. Er giebt jetzt hier einige Anzeigen, die er mit gutem Gewissen niederschreiben kann, und wird auch damit von Zeit zu Zeit, wenn es sein mufs, fortfahren, hoffend indefs, dafs Andere ihn in der Erfüllung dieses Theils seiner Verpflichtungen bei dem Journal, der ihm durch allgemeine Gewohnheit aufgelegt wurde, zu unterstützen die Güte haben werden.

Bemühen um die gute Sache anzuerkennen, ist von einem seltenen Grade. Möge die treffliche Zeitschrift stets fortblühen, und ihr würdiger Herausgeber noch lange die Freude geniefsen, zur Verbreitung und Entwicklung einer der edelsten und wichtigsten Wissenschaften so wirksam und wesentlich beigetragen zu haben!

Neuer ist das „*Bulletin universel des sciences et de l'industrie, sous la direction de Mr. le Baron de Férussac à Paris,*" welches in 8 Sectionen die reine und angewandte Mathematik in ihrem ganzen Umfange, die Physik, die Chemie, die Naturgeschichte, die Geologie, die Medicin, den Ackerbau und die Staatswirthschaft, die Technologie, die Geographie, die Geschichte, die Alterthümer, die Philologie und die Kriegskunst zum Gegenstande hat. Die erste Section ist der Mathematik, Physik und Chemie gewidmet, und es erscheint von dieser Section, so wie von den übrigen, monatlich ein Heft. Dieses Werk befindet sich jetzt in seinem vierten Jahrgange. Aber auch bei ihm zeigt sich ein sichtbares Gedeihen, und der Eifer und die Thätigkeit des Herrn Herausgebers ist unverkennbar. Das Werk enthält nächst der Anzeige von Schriften in allen Sprachen, zum Theil verbunden mit kurzen Beurtheilungen und Nachrichten von den Arbeiten der Academieen und einzelner Gelehrten, auch schätzbare, kurze Abhandlungen und Aufsätze. Die eigenen Beurtheilungen sind schonend, bleiben bei der Sache, und verletzen deshalb nicht, wo sie tadeln müssen. Auch diesem Werke ist unstreitig stete Fortdauer und das beste Gedeihen zu wünschen.

Der „Barycentrische Calcul" vom Herrn Professor Möbius, Leipzig bei Barth, 1826, enthaltend geometrische Untersuchungen, die vom geometrischen Begriff des Schwerpuncts ausgehen, ist ein wichtiges deutsches Originalwerk, und verdient alle Aufmerksamkeit der Mathematiker.

Herr A. L. Cauchy setzt heftweise seine „*Exercices de mathématiques, à Paris chez de Bure frères*" fort. Es sind 19 Hefte erschienen. Das Werk ist voller tiefer analytischer Untersuchungen, wie sie sich von dem scharfsinnigen und an neuen Ideen reichen Verfasser des „*Cours d'analyse,*" der „*Leçons sur le calcul infinitésimal,*" der „*Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie, etc.*" erwarten lassen.

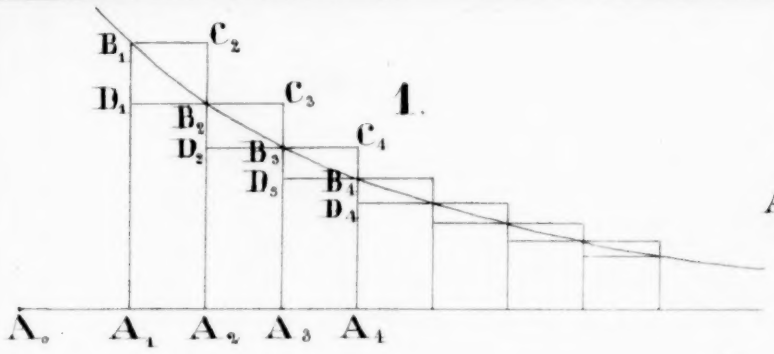
Von den „*Exercices du calcul intégral*" des Herrn Legendre erscheint eine neue Auflage, die noch gegen die erste sehr bereichert sein soll. Dieses Werk eines Veterans aus dem ersten Range der Geometer wird unstreitig sehr wichtig und um so interessanter sein, da der Gegenstand womit es sich vorzüglich beschäftiget, nemlich die elliptischen Functionen, die Facultäten, die Eulerschen Integrale und was damit zusammenhängt, in neuester Zeit so sehr die Aufmerksamkeit, und gleichsam einen Wetteifer der Mathematiker erregt hat.

Von Herrn Fourier, dem berühmten Verfasser der classischen „*Théorie de la chaleur*" und vieler anderen gediegenen Arbeiten, ist ein wichtiges Werk über die numerischen Gleichungen zu erwarten.

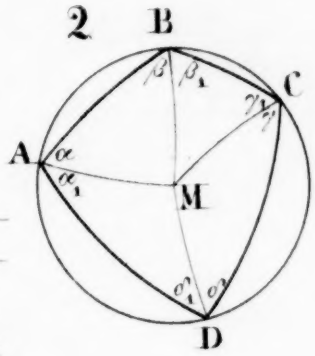
Herr Professor Grunert in Torgau ist mit der Vollendung des mathematischen Wörterbuches beschäftigt, welches Klügel anfing, Mollweide fortsetzte, dessen Beendigung aber beide nicht erlebten. Erst durch die Beendigung, die für ein Wörterbuch so vorzüglich wichtig ist, wird dieses, auch wegen der mit so vieler Gelehrsamkeit behandelten Geschichte der einzelnen Theile der Mathematik, schätzbare Werk seinen vollen Werth erhalten.

Taf. I.

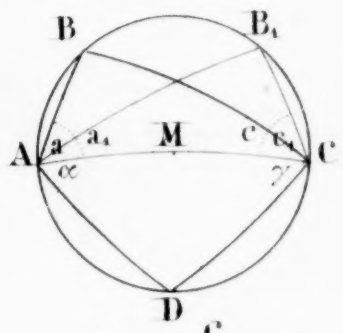
1.



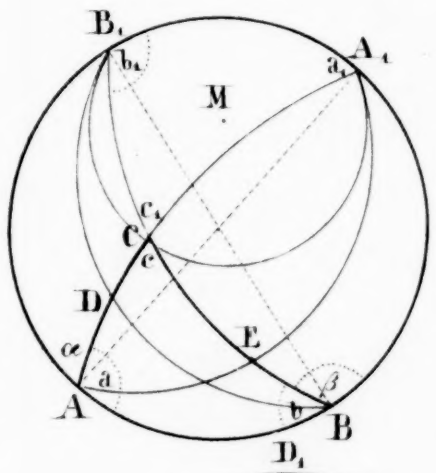
2.



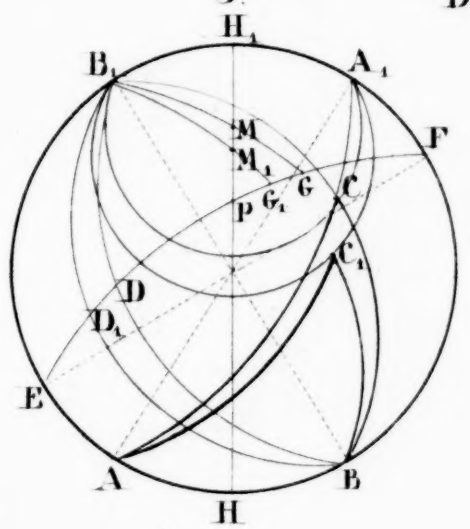
3.



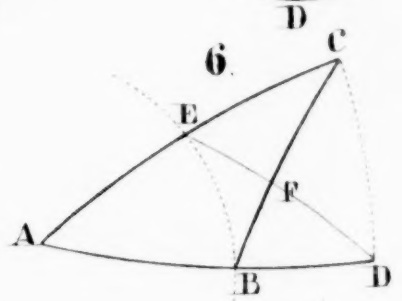
4.



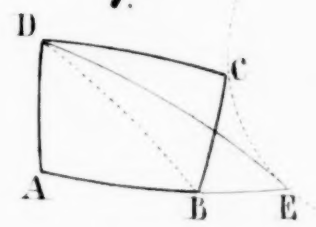
5.



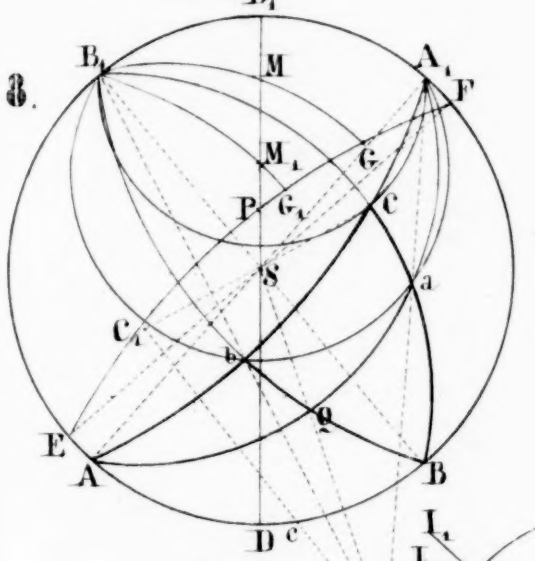
6.



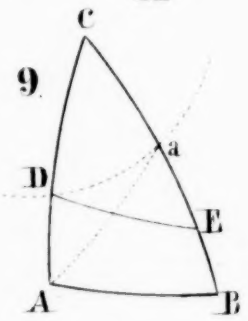
7.



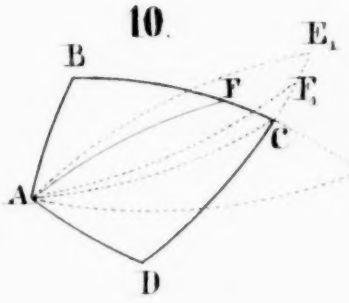
8.



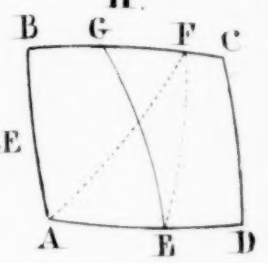
9.



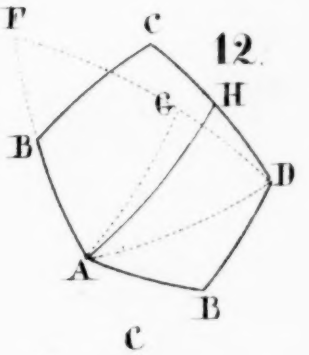
10.



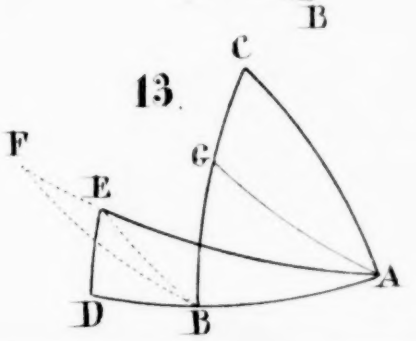
11.



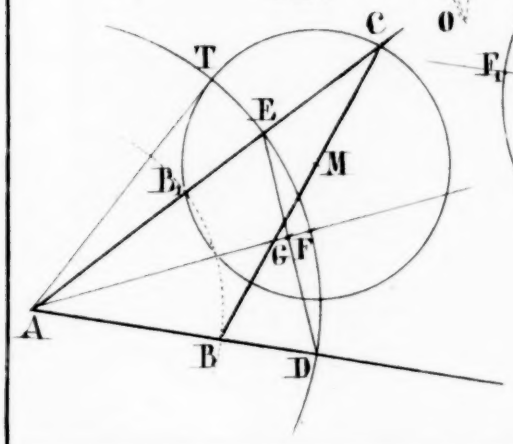
12.



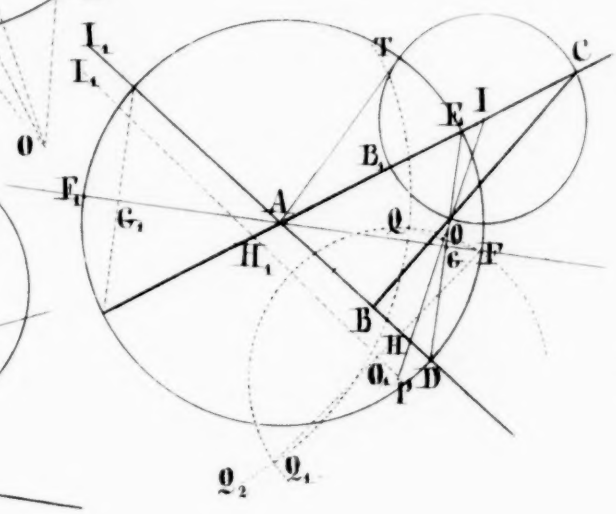
13.



14.

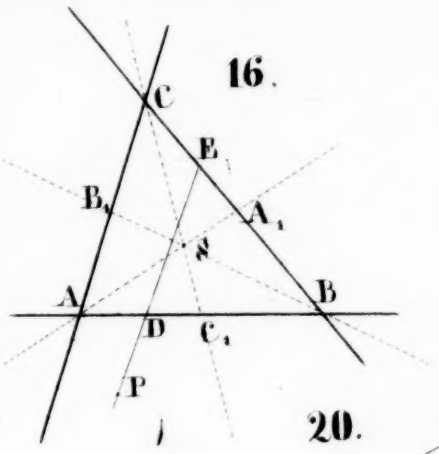


15.

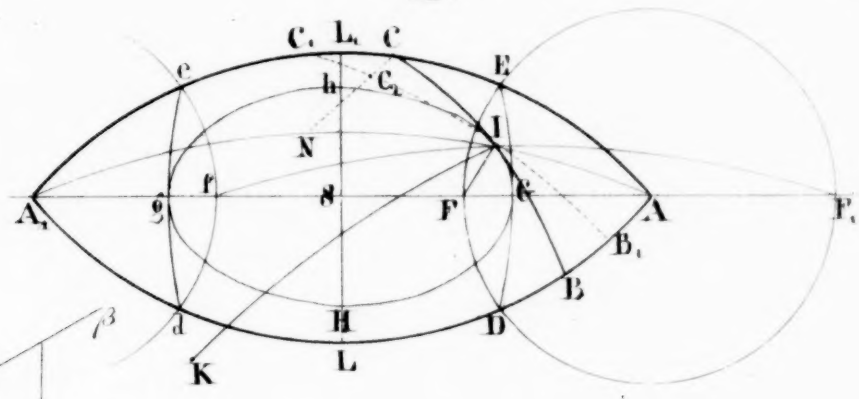


Taf. II.

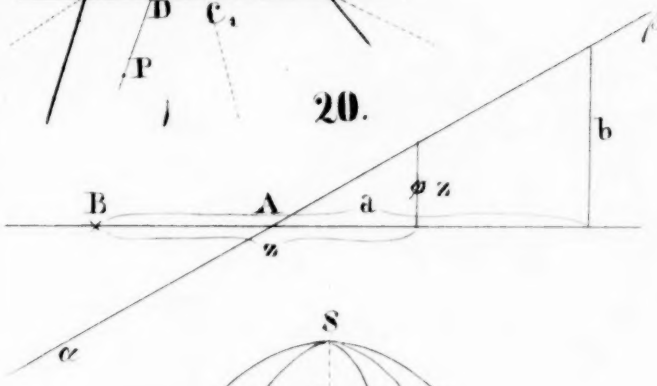
16.



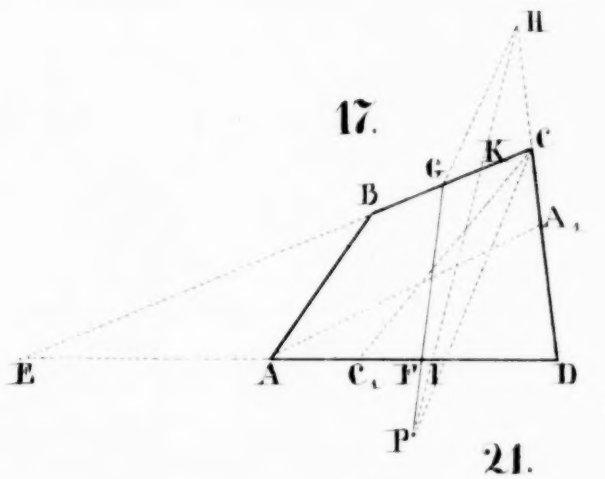
18.

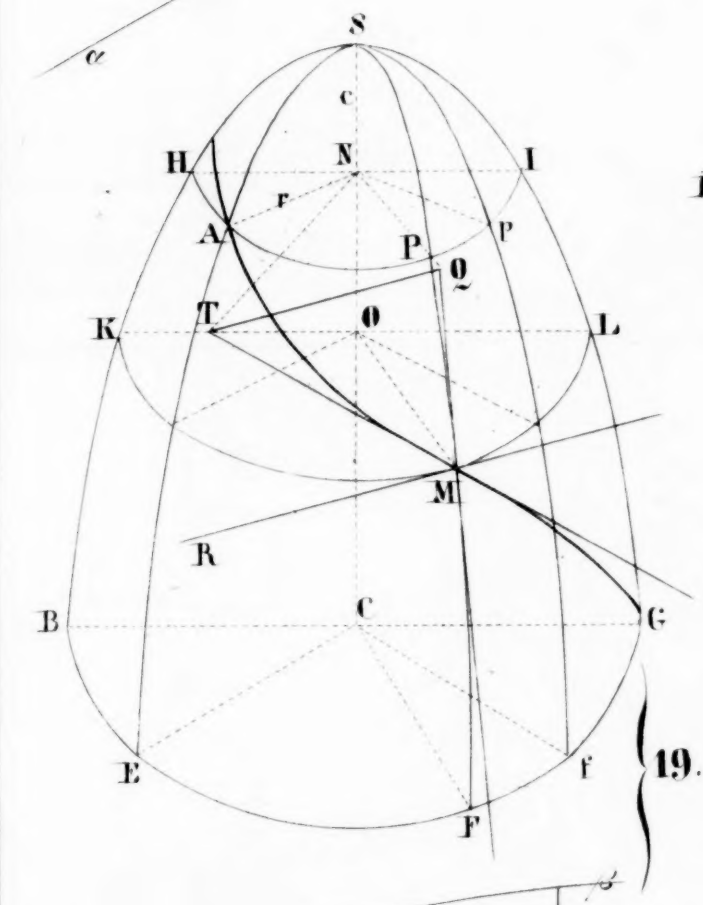


20.

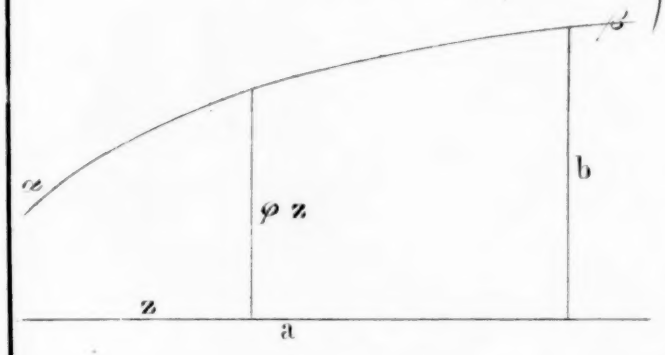


17.

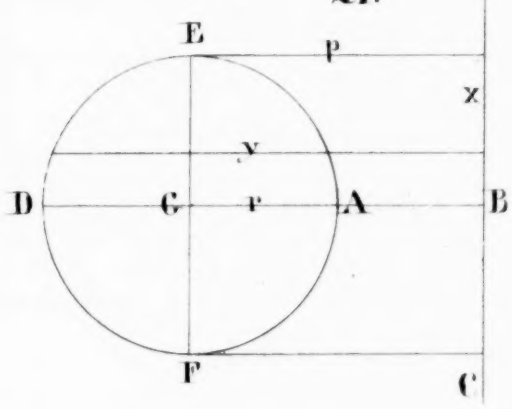




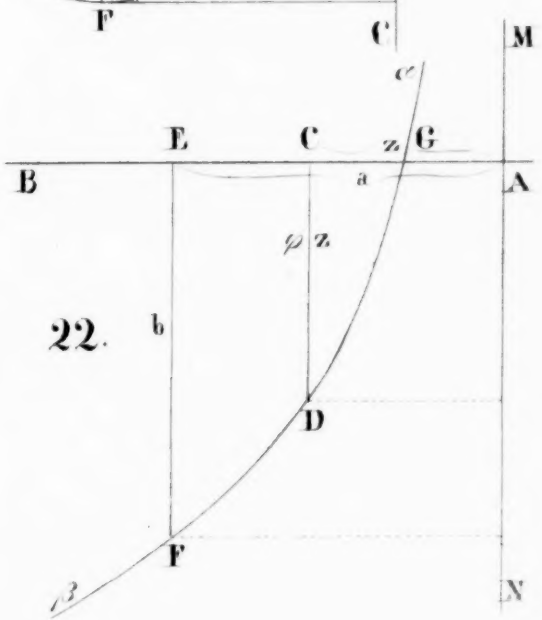
19.



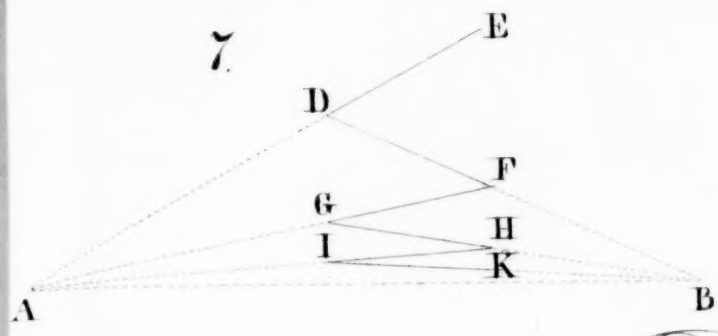
21.



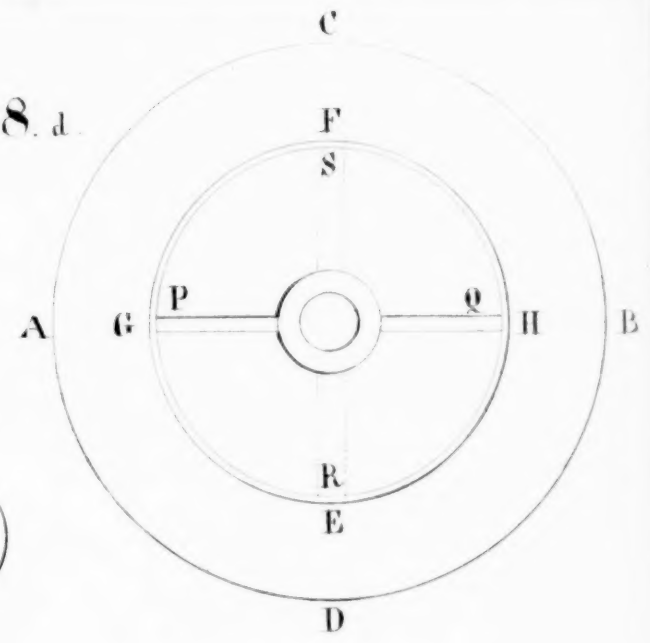
22.



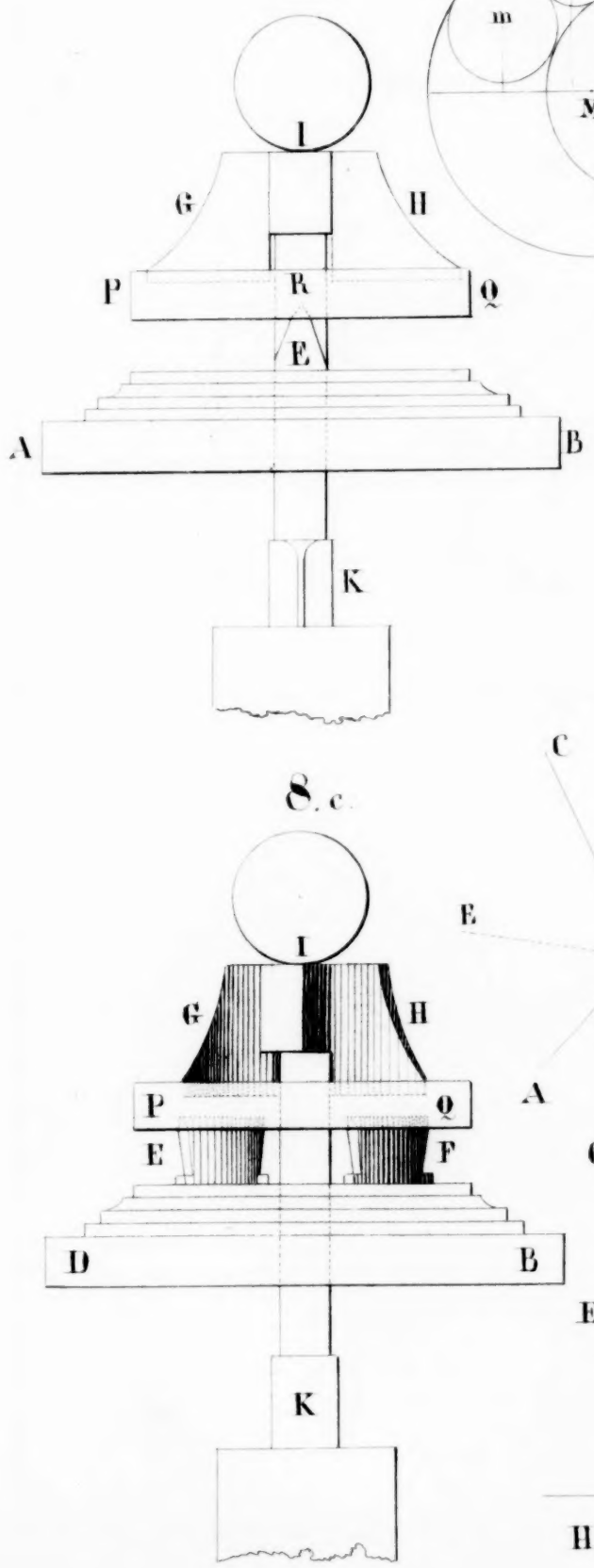
7.



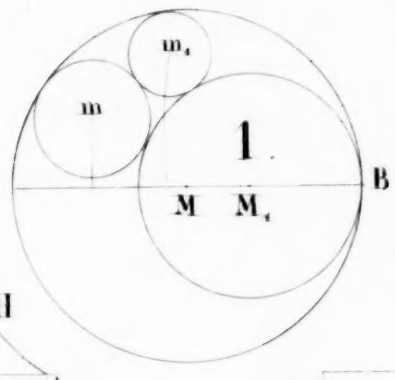
8. d.



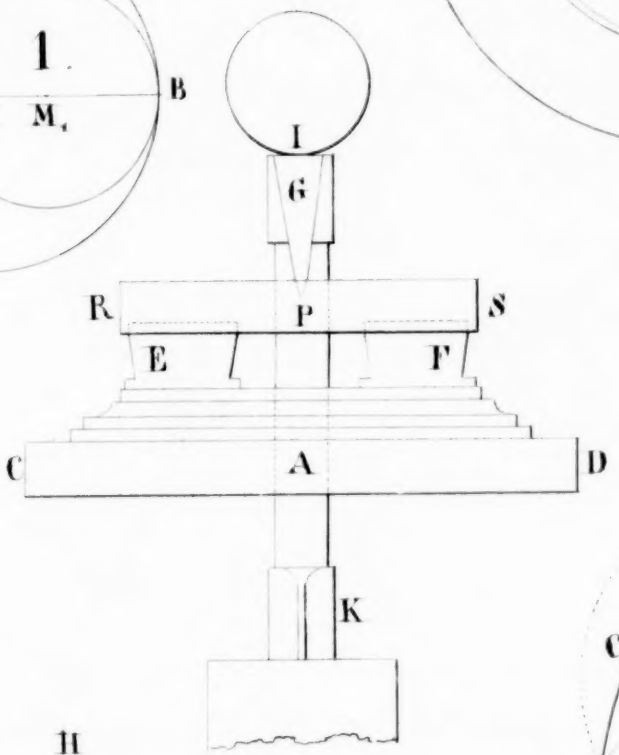
8. a.



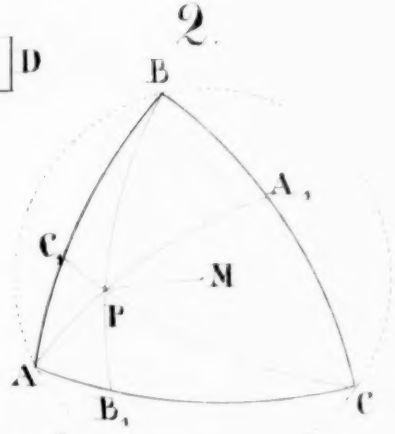
1.



8. b.



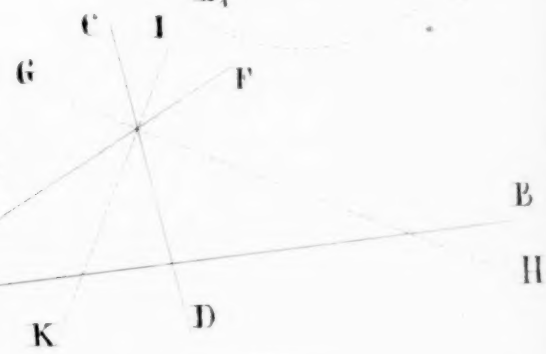
2.



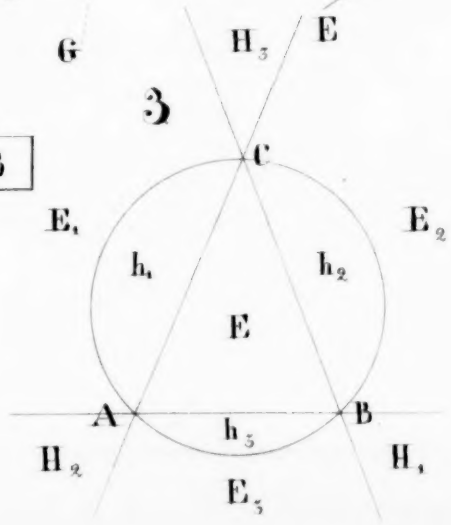
8. c.

4.

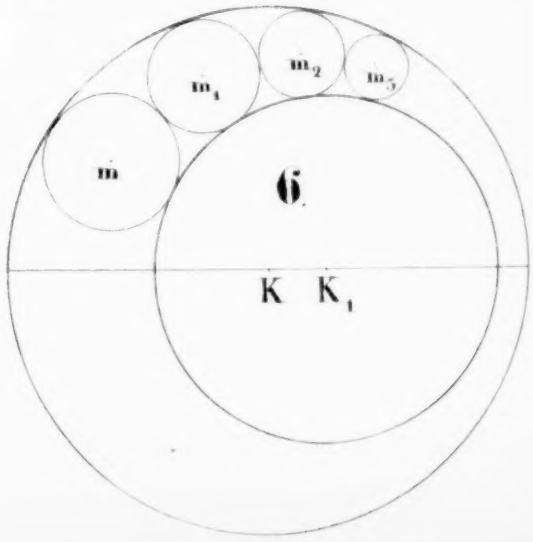
5.

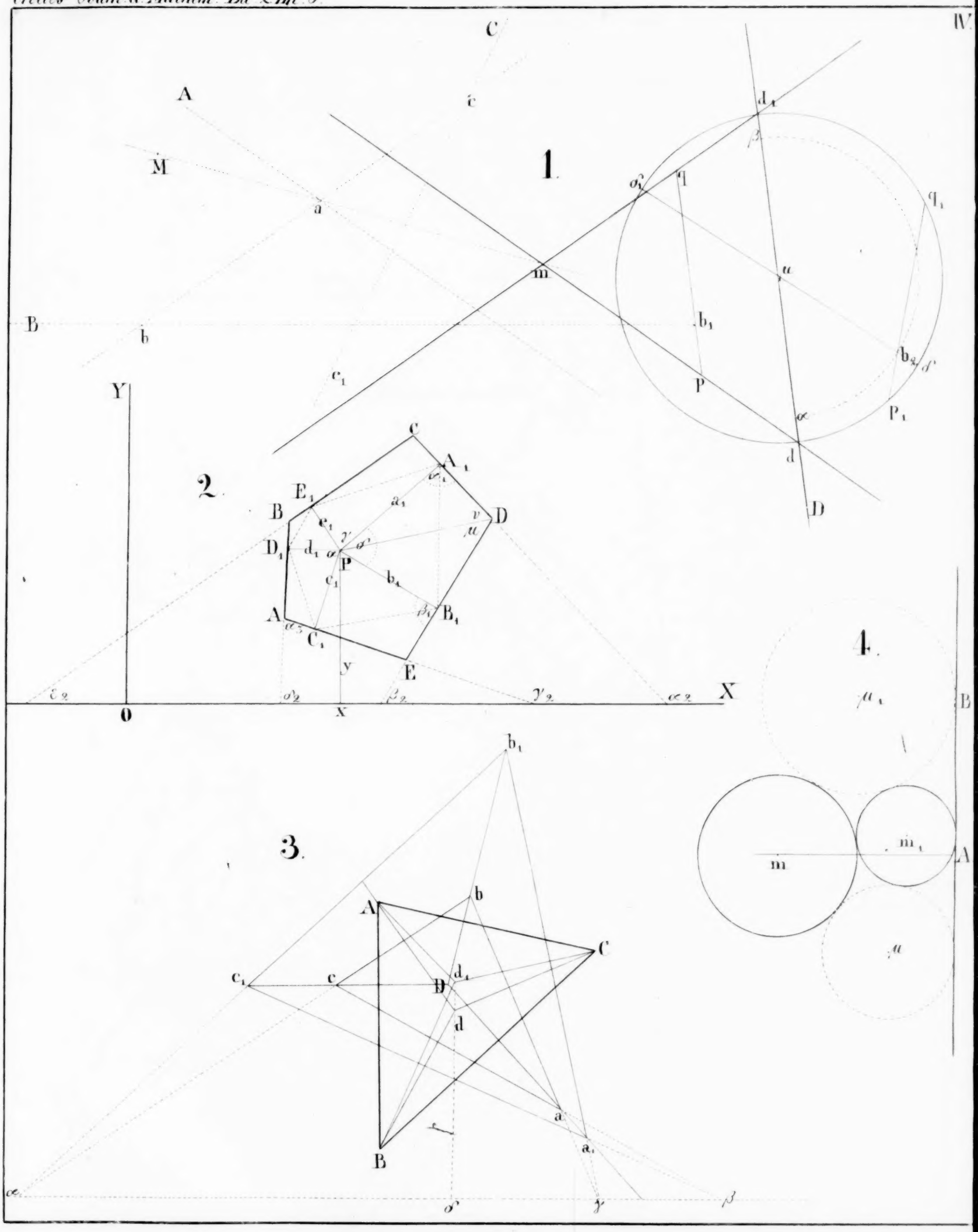


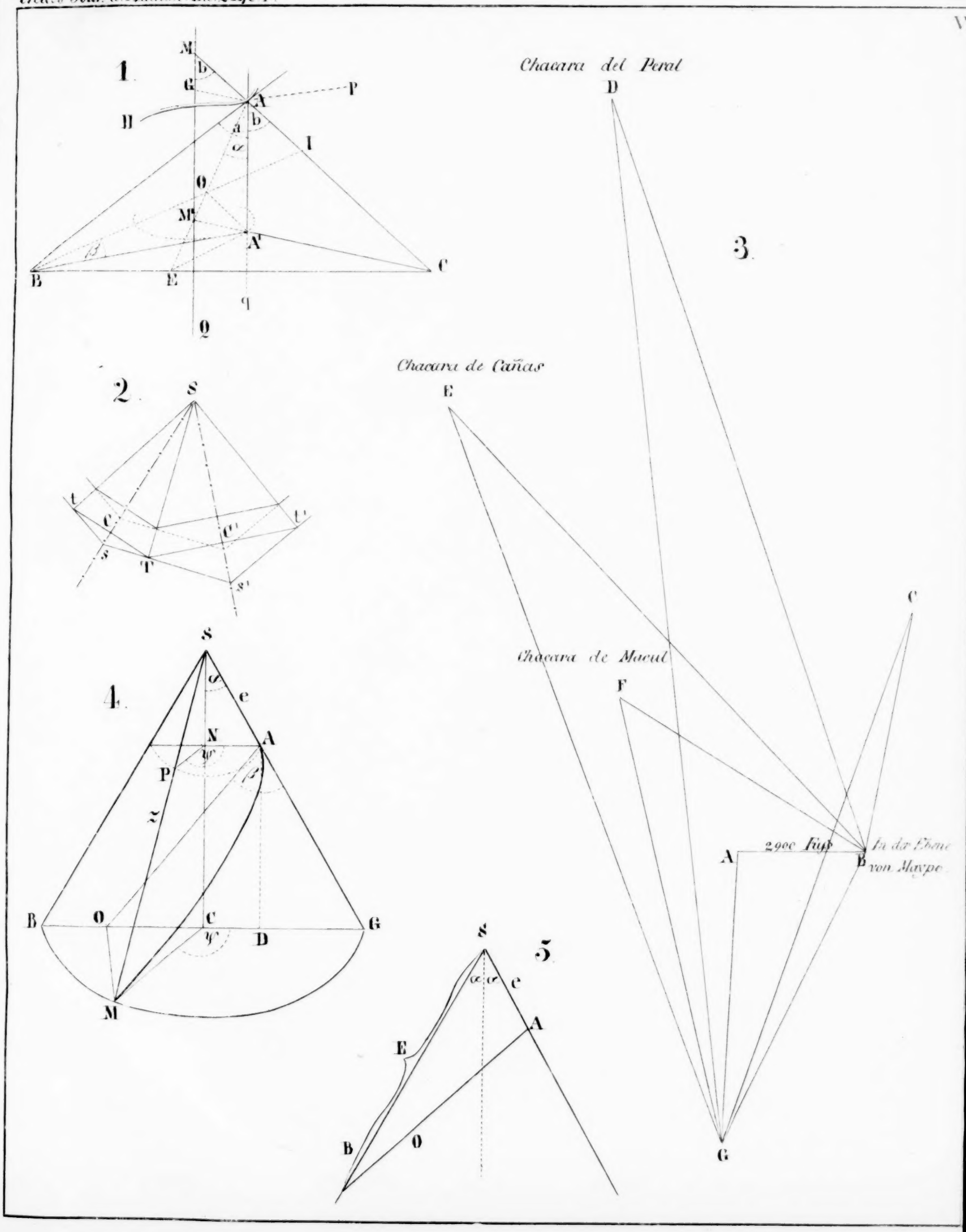
3.



6.




IV.
1.
2.
3.
4.
A
B
C
D
E
M
m
a
b
c
d
P
q
u
Y
X
O
x
y
A_1
B_1
C_1
D_1
E_1
a_1
b_1
c_1
d_1
P_1
q_1
b_2
m_1
μ_1
μ
α
β
γ
δ
ε_2
δ_2
β_2
γ_2
α_2


V.
1.
M
b
G
A
P
H
a
b
α
I
O
M'
A'
β
B
E
C
q
Q
2.
S
t
C
C'
t'
s
T
s'
4.
S
α
e
N
A
ψ
P
β
z
B
O
C
ψ
D
G
M
5.
S
α
α
e
A
E
B
O
Chacara del Peral
D
3.
Chacara de Cañas
E
C
Chacara de Macul
F
A
2900 Fuß
B
In der Ebene von Maypo
G